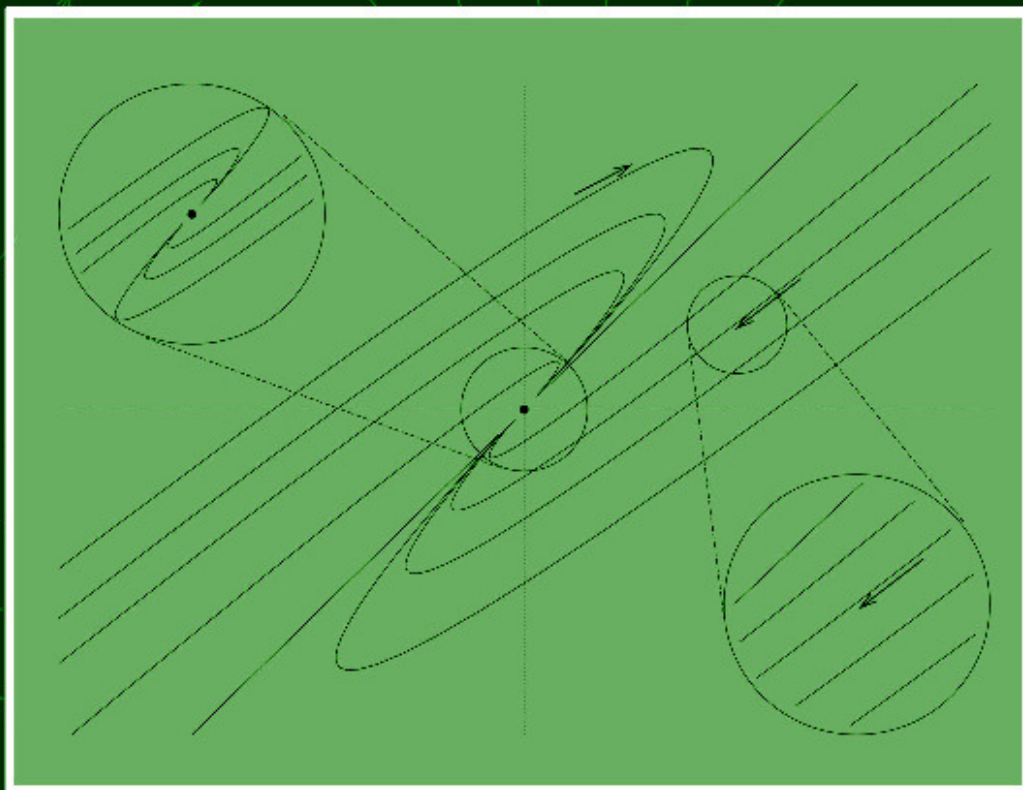


מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות

אורי אליאש



הפקולטה למתמטיקה
הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

מהדורה שניה

מבוא למשואות דיפרנציאליות רגילות

אורי אליאש

מהדורה שניה
2015

הפקולטה למתמטיקה - הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל

אין להעתיק, לצלם, או לתרגם את הספר או כל חלק ממנו בצורה כלשהי או באמצעים
כלשהם, לרבות הקלטה ואיחסון במאגר מידע, אלא באישור בכתב מהמחבר.

© כל הזכויות שמורות לאורי אליאש, 2009, 2015.

This work is subject to copyright. No part of this book may be reproduced by
any mechanical, photographic, or electronic process, transmitted or otherwise
copied for public or private use, without written permission from the author.

© All rights are reserved to Uri Elias, 2009, 2015

לשרה
שותפתי לדרך

תוכן עניינים

1	מהי משואה דיפרנציאלית רגילה?	1
1	מה החיה הזאת?	1.1
2	דוגמאות ומודלים	1.2
6	משואות דיפרנציאליות מסדר ראשון	2
6	שיטות פתרון אחדות	2.1
6	משואות לינאריות מסדר ראשון	2.1.1
14	משואות ניתנות להפרדה	2.1.2
18	פתרון על ידי הצבה	2.1.3
21	משואות מדויקות	2.1.4
26	גורמי אינטגרציה	2.1.5
29	משואות מהצורה $y'' = f(y)$	2.1.6
31	נושאים גיאומטריים	2.2
31	שדה כוונים	2.2.1
34	משפחות עקומים אורתוגונליים	2.2.2
37	תרגילים	2.3
43	משפטי קיום ויחידות לבעיות התחלה	3
43	דיון במשפט הקיום והיחידות ודוגמאות	3.1
49	רמז להוכחת משפט הקיום	3.2
51	הוכחת קיום הפתרון	3.3
56	הוכחת יחידות הפתרון	3.4
58	שמושים ליחידות הפתרון	3.5
63	פתרונות לוקליים	3.6

65	חקירה איכותית של פתרונות	3.7
72	משפט קיום גלובלי	3.8
75	מושג היציבות	3.9
78	משפט קיום ויחידות למשוואה מסדר גבוה	3.10
80	תרגילים	3.11
89	משוואות לינאריות מסדר כלשהו	4
89	תזכורת מאלגברה לינארית	4.1
90	משפט קיום ויחידות למשוואות לינאריות	4.2
93	משוואות לינאריות הומוגניות	4.3
96	אפיון מרחב הפתרונות	4.4
102	הורונסקיאן ונוסחת Abel	4.5
107	הורדת סדר משוואה	4.6
110	משוואות עם מקדמים קבועים	4.7
119	התנהגות איכותית ויציבות	4.8
122	משוואת Euler	4.9
125	משוואות לינאריות בלתי הומוגניות	4.10
127	שיטת וריאצית הפרמטרים	4.11
133	שיטת השוואת המקדמים	4.12
141	תרגילים	4.13
150	מערכות של משוואות דיפרנציאליות	5
150	מערכות של משוואות ומשפט קיום ויחידות	5.1
153	מערכות של משוואות לינאריות	5.2
155	מערכת הומוגנית ומבנה פתרונותיה	5.3
161	נוסחת Abel למערכת	5.4
162	מטריצה יסודית	5.5
164	מערכות עם מקדמים קבועים	5.6
166	מערכות עם בסיס של וקטורים עצמיים	5.6.1
171	מערכות להן אין בסיס של וקטורים עצמיים	5.6.2
178	מערכות בלתי הומוגניות	5.7
181	תרגילים	5.8

187	התיאוריה האיכותית ומישור הפאזה	6
187	מסלולים ונקודות קריטיות במישור הפאזה	6.1
192	מערכת לינארית במישור הפאזה - מיון	6.2
207	הפרעות קטנות במקדמי מערכות לינאריות	6.3
209	הערות על מערכות בלתי לינאריות במישור הפאזה	6.4
215	תרגילים	6.5
221	פתרון משואות דיפרנציאליות בעזרת טורי חזקות	7
221	תזכורת על טורי חזקות	7.1
224	פתרון משואות דיפרנציאליות בעזרת טורי חזקות	7.2
231	פתרון סביב נקודה סינגולריות-רגולרית	7.3
241	אינדקסים שוים	7.4
245	אינדקסים הנבדלים בשלם חיובי	7.5
248	משואת Bessel	7.6
252	תרגילים	7.7
255	התמרת לפלס	8
255	הגדרת התמרת לפלס	8.1
259	שמוש לבעיות התחלה	8.2
263	תכונות נוספות של התמרת לפלס	8.3
267	קונוולוציה	8.4
269	פונקציות מדרגה	8.5
272	"פונקצית" Dirac	8.6
277	תרגילים	8.7
279	נספח: מסלולי כוכבי הלכת	9
284	נספח: הערות היסטוריות	10
287	האותיות היווניות	
288	ביבליוגרפיה	
290	מפתח	

מבוא

רשימות אלה נערכו על פי הרצאות בקורסים אחדים של משואות דיפרנציאליות רגילות שלימדתי בטכניון לתלמידי פקולטות הנדסיות ומדעיות שונות.

מטרת הרשימות היא לשמש כלי עזר ללמוד עצמי. לפיכך ההסברים מפורטים ומוצגים באותו סגנון בו מרצה מדבר בפני כיתה. ניסיתי לנחש מהן הנקודות העדינות בהן יכול הלומד להתקל ולהכשל וניסינו להקדים רפואה למכה. דוגמאות ותרגילים מנחים פועלים באותה מגמה.

החומר המתואר כאן רחב ממה שנלמד בקורס סטנדרטי בן 28 שעות הרצאה. יש רמזים, הערות, מוטיווציות מועילות, הסברים מדוע נעשה כך ולא אחרת. כשיש גישות אלטרנטיביות לנושא, תארתי לעיתים את שתיהן. כללו של דבר, כל אותן תוספות שמרצה היה רוצה לומר אך אינו מספיק בקורס שממדיו נקצבים על ידי מגבלות הזמן. והזמן, כידוע, לעולם אינו מספיק.

פתרון משואות דיפרנציאליות כרוך בעבודה טכנית שגרתית. בספר זה ניסיתי להוסיף לזה את הרעיונות המסתתרים מאחרי הקלעים, משהו מן האינטואיציה המאפשרת להבין את ההתנהגות האיכותית של משואות ופתרונותיהן וגם קצת מן היופי שבהבנה "כיצד פועל יצור זה הנקרא משואה דיפרנציאלית?"

אני מודה לפרופ' יהודה פינצ'ובר ולדר' לידיה פרס הרי על הערותיהם המועילות על כתב היד של ספר זה. אני מודה לטכניון - מכון טכנולוגי לישראל על תמיכתו בהוצאתו לאור של ספר זה.

אורי אליאש

חיפה, תשס"ט

במהדורה השניה תוקנו טעויות דפוס, שופרו הסברים אחדים ונוספו תרגילים רבים בכל פרקי הספר.

תשע"ו

טעות לעולם חוזרת. אם מצאת שגיאה בספר, אנא הודע על כך למחבר בכתובת

elias@technion.ac.il