משוואות דיפרנציאליות רגילות

אורי אליאש

משוואות דיפרנציאליות רגילות

אורי אליאש

הפקולטה למתמטיקה - הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל

עדכון 18 בדצמבר 2023

מותר להעתיק ולהפיץ ספר זה בתנאי שישמש למטרות לימוד והוראה
ויועתק במלואו ללא שינוי כלשהו. אין להשתמש בספר למטרות מסחריות.

הקדמה

רשימות אלה נערכו על פי הרצאות שניתנו בקורס משוואות דיפרנציאליות רגילות לתלמידי הפקולטה למתמטיקה בטכניון במשך שנים רבות.

מטרת הרשימות היא לשמש כלי עזר ללמוד עצמי. דוגמאות ותרגילים מנחים פועלים באותה מגמה.

החומר המתואר כאן רחב ממה שנלמד בקורס סטנדרטי של סמסטר אחד. נכללו כאן גישות אלטרנטיביות שונות לאותם נושאים, אשר נלמדו במועדים שונים. הקורא יכול לבחור את זו המועדפת עליו.

אורי אליאש

חיפה, תשע"ח – תשפ"ד

טעות — לעולם חוזר. אם מצאת שגיאה בספר, אנא הודע על כך למחבר בכתובת
elias@technion.ac.il

עותק מעודכן של הספר נמצא בכתובת
https://elias.net.technion.ac.il/he/ode/

.

תוכן עניינים

1 מבוא **1**

1.1 מהי משוואה דיפרנציאלית רגילה? 1

1.2 דוגמאות ומודלים 2

1.3 מטרות בלימוד משוואות דיפרנציאליות 5

2 משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון **6**

2.1 שדה כיוונים 6

2.2 משוואות ניתנות להפרדה 9

2.3 משוואות לינאריות מסדר ראשון 11

2.4 פתרון על ידי החלפת משתנים 14

2.5 משוואות מדויקות 18

2.6 גורמי אינטגרציה 21

2.7 משוואות דיפרנציאליות ומשפחות של עקומים 24

2.8 משוואות סתומות אחדות 29

3 משפטי קיום ויחידות **32**

3.1 מדוע נחוצים משפטים על קיום פתרונות 32

3.2 משפט הקיום של Cauchy-Peano 36

3.3 משפט הקיום והיחידות של Picard-Lindelöf 39

3.4 קיום של פתרון גלובלי 47

3.5 הוכחת קיום בעזרת העתקה מכווצת 49

3.6 משפט קיום למשוואות ממעלה גבוהה 52

3.7 הלמה של Gronwall 53
3.8 תלות פתרונות בפרמטר ובתנאי ההתחלה 56
3.9 שימושים ליחידות פתרון 59
3.10 חקירה איכותית של פתרונות 62
3.11 משוואות אוטונומיות מסדר ראשון 69
3.12 משוואות אוטונומיות מסדר שני 72

4 משוואות לינאריות מסדר כלשהו 77

4.1 משפט קיום ויחידות למשוואות לינאריות 77
4.2 משוואות לינאריות הומוגניות 79
4.3 הוורונסקיאן ותפקידיו 84
4.4 הורדת סדר משוואה 89
4.5 משוואות עם מקדמים קבועים 91
4.6 משוואת אוילר 95
4.7 משוואות לינאריות לא הומוגניות 97
4.8 פתרון על ידי השוואת מקדמים 105

5 משפטי שטורם וקיום ערכים עצמיים 110

5.1 משפטי Sturm 110
5.2 טרנספורמצית Prüfer 118
5.3 בעיות שפה וערכים עצמיים 121
5.4 תכונות של ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות 125
5.5 הוכחה נוספת לקיום ערכים עצמיים 127
5.6 טרנספורמציות שונות 130

6 מערכות של משוואות לינאריות 133

6.1 תכונות יסוד של מערכות לינאריות 133
6.2 מערכת לינארית הומוגנית ומבנה פתרונותיה 135
6.3 מערכת מטריצית ומטריצה יסודית 142
6.4 מערכות עם מקדמים קבועים 145

6.5 אקספוננציאל של מטריצה 149
6.6 צורת ז'ורדן 154
6.7 דוגמאות לפתרון מערכות עם מקדמים קבועים 159
6.8 מערכות מחזוריות ומשפט Floquet 162
6.9 מערכות בלתי הומוגניות 165

7 פתרון בעזרת טורי חזקות 168

7.1 טורי חזקות ושני משפטי קיום ויחידות 168
7.2 פתרון משוואות ליניאריות בעזרת טורי חזקות 172
7.3 נקודה סינגולרית רגולרית 177
7.4 פתרון בשיטת Frobenius 180
7.5 אינדקסים הנבדלים במספר שלם 184
7.6 משוואת בסל 188
7.7 פתרון שני למשוואת בסל 191
7.8 תכונות של פונקציות בסל 194

מפתח 197

פרק 1

מבוא

1.1 מהי משוואה דיפרנציאלית רגילה?

משוואה דיפרנציאלית רגילה (ordinary differential equation, o.d.e.) היא משוואה המקשרת בין פונקציה בלתי ידועה של משתנה אחד (הנעלם) ובין נגזרות אחדות שלו. במשוואה מעורבות בדרך כלל גם פונקציות מוכרות והמשתנה החפשי. סדר הנגזרת הגבוהה ביותר המופיעה במשוואה נקרא סדר (order) המשוואה הדיפרנציאלית. אם נסמן את הנעלם ב־$y(x)$ אז

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

היא משוואה דיפרנציאלית מסדר n. לדוגמא, $y' = 0$ היא משוואה דיפרנציאלית פשוטה ביותר מסדר ראשון ו־$x^2(y''')^7 + \sin(xy'' + y) - 17 = 0$ היא משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר שלישי. במקרים רבים נעדיף לחלץ את הנגזרת הגבוהה ביותר ולרשום את המשוואה מסדר n בצורה מנורמלת כ־

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\,).$$

אם הנעלם ונגזרותיו, $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$, מופיעים במשוואה הדיפרנציאלית אך ורק באופן לינארי, המשוואה נקראת לינארית. עבור משוואה לינארית מסדר n בנעלם $y(x)$ נהוג להבדיל בין משוואה לינארית הומוגנית

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

למשוואה לינארית בלתי הומוגנית

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x).$$

השמות "הומוגני" ו"בלתי הומוגני" שאובים מתוך מושגי אלגברה לינארית. המשתנה החפשי x יכול להופיע בצורה כלשהי במקדמי הנגזרות $a_0(x), a_1(x), \ldots$.

נעיר כי אם הנעלם הוא פונקציה של משתנים אחדים ובמשוואה מופיעות נגזרות חלקיות על פי משתנים אלה, אז מדובר במשוואה דיפרנציאלית חלקית. גם משוואה מהצורה $y'(x) = f(x, y(x), y(x-1))$ אינה נחשבת למשוואה דיפרנציאלית רגילה אלא זו משוואה דיפרנציאלית עם הפרש (delay differential equation). משוואות אלה אינן נדונות כאן.

אנו מתענינים גם במשוואות דיפרנציאליות עבור נעלמים אחדים. עבור n הנעלמים $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ אפשר להציג מערכת של n משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון,

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

1.2 דוגמאות ומודלים

נגזרת מתארת קצב שינוי, לכן חוקים פיסיקליים, תהליכים דינמיים, תהליכי feedback וכדומה מתוארים לרוב על ידי משוואות דיפרנציאליות. נביא כאן מספר דוגמאות.

דוגמא 1.1 מודלים של גידול אוכלוסיה

נסמן ב־ $N(t)$ את גודל האוכלוסיה (חידקים, בני אדם) בזמן t ונתיחס אליה כפונקציה שערכיה הם רצף של ערכים ממשיים. הנחה פשוטה ביותר היא כי ריבוי האוכלוסיה ליחידת זמן (dN/dt) הוא אחוז קבוע מגודל האוכלוסיה באותו זמן, דהיינו

$$\frac{dN}{dt} = kN(t), \tag{1.1}$$

כאשר k הוא קבוע חיובי. זו משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר ראשון.

כדי לעקוב אחרי גודל האוכלוסיה, עלינו גם לדעת את גודלה בתחילת המדידה. נניח כי ברגע התחלת התהליך $t = t_0$ גודל האוכלוסיה היה $N(t_0) = N_0$. נתון זה נקרא תנאי התחלה.

כדי לפתור את המשוואה (1.1), נניח לשם הנוחיות כי $N(t)$ הוא פתרון שאינו מתאפס, נחלק בו ונבצע אינטגרציה לפי t:

$$\int \frac{N'(t)}{N(t)}\, dt = \int k\, dt.$$

נקבל

$$\log |N(t)| = kt + \log c$$

בו $\log c$ מסמן קבוע אינטגרציה כלשהו. לבסוף נקבל כי $N(t) = Ce^{kt}$, C קבוע כלשהו. אוסף פתרונות זה תלוי בפרמטר יחיד C ונקרא פתרון כללי של המשוואה הדיפרנציאלית.

על ידי הצבה ישירה רואים כי תנאי ההתחלה $N(t_0) = N_0$ קובע ערך יחיד של C ו־ $N(t) = N_0 e^{k(t-t_0)}$ הוא הפתרון היחיד המקיים אף את תנאי ההתחלה.

המודל שהצענו למעלה פשטני מאד. בדרך כלל המשאבים מוגבלים וכל פרטי האוכלוסיה מתחרים אלה באלה. לכן נקבל קירוב יותר מתאים למציאות אם נחסיר מגידול האוכלוסיה כמות פרופורציונית למכפלה $N \times N$:

$$N'(t) = kN(t) - mN^2, \qquad k, m > 0.$$

אף משוואה זו היא מסדר ראשון, אך היא אינה לינארית. לשם הפשטות נסמן $L = k/m$ ומכאן ואילך נרשום את הבעיה כ־

$$\frac{dN}{dt} = kN\left(1 - \frac{N}{L}\right), \qquad N(t_0) = N_0\,, \tag{1.2}$$

k, L קבועים חיוביים. משוואה (1.2) הוצעה על ידי Verhulst[1] ונקראת המשוואה הלוגיסטית. בהמשך נשוב ונדון במודל זה.

דוגמא 1.2 התפרקות רדיואקטיבית

נסמן ב־$y(t)$ את מספר החלקיקים בדגימה בזמן t. מספר החלקיקים המתפרקים ביחידת זמן הוא אחוז קבוע מגודל הדגימה והדגימה הולכת וקטנה. לכן התהליך מתואר על ידי המשוואה הדיפרנציאלית ותנאי ההתחלה

$$\frac{dy}{dt} = -ky(t), \qquad y(t_0) = y_0, \tag{1.3}$$

כאשר $-k$ הוא קבוע שלילי.

דוגמא 1.3 מודל טורף־נטרף (predator-prey)

נתאר מערכת ביולוגית המורכבת משני מיני בעלי חיים, צמחוני וטורף. נסמן ב־$x(t)$ את כמות הצמחוניים וב־$y(t)$ את כמות הטורפים. ללא הטורפים, הצמחונים היו מתרבים כמו בדוגמא 1.1 לפי המשוואה $x'(t) = ax(t)$. ללא נוכחות צמחונים־נטרפים, הטורפים היו מתמעטים מחמת הרעב, ותהליך זה מתואר על ידי $y'(t) = -cy(t)$. האינטראקציה בין שני המינים נקבעת על ידי כמות המפגשים בין טורף לנטרף, אשר פרופורציוני למכפלה $x(t)y(t)$ ומפגשים אלה מסתיימים (בהסתברות מסוימת) בצמחוני שנטרף ובטורף שבע. לכן תרומת המפגשים שלילית לכמות הצמחונים וחיובית להתרבות הטורפים. המודל המתאר דינמיקה זו הוא מערכת שתי המשוואות מסדר ראשון

$$\begin{aligned} x'(t) &= \quad ax(t) - bx(t)y(t), \\ y'(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t), \qquad a, b, c, d > 0, \end{aligned}$$

ומכונה מערכת Volterra-Lotka[2].

[1] Pierre-Francois Verhulst, 1804-1849

[2] Alfred Lotka, 1880-1949, Vito Volterra, 1860-1940

דוגמא 1.4 מערכות מכניות

החוק השני של ניוטון הוא $ma = F$, ובו התאוצה a היא הנגזרת השניה של המיקום, $a = d^2u/dt^2$. לפיכך לפנינו משוואה דיפרנציאלית מסדר שני,

$$mu''(t) = F(t, u(t), u'(t)),$$

בה F מציין כוח התלוי בזמן, במקום הגוף ובמהירותו. לפיכך בעיות מכניות רבות מוליכות אותנו למשוואות דיפרנציאליות מסדר שני. תנועת הגוף תלויה כמובן במיקומו התחלי ובמהירותו ההתחלית, המתורגמים במושגי משוואות דיפרנציאליות לשני תנאי התחלה,

$$u(t_0) = u_0, \qquad u'(t_0) = u_1.$$

דוגמא 1.5 מטוטלת

גוף בעל מסה m תלוי בקצה חוט באורך L. זוית סטיתו מן האנך בזמן t מסומנת ב־$\theta(t)$. אורך הקשת שהגוף מצייר בתנועתו הוא $L\theta$, לכן שווי משקל כוחות בכיוון המשיק לתנועה (ראה איור 1.1) מוביל לשוויון

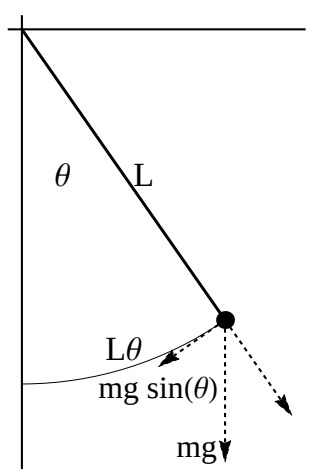
$$m(L\theta)'' = -mg\sin\theta,$$

ז"א

$$\theta'' = -\frac{g}{L}\sin\theta.$$

זו משוואה לא לינארית מסדר שני. עבור ערכי θ קטנים (תנודות קטנות) נהוג להעזר בקרוב $\sin\theta \approx \theta$ והמשוואה מוחלפת במשוואה לינארית מסדר שני,

$$\theta'' = -\frac{g}{L}\theta. \tag{1.4}$$



איור 1.1: מטוטלת

דוגמא 1.6 תנועת גוף המחובר לקפיץ

תהי מסה m מחוברת לקפיץ. לפי חוק Hooke, הכח המופעל על ידי הקפיץ המתוח פרופורציוני לסטיה $y(t)$ מנקודת שווי המשקל והפוך לו בכוונו, כלומר

$$my''(t) = -ky(t).$$

זו משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר שני הדומה למשוואה (1.4).

1.3 מטרות בלימוד משוואות דיפרנציאליות

בלימוד משוואות דיפרנציאליות אנו פונים לכיוונים אחדים.

1. פתרון משוואות דיפרנציאליות באופן מפורש. למרבה האכזבה מטרה זו אינה ניתנת להשגה ולרוב המשוואות הדיפרנציאליות אין אנו מסוגלים לרשום פתרונות מפורשים על ידי מספר סופי של פונקציות ופעולות מוכרות.

למרות האמור למעלה קיימות עדין מספיק משוואות שפתרונותיהן המפורשים ידועים. בין אלה נמנות מספר משוואות מסדר ראשון בעלות מבנה פשוט, משוואות לינאריות ומערכות של משוואות לינאריות בעלות מקדמים קבועים, אותן אפשר לפתור באופן שיטתי. אלה משוואות שימושיות הפותרות בעיות חיוניות ולכן חשוב לדעת לפתור אותן. משוואות אלה גם מהוות מלאי של דוגמאות. ולכן חלק ניכר מעבודתנו מוקדשת ללמוד שיטות פתרון.

2. חקירת קיום פתרון. מכיוון שאין אנו מסוגלים למצוא פתרון מפורש, נשתדל להוכיח כי (בהנחות מסוימות) למשוואה ותנאי ההתחלה המתאימים קיים פתרון, גם אם אין אנו יודעים לרשום אותו. מכיוון שני נלמד האם לבעיה יש פתרון אחד או יותר. נושא זה יעסיק אותנו בפרק "משפטי קיום ויחידות".

3. הבנה איכותית של המשוואה. נשתדל להבין את התנהגותם של פתרונות מבלי למצוא אותם במפורש, אלא אך ורק מתוך צורת המשוואה. שאלות אופייניות הן האם פתרון שואף לאינסוף, חסום או דועך לאפס, או מה מספר הפעמים שפתרון מסוים יכול להתאפס.

4. פתרון נומרי של משוואות. זו גישה חשובה, שמושית ומיושמת על ידי מחשבים, אך מקומה לא ברשימות אלה אלא בלמודי אנליזה נומרית.

פרק 2

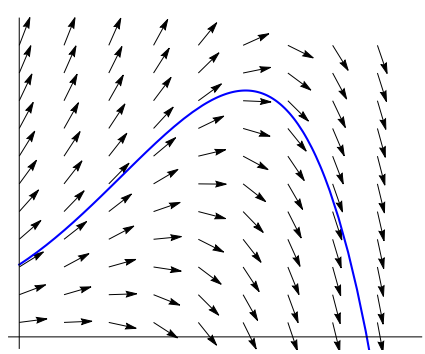
משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

2.1 שדה כיוונים

הצורה הכללית של משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון היא $F(x, y(x), y'(x)) = 0$. כשאפשר, נשתדל לחלץ את הנגזרת $y'(x)$ ולרשום את המשוואה בצורה מנורמלת כ־

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

למשוואה זו יש משמעות גיאומטרית: כאשר פתרון $y(x)$ עובר דרך נקודה (x, y), שיפוע הגרף שלו בנקודה זו הוא $y'(x)$ דהיינו $f(x, y)$. לפיכך נצייר לכן בכל נקודה (x, y) חץ ששיפועו $f(x, y)$ (אורך החץ חסר חשיבות). בצורה זו אנו מכסים את תחום ההגדרה של המשוואה ברצף של "חיצי כיוון" שנקרא שדה הכיוונים של המשוואה. ראה איור 2.1.



איור 2.1: דוגמא לשדה כיוונים ופתרון בעיית התחלה

מנקודת מבט גיאומטרית למצוא פתרון כללי למשוואה דיפרנציאלית פרושו למצוא משפחת עקומים המכסים את תחום ההגדרה כך שבכל נקודה נתונה (x, y) שיפוע העקום העובר שם מתאים לשיפוע הנדרש $f(x, y)$. פתרון בעיית התחלה פרושו למצוא עקום היוצא מנקודת ההתחלה הנתונה ובמהלך התקדמותו שיפועו נקבע על ידי שדה הכיוונים הנתון.

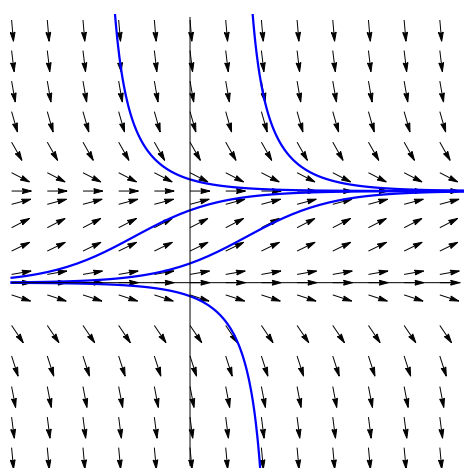
התועלת המרכזית שאנו מפיקים משדה כיוונים היא האפשרות להתרשם באופן חזותי מהתנהגות הפתרונות. יש לכך חשיבות רבה, כי כפי שכבר ציינו, רק לעיתים רחוקות אפשר למצוא את הפתרונות של משוואה דיפרנציאלית באופן מפורש. אפילו במקרים בהם הפתרונות ידועים במפורש, נוח להתבונן בתאור הגרפי שלהם, כי כידוע תמונה אחת שווה אלף נוסחאות. נציין גם כי את שדה הכיוונים תמיד אפשר לצייר, אף אם הפונקציה $f(x, y)$ מסובכת.

דוגמא 2.1 נצייר את שדה הכיוונים המתאים למשוואה הלוגיסטית (1.2),

$$N'(t) = kN\,(1 - N/L)\,, \qquad N(t_0) = N_0\,,$$

עבור $0 < N < L$, הנגזרת N' חיובית לכן בתוך פס אפקי זה כל פתרון עולה. כאשר בפס זה N קרוב ל־L או קרוב ל־0, אז השיפוע N' חיובי אך קטן ולכן כל פתרון עולה שם במתינות. לעומת זאת עבור $N > L$ ועבור $N < 0$, הנגזרת N' היא שלילית ובתחומים אלה כל הפתרונות יורדים.

בנוסף על כך, המשתנה t אינו מופיע במפורש באגף ימין של המשוואה, לכן אם $N(t)$ פתרון, גם כל הזזה שלו ימינה או שמאלה, $N(t + c)$, גם הוא פתרון. ראה איור 2.2.

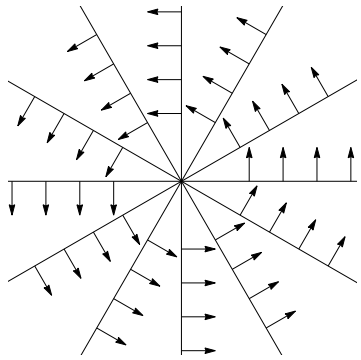


איור 2.2: שדה כיוונים ופתרונות אחדים של המשוואה הלוגיסטית

שיקולים אלה עוזרים לנחש את הצורה המקורבת של הפתרונות מבלי למצוא את הפתרונות באופן מפורש. אולם האיור אינו מגלה לנו למשל מה קורה "בסוף" לפתרון יורד בחצי המישור התחתון. שדה הכיוונים לבדו גם אינו מאפשר לנו להחליט האם פתרון שעולה לכיוון הישר

$N = L$ מגיע אליו בנקודה מסוימת או שמא הוא מתקרב אל הישר אך אינו נוגע בו לעולם. נשוב לשאלה זו ונענה עליה בעזרת משפט הקיום והיחידות בדוגמא 3.19. □

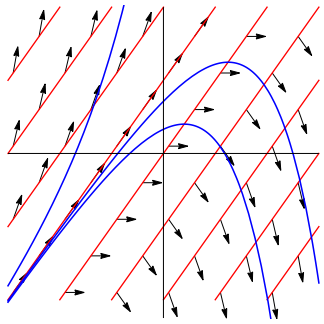
תרגיל 2.2 עבור המשוואה $y' = -x/y$ שיפוע שדה הכיוונים בנקודה (x, y) הוא $-x/y$ וכיוון זה מאונך לכיוון הישר המחבר את הנקודה לראשית. ראה איור 2.3. לאיזה עקומים יש תכונה זו ומהם פתרונות המשוואה? □



איור 2.3: שדה כיוונים של המשוואה $y' = -x/y$

דרך נוחה אחרת היא לצייר את חיצי שדה הכיוונים רק בנקודות נבחרות בהן לפתרונות יש שיפוע נתון. אוסף הנקודות בהן שדה הכיוונים הוא בעל שיפוע קבוע נתון, כלומר קו הגובה $f(x, y) = k$, נקרא איזוקלינה) שווה שיפוע - isocline).

דוגמא 2.3 האיזוקלינות של המשוואה $y' = y - x$ הם הישרים $y - x = k$, ובכל נקודות ישר כזה לשדה הכיוונים שיפוע קבוע k. באיור 2.4 מצוירות מספר איזוקלינות, שיפועי שדה הכיוונים המתאימים לכל איזוקלינה ופתרונות גרפיים אחדים.



איור 2.4: האיזוקלינות $y - x = -4, -3, \ldots, 3, 4$, כווני השדה ופתרונות גרפיים אחדים עבור המשוואה $y' = y - x$

נתחיל את הטיפול במשוואות דיפרנציאליות בהצגת שיטות פתרון אחדות המתאימות לכמה מקרים פשוטים.

2.2 משוואות ניתנות להפרדה

משוואה מסדר ראשון נקראת ניתנת להפרדה אם אגף ימין שלה הוא מכפלה של שתי פונקציות, האחת תלויה רק בנעלם והשניה תלויה רק במשתנה החפשי, כגון

$$y' = \frac{dy}{dx} = g(x)h(y). \tag{2.1}$$

נניח כי הפונקציה $y(x)$ היא פתרון וכי $h(y(x)) \neq 0$ בקטע מסוים, נחלק את שני אגפי המשוואה בגודל זה ונבצע אינטגרציה לפי המשתנה x:

$$\int \frac{y'(x)}{h(y(x))}\, dx = \int g(x)\, dx. \tag{2.2}$$

אם באינטגרציה (2.2) נבצע הצבה $y = y(x)$, $dy = y'(x)dx$, נקבל

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\, dx. \tag{2.3}$$

לשוויון זה נגיע גם כאשר נתיחס במשוואה (2.1) אל dy/dx באופן פורמלי כ"מנה" של dy ב־dx ונעבירם מאגף לאגף. אם $H(y), G(x)$ מסמנות פונקציות קדומות של $1/h(y), g(x)$ בהתאמה, אז

$$H(y) = G(x) + C, \tag{2.4}$$

וזו משפחה חד פרמטרית של פתרונות הרשומה בעזרת פונקציות סתומות.

אם נתון תנאי התחלה $y(x_0) = y_0$, נבצע אינטגרציה על קטע $[x_0, x]$ ונתחשב בתנאי ההתחלה:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{h(y)} = \int_{x_0}^{x} g(x)\, dx. \tag{2.5}$$

זהו

$$H(y) - H(y_0) = G(x) - G(x_0).$$

מכיון ש־$\frac{\partial}{\partial y}H(y_0) = 1/h(y_0) \neq 0$, המשוואה שלמעלה קובעת בסביבת x_0 פונקציה יחידה $y(x) = H^{-1}\big(H(y_0) + G(x) - G(x_0)\big)$ ולבעיית ההתחלה יש פתרון אחד ויחיד בקרבת נקודת ההתחלה.

טכניקת פתרון זה נקראת שיטת הפרדת המשתנים. בדוגמא 1.1 השתמשנו בשיטה זו מבלי לקרא לה בשם.

כזכור, הנחנו כי $h(y) \neq 0$. אם יש ערך y_0 כך ש־$h(y_0) = 0$, איננו יכולים לחלק ב־$h(y)$. אך גם אין צורך בכך, כי מהסתכלות ישירה במשוואה הדיפרנציאלית (2.1) מתברר כי הפונקציה הקבועה $y(x) \equiv y_0$ מהווה פתרון למשוואה. פתרון כזה נקרא פתרון יוצא דופן או פתרון סינגולרי.

אם $h(y_0) = 0$ והאינטגרל $\int dy/h(y)$ מתבדר בנקודה y_0, אז לבעיית ההתחלה $y(x_0) = y_0$ אין פתרון מהצורה (2.5) אלא רק הפתרון הסינגולרי הקבוע $y(x) \equiv y_0$. אך אם האינטגרל הנ"ל מתכנס, אז למשוואה יש גם הפתרון (2.5) וגם אינסוף פתרונות מהצורה

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{h(y)} = \int_{c}^{x} g(x)\, dx$$

לכל c. פתרון כזה, שנסמן ב־$y_c(x)$, עובר דרך נקודה (c, y_0) ומשיק שם לפתרון הסינגולרי הקבוע $y(x) \equiv y_0$. עבור כל $c > x_0$ ניתן "להדביק" פתרונות אלה יחד כ־

$$y(x) = \begin{cases} y_0 & x \leq c, \\ y_c(x) & x \geq c, \end{cases}$$

ולקבל כך משפחה אינסופית של פתרונות לבעיית ההתחלה $y(x_0) = y_0$. ראה למשל את דוגמא 3.2 ואיור 3.1.

תרגיל 2.4 מצא את כל פתרונות המשוואה $y' = xy^3$. וקבע את תחום ההגדרה של כל פתרון.

מקרה פרטי מעניין להפרדת משתנים הן משוואות ממעלה ראשונה שבהן אגף ימין לא תלוי במפורש במשתנה החפשי אלא בנעלם בלבד, דהיינו $y' = f(y)$. משוואה מסוג זה נקראת משוואה אוטונומית. (autonomous equation) אחת התכונות המענינות של משוואות אלה הוא כי אם $y(x)$ פתרון, גם כל הזזה שלו ימינה או שמאלה, $y(x + c)$, גם הוא פתרון. במשוואות אוטונומיות נדון בהמשך בסעיף 3.11.

דוגמא 2.5 בדוגמא 1.1 הצגנו את המשוואה הלוגיסטית (1.2),

$$\frac{dN}{dt} = kN\left(1 - \frac{N}{L}\right), \qquad N(t_0) = N_0\,,$$

כמודל של גידול אוכלוסיה. בעיה זו מוגדרת גם עבור $N(t),\ N_0$ שליליים, למרות שאין לכך משמעות במודל גידול האוכלוסיה. אפשר לפתור משוואה דיפרנציאלית זו בעזרת הפרדת משתנים, כי המשתנה t כלל אינו מופיע בה במפורש. בהנחה כי $N \neq 0, L$,

$$\int \frac{dN}{N(1 - N/L)} = \int k\, dt.$$

לאחר פרוק לשברים חלקיים נבצע אינטגרציה בין גבולות מסוימים

$$\int_{N_0}^{N} \left(\frac{1}{N} + \frac{1/L}{1 - N/L}\right) dN = \int_{t_0}^{t} k\, dt,$$

דבר המבטיח את קיום תנאי ההתחלה. מקבלים

$$\left[\ln|N| - \ln\left|1 - \frac{N}{L}\right|\right]\Bigg|_{N_0}^{N} = k(t - t_0).$$

נסלק את הערכים המוחלטים תוך הקפדה כי $N = N_0$ כאשר $t = t_0$:

$$\frac{1}{N} - \frac{1}{L} = \left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{L}\right) e^{-k(t-t_0)}.$$

לבסוף

$$N(t) = \frac{N_0}{N_0/L + (1 - N_0/L)\, e^{-k(t-t_0)}}. \tag{2.6}$$

אפשר להתיחס אל (2.6) גם כפתרון כללי אשר תלוי בפרמטר N_0. בנוסף לפתרונות אלה קיימים גם שני הפתרונות הסינגולריים $N(t) \equiv 0$ ו־$N(t) \equiv L$ המתאימים לתנאי ההתחלה $N(t_0) = L,\ N(t_0) = 0$. $\square$

2.3 משוואות לינאריות מסדר ראשון

נדון תחילה במשוואה לינארית, הומוגנית

$$\text{(H)} \qquad y' + p(x)y = 0 \tag{2.7}$$

ואחריה במשוואה לינארית, בלתי הומוגנית

$$\text{(NH)} \qquad y' + p(x)y = q(x). \tag{2.8}$$

המשוואות $N'(t) - kN(t) = 0$, $y'(t) + ky(t) = 0$ אשר הוצגו בדוגמא 1.1 ובדוגמא 1.2 הן משוואות לינאריות, הומוגניות מסדר ראשון.

המשוואה ההומוגנית (H) ניתנת להפרדה. בהנחה כי $y(x) \neq 0$, נחלק ב־$y(x)$ ונבצע אינטגרציה על פי x:

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\, dx = \int -p(x)\, dx.$$

מקבלים

$$\ln|y(x)| = -\int p(x)\, dx + \ln C,$$

כאשר $\ln C$ מייצג קבוע אינטגרציה כלשהו. לכן

$$|y(x)| = Ce^{-\int p(x)\, dx}.$$

נרשום $|y(x)| = \pm y(x)$ בהתאם אם $y(x)$ חיובי או שלילי, ונסמן $K = \pm C$. לסיום מתקבל

$$y(x) = Ke^{-\int p(x)\, dx}, \tag{2.9}$$

כאשר K קבוע שרירותי. אוסף פתרונות זה הוא הפתרון הכללי של המשוואה (H).

בשלבי הפתרון הנחנו כי $y(x) \neq 0$. כמו כן, בכתיבת קבוע האינטגרציה בצורה $\ln C$, מסתתרת ההנחה כי $C > 0$. אולם מבט חטוף במשוואה ההומוגנית מגלה כי $y(x) \equiv 0$ הוא פתרון סינגולרי! למעשה $y(x) \equiv 0$ הוא פתרון של כל משוואה לינארית הומוגנית, והוא ייקרא הפתרון הטריוויאלי. פתרון זה נכלל גם בנוסחת הפתרון הכללי (2.9) עבור הבחירה $K = 0$. לסיכום, למרות שבדרך אל הפתרון הנחנו מסיבות טכניות כי $y(x) \neq 0$, הרי בדיעבד קבלנו בתוך משפחת הפתרונות גם את הפתרון $y(x) \equiv 0$.

האם ייתכן פתרון של המשוואה (H) אשר מתאפס בנקודה אחת אך שונה מאפס בנקודות אחרות? על שאלה זו נענה בשלילה בפרק על משפט הקיום והיחידות.

תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$ והצבת $x = x_0,\ y = y_0$ קובעים ערך יחיד של K, לכן לבעיית ההתחלה יש פתרון יחיד. אפשר לפתור את בעיית ההתחלה גם באופן ישיר אם בשלב שלמעלה מחשבים אינטגרל מסוים

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = -\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx.$$

בחירה זו של גבולות האינטגרל מבטיחה באופן אוטומטי את קיום תנאי ההתחלה. בהמשך מקבלים

$$\ln|y| - \ln|y_0| = -\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx,$$

תוך התחשבות זהירה בתנאי ההתחלה אנו מסלקים את הערך המוחלט ומקבלים

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx}.$$

את המשוואה הבלתי הומוגנית

$$(NH) \qquad y' + p(x)y = q(x)$$

אי אפשר להעביר לצורה המתאימה להפרדה בין המשתנים. (נסה והווכח!). נחוצה אם כך שיטת פתרון אחרת. למרות שהבעיה פשוטה, נציע כאן שתי שיטות פתרון שבהן נפגוש בהמשך, בזמן פתרון משוואות ומערכות לא הומוגניות מסובכות יותר.

בשיטה הראשונה אנו ניגשים לפתרון על פי השיקול הבא: באגף שמאל של (NH) מופיעים y, y' אשר מופיעים גם בנגזרת של מכפלה:

$$(a(x)y(x))' = a(x)y'(x) + a'(x)y(x).$$

ננסה לכפול את שני אגפי (NH) בגורם בלתי ידוע, המסומן באופן מסורתי ב־$\mu(x)$[1],

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)\,y = \mu(x)q(x). \tag{2.10}$$

[1] μ - האות היוונית מיו, מקבילה ל־ m הלטינית

אנו שואפים שאגף שמאל יהפוך לנגזרת של מכפלה וכך תתאפשר לנו אינטגרציה של שני האגפים. ובאמת, אם בוחרים $\mu(x)$ כך שיקיים את השוויון $\mu(x)p(x) = \mu'(x)$, אז אגף שמאל של (2.10) יהפוך בדיוק ל־$\mu(x)y' + \mu'(x)y$, והמשוואה (2.10) תהפוך ל־

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)y' + \mu'(x)y = \mu(x)q(x),$$

שנוחה לאינטגרציה, כפי שרצוי לנו. אך הדרישה $\mu'(x) = \mu(x)p(x)$ היא בדיוק משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית שפתרנו לא מכבר. כמו למעלה נקבל

$$\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}\,dx = \int p(x)\,dx,$$

או $\ln|\mu(x)| = \int p(x)\,dx + C$. מכיון שדרושה לנו רק פונקציה יחידה $\mu(x)$, נבחר C כלשהו, למשל $C = 0$, ונקבל

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}.$$

גודל זה נקרא גורם האינטגרציה של (NH). יש לזכור כי גורם האינטגרציה שמצאנו מתאים למשוואה מנורמלת, בה מקדם y' הוא 1. נעיר כי מאחורי הצלחת השיטה מסתתרת הזהות

$$\frac{d}{dx}[\mu y] = \mu(x)\Big(y' + p(x)y\Big) - y\Big(-\mu' + p(x)\mu\Big) \tag{2.11}$$

ובחירת $\mu(x)$ כפתרון המשוואה $\mu' - p(x)\mu = 0$.

לאחר שמצאנו את גורם האינטגרציה $\mu(x)$, נכפול בו את שני אגפי (NH) ונקבל, כדרוש,

$$\Big(e^{\int p\,dx}y\Big)' = e^{\int p\,dx}y' + e^{\int p\,dx}p(x)y = e^{\int p\,dx}q(x).$$

לאחר אינטגרציה לפי x,

$$e^{\int p\,dx}y = \int \Big(e^{\int p\,dx}q(x)\Big)\,dx + C$$

ולבסוף מתקבל פתרון כללי למשוואה (NH),

$$y(x) = e^{-\int p\,dx}\int \Big(e^{\int p\,dx}q(x)\Big)\,dx + Ce^{-\int p\,dx}. \tag{2.12}$$

אם הפונקציות $p(x), q(x)$ רציפות בקטע $a \le x \le b$, אז גם כל הפתרונות מוגדרים באותו קטע.

שיטת הפתרון השניה משתמשת בדרך מחשבה אחרת. כזכור, הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית הוא מהצורה $Ce^{-\int p(x)\,dx}$, כאשר C פרמטר קבוע כלשהו. ננסה למצוא פתרון למשוואה הבלתי הומוגנית בצורה

$$y(x) = c(x)e^{-\int p(x)\,dx},$$

כאשר $c(x)$ פונקציה בלתי ידועה. (אגב, כל פונקציה $f(x)$ ניתנת להצגה בצורה $f(x) = c(x)e^{-\int p\,dx}$ עבור $c(x)$ מתאים, כי כל אקספוננציאל שונה מ־0, ואפשר לחלק בו.

בפרט נכון הדבר לפתרון המבוקש שלנו). בגלל רעיון החלפת הפרמטר הקבוע C בפונקציה $c(x)$ נקראת שיטה זו בשם שיטת וריאצית הפרמטר.

עתה נווכח ביעילות השיטה. נציב

$$y(x) = c(x)e^{-\int p\,dx}, \quad y'(x) = c'(x)e^{-\int p\,dx} + c(x)(-p(x))e^{-\int p\,dx}$$

לתוך המשוואה $y' + p(x)y = q(x)$ ונקבל

$$\left(c'(x)e^{-\int p\,dx} + c(x)(-p(x))e^{-\int p\,dx}\right) + p(x)c(x)e^{-\int p\,dx} = q(x).$$

לאחר צמצום נשאר

$$c'(x) = e^{\int p\,dx}q(x)$$

ובעזרת אינטגרציה,

$$c(x) = \int e^{\int p\,dx}q(x)\,dx + C.$$

לפיכך הפתרון המבוקש $y(x) = c(x)e^{-\int p\,dx}$ הוא בדיוק כפי שמצאנו ב־(2.12).

לפתרון הכללי (2.12) של (NH) יש מבנה אופייני: המחובר $Ce^{-\int p}$, הוא בדיוק הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית (H) והמחובר השמאלי הוא פתרון פרטי אחד של המשוואה הבלתי הומוגנית (NH), זה המתאים לבחירה $C = 0$. לפיכך כל פתרון של (NH) מורכב מפתרון פרטי אחד של (NH) בתוספת כל הפתרונות של (H). במבנה זה,

$$y_{NH} = y_p + y_H,$$

עקרון דומה קיים במערכות משוואות אלגבריות לינאריות ונפגוש בו גם בפתרון משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר כלשהו.

2.4 פתרון על ידי החלפת משתנים

לעיתים אפשר לפשט משוואה דיפרנציאלית על ידי הצבה, דהיינו, החלפת משתנים. נביא כאן כמה דוגמאות.

משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון נקראת משוואה מטיפוס הומוגני אם היא מהצורה

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.13}$$

השם "הומוגני" אינו קשור למושג "משוואה לינארית הומוגנית" מן האלגברה הלינארית אלא למושג "פונקציה הומוגנית" באנליזה. כזכור, פונקציה $f(x,y)$ נקראת הומוגנית ממעלה h אם $f(tx,ty) = t^h f(x,y)$ לכל $t \neq 0$. ואמנם, $F(y/x)$ באגף ימין של המשוואה (2.13) הוא פונקציה הומוגנית ממעלה 0.

נציב $z = y/x$, כלומר נחליף את הנעלם המקורי $y(x)$ בנעלם חדש $z(x) = y(x)/x$. נגזור את $y(x) = xz(x)$ לפי x ואת התוצאה $y'(x) = xz'(x) + z(x)$ נציב במשוואה המקורית, (2.13):

$$xz'(x) + z = F(z).$$

אך המשוואה

$$\frac{dz}{dx} = \frac{F(z) - z}{x} \tag{2.14}$$

מתאימה להפרדת משתנים ובתנאי ש־ $F(z) - z \neq 0$, פתרונה הוא

$$\int \frac{dz}{F(z) - z} = \int \frac{dx}{x},$$

כלומר $G(z) = \ln|x| + C$. בזה קבלנו פתרון כללי שנתון על ידי פונקציה סתומה ותלוי בפרמטר יחיד C. נותר רק לחזור לנעלם המקורי y.

אם $F(z) - z$ מתאפס עבור $z = z_0$, אז $z(x) \equiv z_0$ מקיים את משוואה (2.14) והוא פתרון סינגולרי. הישר $y(x) = z_0 x$ פתרון של המשוואה המקורית.

דוגמא 2.6 נתונה המשוואה

$$y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}.$$

ההצבה $y = xz$, $y' = xz' + z$ מוליכה ל־ $xz' + z = z^2 + 2z$ או

$$x\frac{dz}{dx} = z^2 + z,$$

שפתרונה על ידי הפרדת המשתנים הוא

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{z^2 + z} = \int \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right) dz, \quad z \neq 0, -1.$$

לכן

$$\ln|x| = \ln|z| - \ln|z+1| + \ln C,$$

$$x = \frac{z}{z+1} C = \frac{Cy/x}{y/x + 1} = \frac{Cy}{y + x},$$

ופתרון כללי, חד פרמטרי הוא

$$y = \frac{Cx^2}{1 - Cx}. \tag{2.15}$$

לפתרון הסינגולרי $z(x) \equiv 0$ מתאים $y_1(x) \equiv 0$, והפתרון הסינגולרי $z(x) \equiv -1$ מוביל אל $y_2(x) = -x$. במקרה זה, הפתרון הסינגולרי $y_1(x) \equiv 0$ כלול בפתרון הכללי ומתאים לפרמטר $C = 0$. $\square$

גם המשוואה הבאה ניתנת לפתרון על ידי הצבה מתאימה.

דוגמא 2.7 נתבונן במשוואה

$$y'(x) = f(ax + by + c)$$

בה $f(\ )$ פונקציה נתונה של משתנה יחיד ו־a, b, c קבועים. הפעם נחליף את הנעלם $y(x)$ בנעלם חדש $v(x)$ על ידי $v = ax + by + c$, דהיינו $v(x) = ax + by(x) + c$, $v'(x) = a + by'(x)$. המשוואה הופכת ל־

$$\big(v'(x) - a\big)/b = f(v)$$

וזו נפתרת על ידי הפרדת משתנים

$$\int \frac{dv}{a + bf(v)} = \int dx \ . \qquad \square$$

דוגמא 2.8 (משוואת Bernoulli) המשוואה $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$, עם $\alpha \neq 0, 1$, נקראת משוואת ברנולי על שם יעקב (ז'ק) ברנולי.[2] (מדוע הוצאו $\alpha = 0, 1$ מן הדיון ?) המשוואה הלוגיסטית היא מקרה פרטי עם $\alpha = 2$. נחלק ב־$y^\alpha \neq 0$ ונקבל

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

ההצבה $v(x) = y(x)^{1-\alpha}$, $v'(x) = (1-\alpha)y(x)^{-\alpha}y'(x)$, הופכת משוואה זו למשוואה הלינארית

$$\frac{1}{1-\alpha}\, v'(x) + p(x)v = q(x)$$

הנוחה לפתרון. מכאן נשוב אל $y(x) = v(x)^{1/(1-\alpha)}$. אם $\alpha > 0$, אז גם $y(x) \equiv 0$ הוא פתרון סינגולרי. $\square$

המשוואה הלוגיסטית שפתרנו בדוגמא 5.2 בשיטת הפרדת המשתנים היא גם משוואת ברנולי עם $\alpha = 2$. בדוק כי ההצבה $u = 1/N$ הופכת אותה למשואה לינארית ומצא בדרך זו את הפתרון (2.6).

דוגמא 2.9 (משוואת Riccati) משוואה מהצורה

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \tag{2.16}$$

נקראת משוואת ריקטי *(Riccati)*.[3] ריקטי טיפל רק במקרה פרטי של משוואה זו, והיא $y' = ay^2 + bx^m$. כאשר $P(x) \equiv 0$, המשוואה (2.16) הופכת למשוואת ברנולי. אנו נדון בהצבות הקשורות במשוואת ריקטי, המענינות למרות שאין הן מבטיחות מציאת פתרון מפורש שלה.

[2] Jacob (James, Jacques) Bernoulli, 1654-1705
[3] Jacopo Francesco Riccati, 1676-1754

א. אם ידוע לנו פתרון אחד של (2.16), למשל $y_1(x)$, אנו יכולים למצוא את כל הפתרונות בעזרת החלפת המשתנים $y = z + y_1(x)$. ואמנם, נקבל

$$z' + y_1' = P + Q(z + y_1) + R(z^2 + 2y_1 z + {y_1}^2)$$

ומכיון ש־$y_1(x)$ פתרון ומקיים $y_1' = P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2$, ניוותר עם המשוואה $z' = (Q + 2Ry_1)z + Rz^2$ שהיא משוואת ברנולי.

ב. ההצבה $y = -\dfrac{z'}{Rz}$ הופכת את (2.16) ל־

$$\left(-\frac{z'}{Rz}\right)' = P + Q\left(-\frac{z'}{Rz}\right) + R\left(-\frac{z'}{Rz}\right)^2.$$

לאחר צמצום וארגון מחדש נשארת לנו המשוואה

$$z'' + (-Q - R'/R)z' + PRz = 0,$$

שהיא משוואה לינארית, הומוגנית מסדר שני. כפי שנראה בהמשך, לפי משפט 4.4, בפרק 4.2, פתרון כללי של משוואה כזו הוא מהצורה $c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x)$, כאשר $z_1(x), z_2(x)$ הם שני פתרונות ו־c_1, c_2 הם קבועים שרירותיים. לפיכך פתרון משוואת ריקטי הוא מהצורה

$$y = -\frac{c_1 z_1'(x) + c_2 z_2'(x)}{R(x)\big(c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x)\big)}.$$

אם נסמן $c = c_2/c_1$, נראה כי הפתרון תלוי רק בפרמטר שרירותי אחד, וצורתו

$$y = -\frac{z_1'(x) + c z_2'(x)}{R(x)\big(z_1(x) + c z_2(x)\big)}.$$

בדוגמא 2.13 נראה בכיוון ההפוך כי כל משפחת פונקציות מצורה זו היא פתרון של משוואת ריקטי מתאימה. □

דוגמא 2.10 המשוואה $(y^2 - x)\dfrac{dy}{dx} - y = 0$ אינה פתירה על ידי אף אחת מהשיטות שהוזכרו לעיל. אך אם נחליף את תפקידי המשתנים ונסתכל על x כפונקציה של המשתנה y, $x = x(y)$, אז הודות לזהות $\dfrac{dy}{dx} = 1\Big/\dfrac{dx}{dy}$ המשוואה הופכת ל־ $(y^2 - x) - y\dfrac{dx}{dy} = 0$. זו משוואה לינארית

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x(y) = y$$

עבור $x(y)$. בדרך זו איבדנו כמובן את הפתרון $y(x) \equiv 0$. □

2.5 משוואות מדויקות

לעיתים יש תועלת לרשום משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון $y' = f(x,y)$ בצורה

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{2.17}$$

ולהציגה כ־

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \tag{2.18}$$

דבר המדגיש את הסימטריה בתפקידי y, x ומאפשר לנו לחפש פתרון באחת הצורות $y = y(x),\ x = x(y)$ או פונקציה סתומה של x, y.

משוואות מהצורה (2.17) מתקשרות גם למערכת של שתי משוואות

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \ Q(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= -P(x,y), \end{aligned} \tag{2.19}$$

שבהן המשתנה החפשי t אינו מופיע במפורש באגף ימין. מערכות כאלה נקראות מערכות אוטונומיות. ואמנם, אם זוג הפונקציות $(x(t), y(t))$ הוא פתרון המערכת (2.19) אז

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = -P(x,y)/Q(x,y).$$

המשוואה (2.18) קשורה באופן הדוק למושג שדה משמר מהחשבון הדיפרנציאלי. נצטט כאן את ההגדרות והטענות הרלוונטיות.

שדה וקטורי 2־ממדי $\big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ נקרא שדה משמר בתחום $D \subset R^2$ אם לכל עקום γ המוכל בתחום D, ערך האינטגרל

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

לאורך העקום γ בלתי תלוי בבחירת העקום אלא רק בקצותיו. נזכיר כי אם לעקום תאור פרמטרי $x = x(t),\ y = y(t)$, $a \le t \le b$, אז האינטגרל שלמעלה משמעותו

$$\int_a^b \left(P(x(t),y(t))\,\frac{dx}{dt} + Q(x(t),y(t))\,\frac{dy}{dt} \right) dt.$$

משפט 2.1 אם $P(x,y), Q(x,y)$ בעלי נגזרות חלקיות רציפות בתחום פשוט קשר (תחום "ללא חורים") D, אז שלושת התנאים הבאים שקולים:

א. השדה $\big(P(x,y),Q(x,y)\big)$ משמר,

ב. $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ בתחום D,

ג. קיימת ב־D פונקציית פוטנציאל $F(x,y)$ כך ש־

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y),\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y), \tag{2.20}$$

כלומר $\big(P(x,y),Q(x,y)\big)=\vec{\nabla}F(x,y)$.

לאחר הקדמה זו, נרשום את המשוואה 2.18 (או את המשוואה 2.17) בצורה שקולה כ־

$$P(x,y)+Q(x,y)\,\frac{dy}{dx}=0, \tag{2.21}$$

הרומזת לחיפוש פתרון $y=y(x)$. אם מתקיים התנאי $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ (כלומר $\big(P,Q\big)$ הוא שדה משמר) ו־$F(x,y)$ הוא הפוטנציאל המתאים, אז לפי כלל השרשרת אפשר לכתוב את המשוואה (2.21) בצורה

$$P(x,y)+Q(x,y)\,\frac{dy}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}F(x,y(x))=0.$$

לכן $y(x)$ פתרון של (2.18) אם ורק אם $F(x,y(x))\equiv\text{const}$. במצב זה (2.18) נקראת משוואה מדויקת. נהוג לרשום בכתיב של דיפרנציאלים

$$P\,dx+Q\,dy=F_x\,dx+F_y\,dy=dF$$

ולכנותו בשם "הדיפרנציאל השלם של F". לסיכום:

משפט 2.2 אם $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ בתחום פשוט קשר ולשדה $\big(P(x,y),Q(x,y)\big)$ מתאים פוטנציאל $F(x,y)$, אז למשוואה המדויקת $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ יש פתרון כללי שאפשר לרשום בצורה סתומה כ־$F(x,y)=c$.

נוח למצוא את פונקציית הפוטנציאל על ידי פתרון זוג המשוואות (2.20). תחילה נבצע אינטגרציה של המשוואה הראשונה, $F_x=P(x,y)$, על פי x. קבוע האינטגרציה יהיה קבוע מבחינת x אך לאו דווקא מבחינת y, לכן

$$F(x,y)=\int P(x,y)\,dx+h(y),$$

כאשר $h(y)$ פונקציה בלתי ידועה של המשתנה y בלבד. נגזור זאת לפי y ונ שווה למשוואה השניה מתוך (2.20), $F_y=Q(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\int\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx+h'(y)=Q(x,y),$$

דהיינו

$$h'(y) = Q(x,y) - \int \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\, dx. \tag{2.22}$$

אגף ימין של (2.22) תלוי לכאורה במשתנה x, בעוד שאגף שמאל בלתי תלוי בו. אולם זו מראית עין בלבד, כי הודות להנחה $P_y = Q_x$, אגף ימין של (2.22) מקיים

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x,y) - \int \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\, dx\right) = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \equiv 0$$

ולא תלוי ב־x. לכן $h(y)$ מתקבל על ידי אינטגרציה של (2.22) לפי y. בזה הושלמה קביעת פונקציית הפוטנציאל $F(x,y)$.

הערה. נדגיש כי הפונקציה של שני משתנים $F(x,y)$ איננה "פתרון" למשוואה (2.18), אלא הקשר $F(x,y) = c$ מגדיר משפחת פתרונות $y = y(x,c)$.

דוגמא 2.11 המשוואה

$$(3x^2y + 8xy^2)\, dx + (x^3 + 8x^2y + 12y^2)\, dy = 0$$

מקיימת

$$(3x^2y + 8xy^2)_y = 3x^2 + 16xy = (x^3 + 8x^2y + 12y^2)_x,$$

לכן נחפש פונקציית פוטנציאל $F(x,y)$ כך ש־

$$\begin{aligned} F_x &= 3x^2y + 8xy^2 \\ F_y &= x^3 + 8x^2y + 12y^2 \end{aligned}$$

מאינטגרציה של המשוואה הראשונה לפי x נובע

$$F(x,y) = \int (3x^2y + 8xy^2)\, dx = x^3y + 4x^2y^2 + h(y),$$

נגזור לפי y ונ שווה ל־ $Q(x,y)$:

$$F_y(x,y) = x^3 + 8x^2y + h'(y) = x^3 + 8x^2y + 12y^2$$

ונקבל $h(y) = 4y^3,\ h'(y) = 12y^2$. לפיכך פונקציית הפוטנציאל היא

$$F(x,y) = x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3$$

ופתרון כללי למשוואה הדיפרנציאלית נתון על ידי הפונקציה הסתומה

$$x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3 = C. \qquad \square$$

2.6 גורמי אינטגרציה

נתונה משוואה דיפרנציאלית $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ שאינה מדויקת, דהיינו התנאי $P_y = Q_x$ אינו מתקיים. האם אפשר לכפול משוואה זו בפונקציה מתאימה $\mu(x,y) \neq 0$ כך שהמשוואה המתקבלת

$$\mu(x,y)P(x,y)\,dx + \mu(x,y)Q(x,y)\,dy = 0$$

תהיה מדויקת? אם קיים $\mu(x,y)$ כזה, הוא ייקרא גורם אינטגרציה (integrating factor). התנאי לכך הוא כמובן

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(x,y)P(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(x,y)Q(x,y)\Big),$$

דהיינו

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}\,Q(x,y) - \frac{\partial \mu}{\partial y}\,P(x,y) + \mu(x,y)(Q_x - P_y) = 0. \tag{2.23}$$

זו משוואה דיפרנציאלית חלקית מסדר ראשון, לינארית והומוגנית ב־μ. לרוע המזל מתברר בלימוד משוואות חלקיות כי פתירת (2.23) שקולה לפתירת המשוואה המקורית. מהי, אם כן, התועלת המעשית שלנו בחפוש גורם אינטגרציה? למרות זאת אנו מתענינים בשאלה כי יש מקרים בהם אפשר למצוא גורם אינטגרציה פשוט ולנצל אותו לפתירת המשוואה הנתונה.

דוגמא 2.12 מתי יש גורם אינטגרציה התלוי במשתנה x בלבד? אם קיים $\mu = \mu(x)$ בלתי תלוי ב־y, המשוואה החלקית (2.23) הופכת למשוואה הרגילה

$$\frac{d\mu}{dx}\,Q(x,y) + \mu(x)(Q_x - P_y) = 0,$$

דהיינו

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)}.$$

מכיוון שאגף שמאל בלתי תלוי ב־y, זה יתכן רק אם גם אגף ימין לא יכיל את y. לכן קיים גורם אינטגרציה $\mu = \mu(x)$ אם ורק אם הביטוי $(P_y - Q_x)/Q$ בלתי תלוי ב־y.

למשל, עבור המשוואה $(3y^4 - 7x^4y^2)\,dx + (4xy^3 - 2x^5y)\,dy = 0$ מתקבל

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{(12y^3 - 14x^4y) - (4y^3 - 10x^4y)}{4xy^3 - 2x^5y} = \frac{2}{x},$$

לכן $\ln\mu(x) = 2\ln x$, $\mu(x) = x^2$. (לא הוספנו קבוע אינטגרציה שרירותי כי אין לנו צורך ביותר מגורם אינטגרציה אחד). נכפול את המשוואה ב־ $\mu(x) = x^2$, ונקבל

$$(3x^2y^4 - 7x^6y^2)\,dx + (4x^3y^3 - 2x^7y)\,dy = 0.$$

זו משוואה מדויקת ולה פתרון כללי $x^3y^4 - x^7y^2 = C$. $\square$

באופן דומה אפשר למצוא גורם אינטגרציה $\mu = \mu(y)$, התלוי במשתנה y בלבד על ידי פתרון

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{Q_x(x,y) - P_y(x,y)}{P(x,y)},$$

בתנאי שאגף ימין יהיה בלתי תלוי ב־x.

למשוואה לא מדויקת (2.18) ייתכנו גורמי אינטגרציה רבים. נתבונן למשל במשוואה

$$y\,dx - x\,dy = 0 \tag{2.24}$$

שאינה מדויקת כי $P_y = 1,\ Q_x = -1$. כפל בגורם האינטגרציה $\mu_1 = y^{-2}$ הופך אותה למשוואה המדויקת

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

שפתרונה הכללי הוא $F_1(x,y) = x/y = c$. גורם אינטגרציה אחר הוא $\mu_2 = 1/xy$ ובעזרתו נקבל כי

$$\mu_2(P\,dx + Q\,dy) = \frac{y\,dx - x\,dy}{xy} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = d(\ln x - \ln y) = 0$$

ופתרון כללי מתאים $F_2(x,y) = \ln(x/y) = c$. דוגמא שלישית לגורם אינטגרציה הוא $\mu_3 = 1/(x^2+y^2)$, שבעזרתו נקבל

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = d\left(-\arctan(y/x)\right) = 0$$

ופתרון כללי $F_3(x,y) = \arctan(y/x) = c$.

בדומה לדוגמאות אלה, אם $F(x,y) = c$ פתרון כללי של משוואה (2.18) ו־$h \in C^1$, $h' \neq 0$, אז גם $h(F(x,y)) = c$ הוא פתרון כללי של אותה משוואה. כי $y(x)$ המוגדר על ידי הפונקציה הסתומה $F(x,y) = c$ מקיים $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$ ובהיותו פתרון של (2.18), גם $\frac{dy}{dx} = -\frac{Q}{P}$, לכן $\frac{F_x}{F_y} = \frac{Q}{P}$. לפיכך אף הפונקציה y המוגדרת על ידי $h(F(x,y)) = c$ מקיימת

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{h'(F)F_x}{h'(F)F_y} = -\frac{Q}{P}\ .$$

ובכיוון ההפוך, יהיו $F(x,y) = c$, $G(x,y) = c$ שני פתרונות כללים של (2.18). אז $\frac{F_x}{F_y} = \frac{Q}{P}$, $\frac{G_x}{G_y} = \frac{Q}{P}$ כלומר $\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} = 0$. נראה כי אם בסביבת נקודה (x_0,y_0), המטריצה $\begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix}$ מדרגה 1, אז $F(x,y), G(x,y)$ תלויות פונקציונלית.

נניח למשל כי $F_y(x_0,y_0) \neq 0$ ונתבונן במשוואה $F(x,y) - z = 0$. על פי משפט הפונקציות הסתומות אפשר לחלץ $y = \phi(x,z)$, $\phi \in C^1$. נחשב את הנגזרת

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x,\phi(x,z)) = G_x + G_y\frac{-F_x}{F_y} = -\frac{1}{F_y}\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} = 0$$

לכן $G(x,\phi(x,z))$ תלוי רק ב־z ונסמן אותו כ־ $G(x,\phi(x,z)) \equiv h(z)$. לבסוף נשוב ונציב $z = F(x,y)$, $y = \phi(x,z)$ ונקבל את התלות הפונקציונלית

$$G(x,y) = h(F(x,y)).$$

נראה מספר קשרים בין גורמי אינטגרציה ופתרונות כללים.

משפט 2.3 א. אם $\mu_1(x,y)$ גורם איטגרציה של (2.18) ו־$F(x,y) = c$ פתרון כללי אז גם $\mu_2(x,y) = \mu_1(x,y)F(x,y)$ גורם אינטגרציה.
ב. אם $\mu_1(x,y), \mu_2(x,y)$ שני גורמי אינטגרציה ומגדירים $F(x,y) \equiv \mu_2(x,y)/\mu_1(x,y)$, אז גם $F(x,y) = c$ הוא פתרון כללי.

הוכחה. א. כדי להוכיח כי $\mu_1 F$ מהווה גורם אינטגרציה ל־(2.18) יש לאמת כי

$$(\mu_1 F \cdot P)_y = (\mu_1 F \cdot Q)_x \ .$$

כלומר $F_y \cdot \mu_1 P + F(\mu_1 P)_y = F_x \cdot \mu_1 Q + F(\mu_1 Q)_x$. נרשום זאת בצורה

$$F\big[(\mu_1 P)_y - (\mu_1 Q)_x\big] = \mu_1\big[F_y P - F_x Q\big].$$

ואכן, אגף שמאל מתאפס כי $(\mu_1 P)_y = (\mu_1 Q)_x$ בשל היות μ_1 גורם אינטגרציה; ואגף ימין מתאפס כי ראינו ש־$F_y/F_x = P/Q$. בזה הוכחה הטענה. מכאן אנו מסיקים כי גם $\mu_1(x,y)h(F(x,y))$ הוא גורם אינטגרציה.

ב. בכיוון ההפוך נגדיר $F(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_2(x,y)/\mu_1(x,y)$. מכיון ש־$\mu_2 = F(x,y)\mu_1(x,y)$ הוא גורם אינטגרציה, הוא מקיים

$$(F\mu_1 \cdot P)_y = (F\mu_1 \cdot Q)_x$$

וכמו למעלה, נכתוב זאת כ־

$$F\big[(\mu_1 P)_y - (\mu_1 Q)_x\big] = \mu_1\big[F_y P - F_x Q\big].$$

מכיון שגם μ_1 גורם אינטגרציה, אגף שמאל מתאפס, ומהתאפסות אגף ימין נסיק כי $-F_x/F_y = -P/Q$. אך פתרון $y(x)$ של (2.18) מקיים $y' = -P/Q$ ולכן גם $y' = -F_x/F_y$. מכאן נובע כי

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = F_x + F_y\, y' = 0$$

כלומר $F(x,y(x)) = c$, פתרון כללי, כדרוש. $\square$

2.7 משוואות דיפרנציאליות ומשפחות של עקומים

בדוגמאות אחדות שבהם פגשנו בפרק זה ראינו כי הפתרון הכללי של משוואה מסדר ראשון תלוי בפרמטר אחד ולכן מיוצג באופן גרפי על ידי משפחת עקומים חד־פרמטרית. בהמשך נדון במשפטי קיום ויחידות המראים כי בתנאים מתאימים לכל תנאי התחלה של משוואה מסדר ראשון מתאים בדיוק פתרון אחד ולכן אוסף הפתרונות הוא אכן משפחה חד־פרמטרית.

גם הכיוון ההפוך נכון בדרך כלל ומשפחה חד־פרמטרית של עקומים היא אוסף פתרונות של משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון. תהי למשל $F(x,y,c)=0$ משפחת עקומים התלויה בפרמטר c. נניח כי פונקציה סתומה זו מגדירה $y=y(x,c)$, נגזור לפי x ונקבל שתי משוואות

$$\begin{aligned} &F(x,y,c)=0,\\ &F_x+F_y\,y'=0. \end{aligned}$$

נחלץ, אם אפשר, את הפרמטר c מאחת המשוואות ונציב בשניה. בצורה זו נקבל קשר בין הגדלים x,y,y' שאינו תלוי בפרמטר c. זו המשוואה הדיפרנציאלית המבוקשת.

באופן דומה אפשר לטפל במשפחה n־פרמטרית של עקומים מישוריים,

$$F(x,y,c_1,c_2,\ldots,c_n)=0.$$

נגזור n פעמים בעזרת כלל השרשרת:

$$\begin{aligned} &F_x+F_y\,y'=0,\\ &F_{xx}+2F_{xy}\,y'+F_{yy}y'^2+F_yy''=0,\\ &\ldots \end{aligned}$$

מתוך מערכת n משוואות אלה נחלץ, אם אפשר, את n המשתנים $c_1,\ldots,c_n$ ונציב אותם במשפחה המקורית הנתונה. מתקבל קשר בין הגדלים $x,y,y',\ldots,y^{(n)}$ שאינו תלוי בפרמטרים $c_1,\ldots,c_n$. זו משוואה דיפרנציאלית מסדר n שמשפחת העקומים ה־n־פרמטרית היא משפחה של פתרונותיה.

דוגמא 2.13 משפחת הפונקציות החד־פרמטרית $y=\dfrac{f_1(x)+cf_2(x)}{f_3(x)+cf_4(x)}$ בה $f_1,\ldots,f_4$ נתונות, היא פתרון של משוואת ריקטי. כי נגדיר

$$F(x,y,c)\stackrel{\text{def}}{=}(yf_3-f_1)+c(yf_4-f_2)=0$$

ונגזרתו לפי x

$$(y'f_3+yf_3'-f_1')+c(y'f_4+yf_4'-f_2')=0.$$

שני אלה מהווים מערכת של משוואות אלגבריות לינאריות והומוגניות ולה פתרון לא טרוויאלי $(1,c)$, לכן דטרמיננט המערכת חייב להיות 0,

$$\begin{vmatrix} yf_3-f_1 & yf_4-f_2\\ y'f_3+yf_3'-f_1' & y'f_4+yf_4'-f_2' \end{vmatrix}=0.$$

אך זו משוואת ריקטי

$$y' = \frac{f_3 f_4' - f_3' f_4}{f_4 f_1 - f_2 f_3}\, y^2 + \frac{f_3 f_2' - f_3' f_2 - f_1 f_4' + f_1' f_4}{f_4 f_1 - f_2 f_3}\, y + \frac{f_1 f_2' - f_1' f_2}{f_4 f_1 - f_2 f_3}\,. \qquad \square$$

תרגיל 2.14 א. הראה שמשוואה דיפרנציאלית שמשפחת הפונקציות $y(x) = \dfrac{c_1 x + c_2}{c_3 x + c_4}$ הן פתרונותיה היא $\dfrac{y'''}{y'} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y''}{y'}\right)^2 = 0$. הסבר מדוע מתאימה משוואה דיפרנציאלית מסדר שלישי.

ב. פתור את המשוואה הדיפרנציאלית $y'''/y' - \dfrac{3}{2}\left(y''/y'\right)^2 = 0$ בעזרת ההצבה $u' = \dfrac{y''}{y'}$.

הביטוי $S(y) = \dfrac{y'''}{y'} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y''}{y'}\right)^2$ נקרא הנגזרת השוורצית[4] (Schwarzian derivative) והוא מופיע בשטחים שונים של המתמטיקה.

דוגמא 2.15 תהי משפחת המעגלים בעלי רדיוס 1 ומרכזיהם על ציר x:

$$(x-c)^2 + y^2 = 1.$$

נסתכל בנפרד על חצי מעגל עליון וחצי מעגל תחתון כ־$y = y(x,c)$ ונגזור לפי x:

$$2(x-c) + 2yy' = 0$$

נחלץ מכאן $x - c = -yy'$, נציב למעלה ונקבל את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$y^2(1 + y'^2) = 1. \tag{2.25}$$

משוואה זו שקולה לשתי המשוואות מסדר ראשון $\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-y^2}/y$, שכל אחת מהן ניתן לפתור בשיטת הפרדת המשתנים.

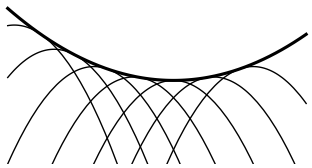
בנוסף למשפחת המעגלים שמהם יצאנו, נקבל גם שני פתרונות סינגולריים $y = 1$, $y = -1$ שאינם שייכים למשפחת המעגלים הנתונה אלא רק משיקים להם. $\square$

להופעת הפתרונות הסינגולריים ה"עודפים" יש משמעות גיאומטרית.

הגדרה 2.4 נתונה משפחה חד־פרמטרית של עקומים במישור הרשומים בצורה סתומה כ־$\varphi(x,y,c) = 0$. עקום γ נקרא מעטפת של המשפחה הנ"ל אם בכל נקודה שלו γ משיק בדיוק לעקום אחד של המשפחה.

לפי הגדרה זו לעקום מתוך המשפחה ולמעטפת יש בנקודה המשותפת (x,y), אותו שיפוע y'. לכן, כאשר משפחת העקומים מיצגת פתרון פתרון כללי של משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון, גם המעטפת מקיימת אותה משוואה דיפרנציאלית.

[4] Hermann Schwarz, 1843-1921



איור 2.5: מעטפת

משפט 2.5 אם למשפחת העקומים $\varphi(x,y,c)=0$ יש מעטפת חלקה $x=x(c),\ \ y=y(c)$, אז המעטפת בהכרח מקיימת

$$\varphi(x,y,c)=0,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial c}(x,y,c)=0.$$

הוכחה. נניח כי למשפחת העקומים יש מעטפת וכי לכל c העקום $\varphi(x,y,c)=0$ והמעטפת משיקים בנקודה $(x(c),y(c))$. אז $\varphi(x(c),y(c),c)=0$. נגזור לפי c:

$$\varphi_x\frac{dx}{dc}+\varphi_y\frac{dy}{dc}+\varphi_c=0.$$

שיפוע העקום $\varphi(x,y,c)=0$ מתוך המשוואה הוא $\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$ ושיפוע המעטפת $(x(c),y(c))$ הוא $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dc}\Big/\frac{dx}{dc}$ ומשוויון השיפועים בנקודת ההשקה נובע כי $\varphi_x\frac{dx}{dc}+\varphi_y\frac{dy}{dc}=0$. נותר אם כן $\varphi_c=0$, כדרוש.

נזכיר כי זהו תנאי הכרחי לקיום מעטפת ולא תנאי מספיק. □

דוגמא 2.16 מוט באורך 1 מחליק כך ששני קצותיו מונחים על ציר x וציר y בהתאמה. כאשר המוט יוצר זוית α עם ציר x, קצותיו מונחות בנקודות $(\cos\alpha,0),(0,\sin\alpha)$ ומשוואתו היא

$$\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}=1. \tag{2.26}$$

כדי לחפש מעטפת למשפחת ישרים (2.26) נגזור את

$$\varphi(x,y,\alpha)\equiv\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}-1=0$$

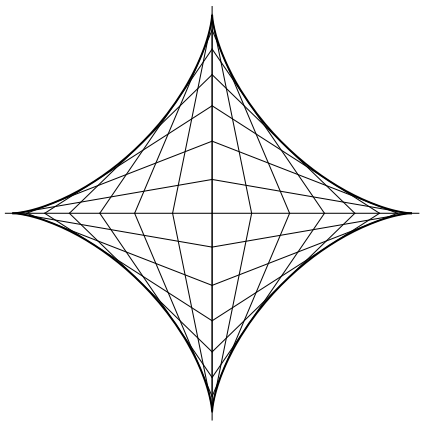
לפי הפרמטר α:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi(x,y,\alpha)=\frac{x\sin\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{y\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=0$$

על ידי חישוב ישיר נקבל את התאור הפרמטרי למעטפת

$$x = \cos^3 \alpha, \qquad y = \sin^3 \alpha$$

ואת משוואתו הישירה $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. עקום זה מכונה בשם אסטרואיד.[5] ראה איור 2.6.



איור 2.6: מוט מחליק על צירים ניצבים והמעטפת שלו, אסטרואיד

נמצא גם את המשוואה הדיפרנציאלית המתאימה למשפחת הישרים (2.26). לשם כך נגזור את המשפחה לפי המשתנה x ונקבל

$$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{y'}{\sin\alpha} = 0.$$

על מנת להעלים את הפרמטר α נחלץ $y' = -\tan\alpha$ מהמשוואה האחרונה ונציב $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{-y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ למשוואה (2.26). בזה נקבל משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון

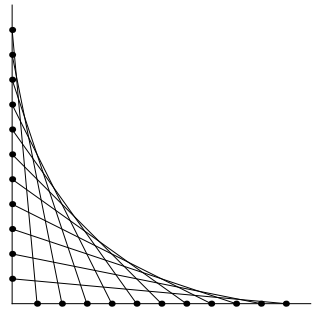
$$\left(x - \frac{y}{y'}\right)\sqrt{1+y'^2} = 1. \qquad \square \tag{2.27}$$

תרגיל 2.17 הראה כי המעטפת של משפחת הישרים

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{1-c} = 1, \qquad 0 < c < 1,$$

היא העקום $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ וכי זו פרבולה. ניתן לבנות בעזרת מסמרים וחוטים מודל string art המדגים מעטפת זו. ראה איור 2.7. $\square$

[5] astroid



איור 2.7: חוטים מתוחים בין נקודות במרחק אחיד

בעיה גיאומטרית נוספת בה ניתן לטפל בעזרת משוואות דיפרנציאליות היא שאלת אורתוגונליות של עקומים.

הגדרה 2.6 שתי משפחות של עקומים במישור נקראות אורתוגונליות אם כל עקום של משפחה אחת חותך כל עקום של המשפחה השניה בזוית ישרה.

תהי נתונה משפחה חד־פרמטרית של עקומים $F(x,y,c)=0$ או $y=y(x,c)$. כאמור למעלה, משפחה זו היא בדרך כלל פתרון כללי של משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון,

$$y' = f(x,y).$$

שני עקומים נחתכים בזוית ישרה אם שיפועיהם (ערכי נגזרותיהם) k_1, k_2 בנקודת החיתוך (x,y) מקיימים $k_1k_2=-1$. לפיכך עקום מהמשפחה האורתוגונלית למשפחה הנתונה חייב לקיים באותה נקודה (x,y) את הדרישה

$$y' = -\frac{1}{f(x,y)}.$$

משפחת פתרונות של משוואה דיפרנציאלית זו יוצרת עקומים אורתוגונליים למשפחה הנתונה.

דוגמא 2.18 נתונה משפחת פרבולות $y=cx^2$, $-\infty < c < \infty$, והנגזרות לפי x, $y'=2cx$. נחלץ את $c=y/x^2$ מהמשוואה הראשונה ונציב לשניה,

$$y' = 2(y/x^2)x = \frac{2y}{x}.$$

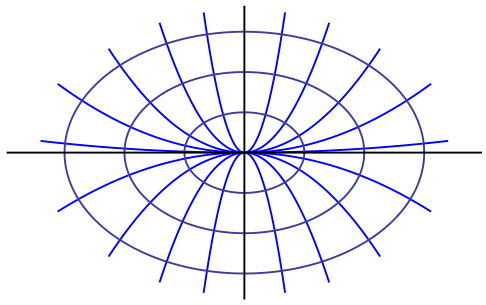
זו המשוואה הדיפרנציאלית של משפחת הפרבולות הנתונה. לכן המשוואה הדיפרנציאלית המתאימה למשפחה האורתוגונלית היא

$$y' = -\frac{x}{2y}.$$

הפרדת משתנים מובילה לאינטגרציה $\int 2y\,dy = \int -x\,dx$ ולמשפחת האליפסות

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = k.$$

אנו מסמנים את הקבוע השרירותי במשפחה השניה בפרמטר k השונה מהפרמטר c כי בין שני קבועים אלה אין קשר. ראה איור 2.8. $\square$



איור 2.8: משפחות אורתוגונליות של עקומים

תרגיל 2.19 מצא את המשפחה האורתוגונלית לאוסף הפרבולות $y^2 = 2cx + c^2$. מצא את המשוואה הדיפרנציאלית המתאימה למשפחה הנתונה ואת זו המתאימה לעקומים האורתוגונליים והראה כי מדובר בדיוק באותה משוואה! הסבר כיצד זה ייתכן.

דוגמא 2.20 נחפש משפחות של עקומים הנחתכים בזוית קבועה ϕ כלשהי (isogonal). אם משפחת העקומים הנתונה הם פתרונות המשוואה הדיפרנציאלית $y' = f(x,y)$, אז שיפוע העקום בנקודה (x,y) הוא $\tan\alpha = f(x,y)$ ושיפוע העקום החותך אותו בזוית ϕ הוא $\tan(\alpha+\phi) = (\tan\alpha+\tan\phi)/(1-\tan\alpha\cdot\tan\phi)$. לכן המשפחה המבוקשת מקיימת

$$y' = \frac{f(x,y)+\tan\phi}{1-f(x,y)\tan\phi}\,.$$

מצא את העקומים אשר חותכים את המעגלים הקונצנטריים $x^2+y^2=c$ בזוית קבועה ϕ והראה כי אלה הם הספירלים הלוגריתמיים $r = e^{\tan\phi\,(\theta-k)}$.

2.8 משוואות סתומות אחדות

אנו נתקלים במשוואות דיפרנציאליות הרשומות בצורה סתומה בצורה

$$F(x,y,y') = 0$$

שבהן קשה לחלץ את y'. משוואות אחדות כאלה אפשר לחקור למרות צורתן המסובכת בעזרת טריקים יחודיים ולהבחין בפתרונות סינגולריים.

דוגמא 2.21 נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $y = f(y')$ שבה איננו יכולים לחלץ את y' כ־$y' = f^{-1}(y)$. במקרה זה נסמן $\dfrac{dy}{dx} = y' = p$ ונסתכל על p כמשתנה. אז $y = f(p)$ ו־

$$x = \int \frac{dx}{dy}\,dy = \int \frac{1}{p}\,\frac{dy}{dp}\,dp = \int \frac{1}{p}\,f'(p)\,dp + c.$$

כך קיבלנו את משפחת הפתרונות $y = y(x, c)$ מיוצגות בעזרת התאור הפרמטרי

$$x = \int \frac{1}{p} f'(p)\, dp + c, \qquad y = f(p). \qquad \square$$

תרגיל 2.22 בדוגמא 2.15 פגשנו במשוואה $y^2(1 + y'^2) = 1$. ניתן לכתוב זאת גם בצורה $y = \pm\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$. כמו למעלה

$$x = \int \frac{1}{p} \frac{-p}{(1+p^2)^{3/2}}\, dp = -\int \frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + c.$$

תאור פרמטרי זה אכן מקיים $(x - c)^2 + y^2 = 1$.

תרגיל 2.23 מצא שיטת פתרון דומה למשוואות דיפרנציאליות מהצורה $x = f(y')$.

את המשוואה הדיפרנציאלית (2.27) אפשר לרשום גם כ־ $y = xy' - \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$, או בסימון $y' = p$ שלמעלה כ־

$$y = xp - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}. \tag{2.28}$$

משוואה מהצורה

$$y = xp + g(p)$$

נקראת בשם משוואת קלרו (Clairaut).[6] ובהן למעטפת יש תפקיד חשוב. כדי לפתור משוואה זו נשתמש בטריק ייחודי. נגזור את המשוואה לפי x ונקבל

$$p = y' = p'x + p + g'(p)p',$$

דהיינו

$$p'(x + g'(p)) = 0$$

לפנינו שתי אפשרויות. אם $p' = 0$ אז $p = const = c$ ופתרון כללי למשוואה הוא

$$y = cx + g(c).$$

זו משפחת ישרים חד־פרמטרית. לעומת זאת, אם $x + g'(p) = 0$, אז

$$\begin{aligned} x &= -g'(p), \\ y &= -pg'(p) + g(p). \end{aligned}$$

זה פתרון סינגולרי יחיד הרשום בצורה פרמטרית.

[6] Alexis Clairaut, 1713-1765

אפשר לאמת באופן ישיר כי פתרון סינגולרי זה הוא המעטפת של משפחת הישרים שלמעלה. כי אכן הנקודה $(x,y) = \big(-g'(p), -pg'(p)+g(p)\big)$ של הפתרון הסינגולרי מונחת עבור $p=c$ על הישר $y = cx + g(c)$; ושיפוע הפתרון הסינגולרי שם הוא

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dp}{dx/dp} = \left.\frac{-g'(p) - pg''(p) + g'(p)}{-g''(p)}\right|_{p=c} = c,$$

כשיפוע הישר המתאים. לכן פתרונות משוואת קלרו הם משפחת ישרים והמעטפת שלהם.

דוגמא 2.24 נפתור בשיטה המוצעת את המשוואה (2.28) בה $g(p) = -\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}$. במקרה זה הפתרון הכללי הוא משפחת הישרים $y = cx - \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ השקול למשפחה (2.26) עם $c = -\tan\alpha$; והפתרון הסינגולרי הוא

$$\begin{aligned} x &= 1/(1+p^2)^{3/2}, \\ y &= -p^3/(1+p^2)^{3/2} \end{aligned}$$

המתאר את האסטרואיד $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. □

משוואה נוספת הנפתרת על ידי גזירה כמו למעלה היא משוואת לגרנז' (Lagrange),[7]

$$y = f(p)x + g(p)$$

אשר לינארית ב־y וב־x אך לא ב־$y' = p$. גם הפעם נגזור לפי x:

$$p = y' = f'(p)p'x + f(p) + g'(p)p',$$

כלומר

$$\frac{dp}{dx} = p' = \frac{p - f(p)}{xf'(p) + g'(p)}. \tag{2.29}$$

בהנחה כי $f(p) - p \neq 0$ נחליף את תפקידי המשתנים x, p ונקבל

$$\frac{dx}{dp} = \frac{f'(p)}{p - f(p)}\,x + \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

שהיא משוואה דיפרנציאלית לינארית עבור $x(p)$. מכאן מתקבל לפתרון תאור פרמטרי $x = x(p),\ y = y(p)$. אם הביטוי $f(p) - p$ מתאפס עבור p_0, אז ל־(2.29) יש פתרון סינגולרי $p(x) \equiv p_0$, ולמשוואה המקורית יש פתרון

$$y = f(p_0)x + g(p_0) = p_0 x + g(p_0),$$

שהוא קו ישר בעל שיפוע p_0.

[7] Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813

פרק 3

משפטי קיום ויחידות

3.1 מדוע נחוצים משפטים על קיום פתרונות

מאז ימי עבודתו של ניוטון בנושאי משוואות דיפרנציאליות ועד תחילת המאה ה־19, ניסו העוסקים בנושא למצוא פתרונות ושיטות פתרון למשוואות דיפרנציאליות. שיטות רבות ומתוחכמות נתגלו, "טריקים" הומצאו, אך מרבית המשוואות הדיפרנציאליות לא נכנעו ולא נמצא להן פתרון מפורש.

במאה ה־19 הבינו כי יש לנסות להבין משוואות דיפרנציאליות גם אם אין ביכולתנו למצוא "נוסחה" לפתרון. השאלות המתעוררות עבור בעיית התחלה

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0, \tag{3.1}$$

ושעליהן נשתדל לענות בפרק זה הן:

1. האם קיים פתרון לבעיית ההתחלה? נדגיש כי השאלה אינה האם אנו מסוגלים למצוא פתרון באופן מפורש אלא עצם קיום פתרון או אי־קיומו.
2. האם לבעיית ההתחלה יש פתרון יחיד או יותר מפתרון אחד?
3. אם קיים פתרון $y(x)$ לבעיה, מהו תחום ההגדרה שלו?

נתחיל בדוגמאות שממחישות כי התשובות שאלות שלמעלה אינן מובנות מאליהן. הדוגמא הראשונה עוסקת בשאלת קיום פתרונות לבעיית התחלה.

דוגמא 3.1 נתבונן במשוואה $y' - \frac{2}{x}\,y = x^5$, שצורתה כ־(3.1) עם $f(x,y) = \frac{2y}{x} + x^5$.
כפל בגורם האינטגרציה $\mu(x) = e^{\int -2/x\,dx} = x^{-2}$ הופך משוואה זו ל־

$$(x^{-2}y)' = x^{-2}y' - 2x^{-3}y = x^3,$$

ומכאן $x^{-2}y = x^4/4 + C$. הפתרון הכללי הוא

$$y = \frac{x^6}{4} + Cx^2.$$

לתנאי ההתחלה $y(2) = 8$, למשל, מתאים $C = -2$ ופתרון יחיד $y = x^6/4 - 2x^2$.

נדרוש עכשיו תנאי התחלה בנקודה הבעייתית $x = 0$ בה המשוואה אינה מוגדרת. אפשר כמובן לפסול את לגיטימיות תנאי ההתחלה בנקודה בה המשוואה אינה מוגדרת אך קושי זה נעלם אם מחליפים את הגודל $y(0)$ ב־$\lim_{x\to 0} y(x)$.

אין אף פתרון שמקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = 8$ כי לכל בחירה של המספר C קיים $y(0) = 0/4 + C \cdot 0 \neq 8$. לעומת זאת, תנאי ההתחלה $y(0) = 0$ מוביל לדרישה $0 = 0/4 + C \cdot 0$, המתקיימת לכל ערך של C . לכן לבעיית התחלה זו מתאימים אינסוף פתרונות מהצורה $y = x^6/4 + Cx^2$, C סקלר כלשהו. □

הדוגמא הבאה מראה כי אפילו לבעיות התחלה "נחמדות" יחידות הפתרון אינה מובנת מעליה.

דוגמא 3.2 נסתכל בבעיית ההתחלה

$$y' = y^{1/3}, \qquad y(0) = 0. \tag{3.2}$$

כאן $f(x, y) = y^{1/3}$ רציף לכל (x, y) ב־R^2 (למעשה f אינו תלוי כלל ב־x).

נפתור את המשוואה על ידי הפרדת משתנים. אם $y \neq 0$ אז $\int y^{-1/3}\, dy = \int dx$, כלומר $\frac{3}{2}\, y^{2/3} = x - c$. הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = \pm \left[\frac{2}{3}\,(x - c),\right]^{3/2}.$$

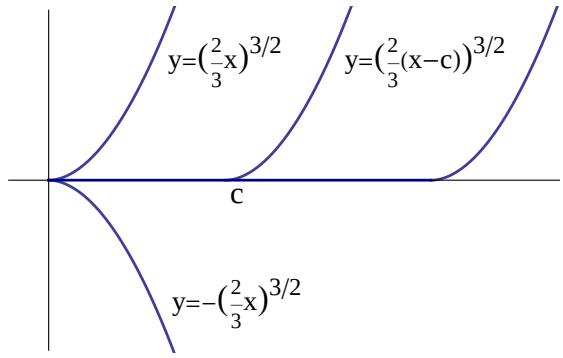
כדי שיתקיים $y(0) = 0$ יש לבחור $c = 0$ ונקבל לבעיית ההתחלה שני פתרונות

$$y(x) = \pm \left(\frac{2}{3}\, x\right)^{3/2}, \qquad x \geq 0.$$

בנוסף לפתרונות אלה קיים פתרון סינגולרי $y(x) \equiv 0$. משילוב והדבקה של הפתרונות שלמעלה ניתן לקבל פתרונות נוספים רבים לבעיית ההתחלה. לכל $c \geq 0$ נגדיר פונקציה

$$y_c(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq c, \\ \left(\frac{2}{3}(x - c)\right)^{3/2}, & c \leq x < \infty. \end{cases}$$

כל פונקציה $y_c(x)$ גזירה בכל נקודה, כולל בנקודה c, כי הנגזרות מימין ומשמאל ל־c שתיהן מתאפסות. כל הפונקציות מקימות את המשוואה הדיפרנציאלית (בדוק בנפרד בכל קטע!) ואת תנאי ההתחלה. לכן מצאנו לבעיה אינסוף פתרונות שונים. ראה איור 3.1 □



איור 3.1: פתרונות אחדים לבעיית ההתחלה (3.2)

הדוגמה השלישית מטפלת בשאלת תחום ההגדרה של פתרון.

דוגמא 3.3

$$y' = y^2, \qquad y(2) = 1.$$

על ידי הפרדת משתנים מקבלים $\int dy/y^2 = \int dx$, כלומר $-1/y = x + C$. תנאי ההתחלה $y(2) = 1$ קובע כי $C = -3$ וקבלנו את הפונקציה

$$y = \frac{1}{3-x}.$$

היכן מהווה פונקציה זו פתרון לבעיה?

עבור כל $-\infty < x < 3$ זו פונקציה גזירה המקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית ואת תנאי ההתחלה, לכן היא בודאי פתרון בקטע $(-\infty, 3)$. כשמתקרבים אל הנקודה $x = 3$ מצד שמאל, מקבלים $\lim_{x\to 3^-} y(x) = +\infty$, כלומר לפונקציה זו יש אסימפטוטה אנכית.

אנו נתקלים בתופעה מתמיהה: אגף ימין של המשוואה הדיפרנציאלית, $f(x, y) = y^2$, מוגדר, רציף וגזיר מכל סדר לכל x, y ואף על פי כן פתרון חדל מלהתקיים בנקודה $x = 3$ שהיא חסרת כל ייחוד מבחינת המשוואה (x כלל אינו מופיע במפורש במשוואה)!

בקטע $(3, \infty)$ הפונקציה $y = 1/(3-x)$ ממשיכה לקיים את המשוואה הדיפרנציאלית. אולם בדיקת תנאי ההתחלה $y(2) = 1$ חסרת כל משמעות כי הנקודה $x = 2$ כלל אינה נמצאת בקטע זה. לכן $y = 1/(3-x)$ בברור אינו פתרון של בעיית ההתחלה ב־$(3, \infty)$.

ומה באשר לקבוצת האחוד $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$, כלומר כל הישר למעט הנקודה $x = 3$? המשוואה הדיפרנציאלית מתקיימת, תנאי ההתחלה מתקיים, אך כיצד "עובר" הפתרון מ־$(-\infty, 3)$ אל $(3, \infty)$? כאן עלינו לקבל החלטה עקרונית מה נחשב בעינינו פתרון. מכיון שמשוואה דיפרנציאלית מתארת בדרך כלל תהליך דינמי המתחיל מנקודה מסוימת ומתקדם ממנו ככל שניתן, אין זה סביר שפתרון אשר "מתפוצץ" משמאל ל־$x = 3$ ומקיים

$\lim_{x\to 3^-} y(x) = +\infty$, יופיע מחדש מימין ל־$x = 3$ עם $\lim_{x\to 3^+} y(x) = -\infty$. על כן אנו מגבילים את תחום ההגדרה של פתרון אך ורק לקבוצה קשירה של ערכי x, דהיינו קטע פתוח או סגור, סופי או אינסופי. במקרה שלנו תחום ההגדרה של הפתרון הוא הקטע $(-\infty, 3)$. □

הגדרה 3.1 נאמר כי תחום ההגדרה של פתרון $y(x)$ של בעיית ההתחלה (3.1) הוא הקטע המקסימלי של ערכי x המכיל את נקודת ההתחלה x_0, שבו $y(x)$ גזיר, מקיים את המשוואה הדיפרנציאלית ואת תנאי ההתחלה.

תרגיל 3.4 לכל פתרון תחום הגדרה ייחודי משלו. מצא את תחום ההגדרה של פתרון בעיית ההתחלה $y' = y^2,\ y(3) = 2$ והשווה אותו לזה של דוגמא 3.3 . ומהו תחום ההגדרה של פתרון בעיית ההתחלה $y(3) = -2$?

דוגמא 3.5

$$y' = -\frac{x}{y}, \qquad y(1) = 2. \tag{3.3}$$

במשוואה זו אגף ימין $f(x,y) = -x/y$ מוגדר לכל $-\infty < x < \infty$ ולכל $y > 0$, כלומר בכל חצי המישור העליון. $f(x,y)$ מוגדר גם בחצי המישור התחתון, אבל מחצי המישור התחתון אי אפשר להגיע אל נקודת ההתחלה $(x_0, y_0) = (1, 2)$ מבלי לחצות את הישר $y = 0$ בו המשוואה אינה מוגדרת, לכן נטפל בבעיית ההתחלה רק בחצי המישור העליון

$$D = \{-\infty < x < \infty, \quad y > 0\}.$$

הפתרון על ידי הפרדת משתנים מידי: $\int y\,dy = -\int x\,dx$, כלומר $x^2 + y^2 = \text{const}$. תנאי ההתחלה $y(1) = 2$ גורר $x^2 + y^2 = 5$ והפתרון היחיד $y(x)$ אשר מקיים תנאי התחלה זה הוא

$$y(x) = +\sqrt{5 - x^2}.$$

זה פתרון המשוואה הדיפרנציאלית רק עבור $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$, כי בנקודות הקצה $x = \pm\sqrt{5}$, $y(x)$ אינה גזירה ולכן אין לה משמעות כפתרון למשוואה דיפרנציאלית.

אנו עדים לתופעה מפתיעה: למרות שהמשוואה הדיפרנציאלית (3.3) מוגדרת לכל x ולכל $y > 0$, הרי פתרון בעיית ההתחלה מוגדר רק בקטע מצומצם של ערכי x, $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$, ומפסיק להתקיים בנקודות $x = -\sqrt{5}, \sqrt{5}$. וזאת, למרות שבמשוואה הדיפרנציאלית (3.3) אין שום סימן הרומז כי דבר חריג עלול לקרות עבור הערך $x = \sqrt{5}$ (ולא עבור אף ערך אחר). □

זו תופעה חדשה: קבלנו פתרון לוקלי אשר מוגדר רק בסביבה קטנה של נקודת ההתחלה x_0.

עכשיו אנו מוכנים לנסח ולהוכיח משפטים על קיום פתרונות לבעיית ההתחלה (3.1).

3.2 משפט הקיום של Cauchy-Peano

משפט זה מוכיח קיום פתרון לבעיית התחלה (3.1) על ידי בנית סדרת פונקציות אשר "כמעט" מקיימות את המשוואה הדיפרנציאלית ובחירת תת סדרה מתוכן אשר גבולה הוא פתרון בעיית ההתחלה. נתחיל מהגדרה:

הגדרה 3.2 נתונה פונקציה $f(x,y)$ המוגדרת ורציפה בתחום D במישור x,y. פונקציה $\varphi(x)$ נקראת ε־קרוב לפתרון (ε-approximate solution) של המשוואה $y'=f(x,y)$ בקטע I אם

1. φ רציף בכל הקטע I ובעל נגזרת רציפה ב־I פרט אולי למספר סופי של נקודות בהן φ גזיר מימין ומשמאל.
2. הגרף של הפונקציה $\varphi(x)$ מוכל בתחום D לכל $x\in I$.
3. $|\varphi'(x)-f(x,\varphi(x))|\le\varepsilon$ לכל $x\in I$, פרט למספר סופי של הנקודות בהן $\varphi(x)$ אינו גזיר.

משפט 3.3 יהי $f(x,y)$ רציף במלבן B המוכל בתחום D,

$$B=\left\{|x-x_0|\le a,\ \ |y-y_0|\le b\right\}\subset D,$$

ונסמן $M=\max\limits_{B}|f(x,y)|$, $h=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}$.

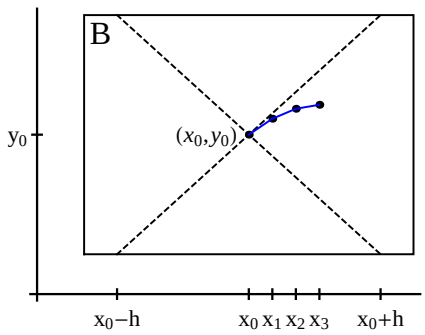
אז לכל $\varepsilon>0$ קיים בקטע $|x-x_0|\le h$ ε־קרוב לפתרון, $\varphi_\varepsilon(x)$, אשר מקיים את תנאי ההתחלה $\varphi_\varepsilon(x_0)=y_0$.

ראשית נעיר כי טבעי לנסח משפטי קיום למשוואות דיפרנציאליות במלבן סגור וחסום המוכל בתחום—קבוצה פתוחה וקשירה. כדי שפונקציה $y(x)$ תהיה גזירה, היא חיבת להיות מוגדרת בסביבה מסוימת של כל נקודה, לכן נוח להניח מראש כי המשוואה הדיפרנציאלית מוגדרת בקבוצה פתוחה. מכיון שפתרון אינו יכול "לדלג" בין קבוצות מרוחקות, רצוי להניח כי תחום ההגדרה של המשוואה הדיפרנציאלית הוא גם קשיר. אך בתחום מסובך מבחינה גיאומטרית קשה לבצע את הצעדים הטכניים של ההוכחה, לכן אנו מצמצמים את הדיון למלבן בעל אורך ורוחב נתונים.

הוכחה. $f(x,y)$ רציף במלבן הסגור והחסום B לכן רציף שם במידה שווה. לפי ההגדרה לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta=\delta(\varepsilon)$ כך ש־ $|f(x,y)-f(\hat{x},\hat{y})|<\varepsilon$ לכל שתי נקודות $(x,y),(\hat{x},\hat{y})$ במלבן B המקימות $|x-\hat{x}|,|y-\hat{y}|<\delta$. נחלק את הקטע $[x_0,x_0+h]$ על ידי נקודות $x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=x_0+h$ כך ש־ $x_i-x_{i-1}\le\min\left\{\delta,\dfrac{\delta}{M}\right\}$.

נתחיל לבנות ε־קרוב לפתרון על הקטע $[x_0,x_0+h]$ כקו פוליגוני. מהנקודה (x_0,y_0) נעביר קו ישר בעל שיפוע $f(x_0,y_0)$ ונמשיך אותו עד $x=x_1$. נסמן את משוואת קו ישר זה ב־ $\varphi_\varepsilon(x)$. קטע זה אינו חורג מתוך המלבן B. מכיון ש־ $|f(x_0,y_0)|\le M$, הגרף של $\varphi_\varepsilon(x)$ מונח בתוך משולש המוגבל מלמעלה ומלמטה על ידי שני ישרים היוצאים מהנקודה (x_0,y_0) ושיפועיהם הם, בהתאמה, $\pm M$ ומימין מוגבל על ידי $x=x_0+h$.

כאשר x מגיע ל־x_1, הקטע שלנו מגיע לנקודה $(x_1, \varphi_\varepsilon(x_1))$. מנקודה זו נמשיך קטע ישר נוסף בעל שיפוע $f(x_1, \varphi_\varepsilon(x_1))$ שיימשך עבור $x_1 \le x \le x_2$. ראה איור 3.2.



איור 3.2: ישרים בעלי שיפועים $\pm M$ וקרוב פוליגוני של Cauchy

באופן דומה נגדיר את הקו הפוליגוני $\varphi_\varepsilon(x)$ בכל תת־קטע $[x_{i-1}, x_i]$ באופן רקורסיבי על ידי

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(x_{i-1}) + f(x_{i-1}, \varphi_\varepsilon(x_{i-1}))(x - x_{i-1}),$$

עד שנגיע לאחר מספר סופי של צעדים אל $x_n = x_0 + h$. באופן אינדוקטיבי רואים כי כל הקטעים שבנינו מוכלים במשלש המוזכר למעלה ושיפוע כל קטע נמצא בין M ל־$(-M)$. לפיכך לכל שתי נקודות $x_0 \le x, \hat{x} \le x_0 + h$ מתקיים

$$|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(\hat{x})| \le M|x - \hat{x}|. \tag{3.4}$$

בפרט נובע כי הקרוב שלנו אינו חורג מן התיבה, כי עבור $x_0 \le x \le x_0 + h$ מתקיים

$$|\varphi_\varepsilon(x) - y_0| \le M|x - x_0| \le M \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \le b. \tag{3.5}$$

כדי להראות שקבלנו ε־קרוב לפתרון, נקח נקודה x כלשהי, למשל $x_{i-1} < x < x_i$. אז (הודות לבחירת נקודות החלוקה) $x - x_{i-1} < \delta$ וגם

$$|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x_{i-1})| \le M|x - x_{i-1}| \le M \min\left\{\delta, \frac{\delta}{M}\right\} \le \delta$$

לפיכך (הודות לרציפות במידה שווה של f),

$$|\varphi'_\varepsilon(x) - f(x, \varphi_\varepsilon(x))| = |f(x_{i-1}, \varphi_\varepsilon(x_{i-1})) - f(x, \varphi_\varepsilon(x))| < \varepsilon,$$

כנדרש. $\square$

בהמשך נרצה לבחור מתוך סדרת הקרובים תת־סדרה מתכנסת במידה שווה. את זה נעשה בעזרת המשפט של Ascoli ו־Arzela.

הגדרה 3.4 קבוצת פונקציות $\{f\}$ המוגדרת על קטע I נקראת רציפה במשותף על I *(equicontinuous)* אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta = \delta(\varepsilon)$ בלתי תלוי בבחירת f מהקבוצה כך ש־ $|f(x) - f(\hat{x})| < \varepsilon$ לכל $x, \hat{x} \in I$, $|x - \hat{x}| < \delta$.

משפט 3.5 (Ascoli - Arzela)[1] נתונה קבוצת פונקציות אינסופית אשר חסומה במשותף ורציפה במשותף על קטע חסום I. אז אפשר להוציא מהקבוצה סדרת פונקציות המתכנסת במידה שווה על I.

משפט זה הוכח על ידי Ascoli בשנת 1883 ושוכלל על ידי Arzela ב־1895. הוכחת משפט זה שייכת לחשבון דיפרנציאלי ולא תנתן כאן.

משפט 3.6 (Cauchy - Peano)[2] אם $f(x, y)$ רציף במלבן B אז לבעיית ההתחלה (3.1) קיים פתרון בעל נגזרת רציפה על הקטע $|x - x_0| \le h$.

קרוב על ידי פוליגון היה ידוע ל־Cauchy ב־1820. ההוכחה המבוססת על משפט Ascoli - Arzela ניתנה על ידי Peano ב־1890. נחזור ונדגיש כי משפט זה מבטיח קיום פתרון אך אינו עוסק כלל בשאלת יחידות הפתרון.

הוכחה. נמשיך להשתמש בסימונים M, h כפי שהוגדרו במשפט 3.3. נבחר סדרה מונוטונית יורדת השואפת ל־0, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$. כפי שהוכח במשפט 3.3, לכל $\varepsilon_n > 0$ קיים ε_n־קרוב לפתרון לבעיית התחלה (3.1), ונסמן אותו ב־ $\varphi_n(x)$.

מאי־השוויון (3.4) נובע כי קבוצת הקרובים שבנינו רציפה במשותף בקטע $[x_0, x_0 + h]$ כי $|x - \hat{x}| < \delta(\varepsilon) \equiv \varepsilon/M$ מבטיח $|\varphi_n(x) - \varphi_n(\hat{x})| \le \varepsilon$ ללא תלות ב־n. קבוצת הקרובים גם חסומה במשותף, כי הודות ל־ (3.5), $|\varphi_n(x)| \le |y_0| + b$.

לפי משפט 3.5 לסדרה $\varphi_n(x)$ יש תת־סדרה מתכנסת במידה שווה. ללא כל חשש נסמן גם תת־סדרה זו ב־ $\varphi_n(x)$. מכיון ש־ $\varphi_n(x)$ רציפים, גם פונקציית הגבול $\varphi(x)$ רציפה באינטרול $[x_0, x_0 + h]$.

נותר להראות כי פונקציית הגבול $\varphi(x)$ שהתקבלה היא אכן פתרון לבעיית ההתחלה (3.1). נסמן

$$\Delta_n(x) = \begin{cases} \varphi_n'(x) - f(x, \varphi_n(x)) & \text{אם } \varphi_n(x) \text{ גזיר}, \\ 0 & \text{אם } \varphi_n(x) \text{ לא גזיר}. \end{cases}$$

על ידי אינטגרציה מקבלים

$$\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} \left(f(s, \varphi_n(s)) + \Delta_n(s)\right)\, ds$$

וכזכור, $\varphi_n(x_0) = y_0$. φ_n הוא ε_n־קרוב לפתרון ולכן $|\Delta_n(x)| < \varepsilon_n$ בקטע הנדון. הודות להתכנסות במידה שווה של תת־הסדרה φ_n לגבול φ, ומכיון ש f רציף במידה שווה במלבן

[1] Guilio Ascoli, 1843-1896, Cesare Arzela, 1847-1912
[2] Augustin-Louis Cauchy, 1789-1875, Giuseppe Peano, 1858-1932

B, ניתן לעבור לגבול ולקבל

$$\varphi(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds.$$

$f(s, \varphi(s))$ רציף, לכן אגף ימין, ובהתאם גם אגף שמאל של השוויון האחרון בעלי נגזרות רציפות, כלומר $\varphi \in C^1$. נגזור לפיכך ונקבל כי $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ וכמו כן $\varphi(x_0) = y_0$.
□

תרגיל 3.6 אם לבעיית התחלה יש יותר מאשר פתרון אחד, מתעוררת השאלה לאיזה מהפתרונות יתכנס התהליך שתארנו במשפטים 3.6, 3.3? ראינו למשל כי לבעיית ההתחלה $y' = y^{1/3},\ y(0) = 0$ (דוגמא 2.3) יש פתרונות רבים. הראה כי הקרובים המתקבלים במשפט 3.3 הם כולם $\varphi_\varepsilon(x) \equiv 0$ והם מתכנסים לפתרון $\varphi(x) \equiv 0$.

3.3 משפט הקיום והיחידות של Picard-Lindelöf

בפרק זה נתאר את משפט הקיום והיחידות שהוכח על ידי Picard ו־Lindelöf [3] בשנים $1890 - 1894$. בניגוד למשפט בסעיף הקודם, תוצאה זו דנה גם בקיום וגם ביחידות הפתרון של בעיית התחלה.

כדי לנסח את המשפט אנו זקוקים למושג תנאי ליפשיץ.[4]

הגדרה 3.7 נאמר כי פונקציה $g(x)$, $g : R^1 \to R^1$, מקיימת תנאי ליפשיץ בקטע I אם קיים קבוע L כך שלכל $x_1, x_2 \in I$ מתקיים

$$|g(x_1) - g(x_2)| \le L|x_1 - x_2|.$$

נמנה תכונות אחדות של תנאי ליפשיץ.

פונקציה המקיימת תנאי ליפשיץ בקטע, רציפה שם, כי בהגדרת הרציפות לכל $\varepsilon > 0$ מתאים $\delta = \varepsilon/L$. הכיוון ההפוך אינו נכון, כי למשל $g(x) = \sqrt{x}$ רציף בקטע $[0, 1]$ אך אינו יכול לקיים תנאי ליפשיץ. ובאמת,

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$$

אך $1/\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)$ אינו חסום בקטע הנ"ל.

אם פונקציה בעלת נגזרת ראשונה חסומה בקטע, היא מקיימת תנאי ליפשיץ שם, כי

$$g(x_1) - g(x_2) = g'(c)(x_1 - x_2)$$

[3] Émile Picard, 1856-1941, Ernst Lindelöf, 1870-1946
[4] Rudolph Lipschitz, 1832-1903

ונוכל לבחור hv $L = \sup|g'(c)|$. גם כאן הכיוון ההפוך אינו נכון, כי למשל הפונקציה $g(x) = |x|$ מקיימת תנאי ליפשיץ על הקטע $[-1,1]$ עם הקבוע $L = 1$, אך אינה גזירה ב־$x = 0$.

נעיר גם כי הפונקציה $g(x) = x^2$ בעלת נגזרת רציפה (אך בלתי חסומה) על $(-\infty,\infty)$ אך אינה מקיימת תנאי ליפשיץ על קטע אינסופי זה.

את משפט פיקרד־לינדלף ננסח לא רק עבור משוואה דיפרנציאלית אחת ונעלם יחיד, אלא עבור מערכת של משוואות ומספר מתאים של פונקציות נעלמות. תהי נתונה מערכת של n משוואות דיפרנציאליות

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{3.6}$$

ב־n נעלמים $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ ו־n תנאי התחלה

$$y_i(x_0) = y_{0,i} \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.7}$$

כדי לפשט את העבודה הטכנית, נתרגם בעיית התחלה זו לכתיב וקטורי. n הנעלמים $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ יוצגו כרכיבים של וקטור,

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},$$

כלומר פונקציה וקטורית מ־R ל־R^n. טבעי להגדיר כי נגזרת של פונקציה וקטורית היא וקטור הנגזרות של כל רכיב בנפרד

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix},$$

ואינטגרציה של פונקציה וקטורית היא אינטגרציה של כל רכיב בנפרד. באופן דומה נסמן

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix}.$$

כאן $\mathbf{f} : R^{n+1} \to R^n$. בסימון זה מערכת המשוואות הדיפרנציאליות (3.6) ותנאי ההתחלה (3.7) ניתנים להכתב כ־

$$\mathbf{y}\,'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0}. \tag{3.8}$$

כדי לדבר על "גודל" של וקטור נגדיר את המושג נורמה וקטורית:

הגדרה 3.8 עבור מרחב וקטורי V, פונקציה $||\ ||: V \to R$ נקראת נורמה אם לכל $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$,

1. $||\mathbf{v}|| \geq 0$ ושוויון מתקיים אך ורק עבור $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
2. $||c\mathbf{v}|| = |c|\,||\mathbf{v}||$ עבור לכל סקלר c.
3. מתקיים אי שוויון המשלש $||\mathbf{v} + \mathbf{u}|| \leq ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{u}||$.

למטרותינו נוח יהיה להשתמש באחת הנורמות המקובלות, נורמת המקסימום,

$$||\mathbf{y}||_\infty = ||\mathbf{y}|| = \max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}.$$

תרגיל 3.7 הוכח כי $||\mathbf{y}||_\infty$ מקיימת את התכונות הנדרשות מנורמה.

משפט 3.9 (Picard-Lindelöf) נתונה מערכת המשוואות הדיפרנציאליות ותנאי ההתחלה (3.8). נניח כי הפונקציה $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ רציפה ב־$n+1$ המשתנים שלה בתחום (קבוצה פתוחה וקשירה) D ובתחום D מוכלת תיבה סגורה

$$B = \{|x - x_0| \leq a,\ ||\mathbf{y} - \mathbf{y_0}||_\infty \leq b\} \subset D \subset R^{n+1},$$

(כלומר בכתיב של רכיבים, $|x - x_0| \leq a,\ |y_1 - y_{0,1}| \leq b, \ldots, |y_n - y_{0,n}| \leq b$).
נניח כי $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ מקיים בתיבה B תנאי ליפשיץ ביחס למשתנה $\mathbf{y}$, דהיינו שקיים קבוע L כך שלכל $(x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{z}) \in B$ מתקיים

$$||\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})|| \leq L||\mathbf{y} - \mathbf{z}||.$$

נסמן

$$M = \max_{(x,\mathbf{y}) \in B} ||\mathbf{f}(x, \mathbf{y})||, \qquad h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

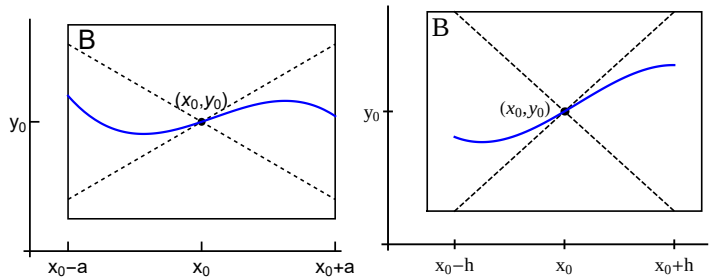
אז לבעיית ההתחלה (3.8) קיים פתרון $\mathbf{y}(x)$ בעל נגזרת רציפה בקטע $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$ ופתרון זה הוא יחיד.

הוכחה. נדגים תחילה עבור משוואה דיפרנציאלית סקלרית את תפקיד הגודל h שהוגדר למעלה. אם למשוואה יש פתרון שהגרף שלו $y = y(x)$ עובר דרך הנקודה (x_0, y_0) ומונח במלבן $B = \{|x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$, אז שיפועו מקיים

$$|y'| = |f(x, y)| \leq M$$

והגרף יהיה כלוא בין שני הישרים $y - y_0 = \pm M(x - x_0)$. נצייר שני ישרים מגבילים אלה על גבי המלבן B. אם $a \geq b/M$, הישרים המגבילים פוגשים בצלע העליונה ובצלע

התחתונה של B בנקודות $x = x_0 \pm b/M$ (ראה שרטוט ימני באיור 3.3). וכאשר $a \le b/M$, הישרים המגבילים פוגשים בצלע הימנית ובצלע השמאלית של B בנקודות $x = x_0 \pm a$ (שרטוט שמאלי באיור 3.3). מכיון שאין אנו יודעים מראש איזה משני המקרים יתרחש, נסמן את הקטן מבין שני המרחקים האופקיים ב־h. מטרתנו היא להוכיח קיום פתרון בקטע $x_0 - h \le x \le x_0 + h$.



איור 3.3: המלבן B, הישרים המגבילים וגרף של פתרון במקרים $h = M/b$, $h = a$

לשם הנוחיות נחלק את הוכחת המשפט לשלבים אחדים.

שלב 1. נניח כי $y(x)$ פתרון של בעיית ההתחלה (3.8) ונבצע אינטגרציה של המשוואה הדיפרנציאלית $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$ על הקטע $[x_0, x]$. נקבל

$$\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}(x_0) = \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\, ds.$$

אך $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0}$, לכן

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y_0} + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\, ds. \tag{3.9}$$

בזה הפכנו את המשוואה הדיפרנציאלית ותנאי ההתחלה הנתונים למשוואה אינטגרלית. משוואה אינטגרלית זו דואגת באופן אוטומטי לתנאי ההתחלה, כי אם נציב בגבול האינטגרציה $x = x_0$, נקבל את תנאי ההתחלה $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0}$. מטרתנו היא לפתור את המשוואה האינטגרלית (3.9) בקטע $[x_0 - h, x_0 + h]$. לשם הנוחיות נטפל תחילה במחצית הקטע הימנית $x_0 \le x \le x_0 + h$ ואחר כך נדון באופן דומה במחציתו השמאלית $[x_0 - h, x_0]$.

נגדיר סדרת פונקציות על הקטע $[x_0, x_0 + h]$. הראשונה שבהם תהיה פונקציה וקטורית רציפה כלשהי $\mathbf{y}_0(x)$ שהגרף שלה מוכל בתיבה B, כלומר $||\mathbf{y}_0(x) - \mathbf{y}_0|| \le b$ עבור $x_0 \le x \le x_0 + h$. בכתיב של רכיבים,

$$|x - x_0| \le a, \;\; |y_1 - y_{0,1}| \le b, \ldots, |y_n - y_{0,n}| \le b.$$

בחירה אפשרית נוחה היא למשל $\mathbf{y}_0(x) \equiv \mathbf{y}_0$. הפונקציה הבאה מוגדרת על ידי

$$\mathbf{y}_1(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_0(s))\, ds,$$

ובהמשך, עבור כל $k = 1, 2, \ldots,$

$$\mathbf{y}_{k+1}(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_k(s))\, ds. \tag{3.10}$$

פונקציות אלה מכונות בשם "קרובים עוקבים".

שלב 2. ראשית נראה כי הגרפים $(x, \mathbf{y}_k(x))$ של כל האיטרציות מונחים בתיבה B, בה $\mathbf{f}(s, \mathbf{y}_k(s))$ מוגדר. לשם זה עלינו להראות כי לכל $x_0 \le x \le x_0 + h$ האיטרציות מקימות $||\mathbf{y}_k(x) - y_0|| \le b$.

ההוכחה תהיה באינדוקציה. עבור $k = 0$ הטענה ברורה על פי בחירת $\mathbf{y}_0(x)$. נניח שהוכחנו כי $||\mathbf{y}_k(x) - y_0|| \le b$, אז בעזרת אי שוויון המשולש והודות ל־ $x_0 \le x$,

$$||\mathbf{y}_{k+1}(x) - y_0|| = \left|\left|\int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_k(s))\, ds\right|\right| \le \int_{x_0}^{x} ||\mathbf{f}(s, \mathbf{y}_k(s))||\, ds.$$

מכיוון שגרף הפונקציה $\mathbf{y}_k(x)$ מונח בתיבה B, נובע כי $||\mathbf{f}(s, \mathbf{y}_k(s))|| \le M$ ולפיכך

$$\begin{aligned} ||\mathbf{y}_{k+1}(x) - y_0|| &\le \int_{x_0}^{x} ||\mathbf{f}(s, \mathbf{y}_k(s))||\, ds \le \int_{x_0}^{x} M\, ds \\ &= M(x - x_0) \le Mh \le b. \end{aligned} \tag{3.11}$$

לכן סדרת הפונקציות $\mathbf{y}_k(x)$ מוגדרת היטב לכל $x_0 \le x \le x_0 + h$ וכולן רציפות שם.

שלב 3. עכשיו נוכיח כי סדרת הפונקציות $\mathbf{y}_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots$, מתכנסת במידה שווה לגבול מסוים על הקטע $x_0 \le x \le x_0 + h$. לשם זה נתרגם את סדרת הפונקציות לטור של פונקציות בצורה

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k(x) &= \mathbf{y}_0(x) + \big(\mathbf{y}_1(x) - \mathbf{y}_0(x)\big) + \cdots + \big(\mathbf{y}_k(x) - \mathbf{y}_{k-1}(x)\big) \\ &= \mathbf{y}_0(x) + \sum_{i=1}^{k} \big(\mathbf{y}_i(x) - \mathbf{y}_{i-1}(x)\big) \end{aligned}$$

ונוכיח כי טור הפונקציות $\sum \big(\mathbf{y}_i(x) - \mathbf{y}_{i-1}(x)\big)$ מתכנס במידה שווה. תחילה נוכיח כי קיים החסם

$$||\mathbf{y}_k(x) - \mathbf{y}_{k-1}(x)|| \le 2b\, \frac{L^{k-1}(x - x_0)^{k-1}}{(k-1)!}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

ההוכחה שוב בעזרת אינדוקציה. עבור $k = 1$ קיים $||\mathbf{y}_1(x) - \mathbf{y}_0(x)|| \le 2b$, כי הגרפים של שתי הפונקציות מונחים בתיבה B שגובהה $2b$. נניח כי אי השוויון הוכח עד k. נחסיר זה מזה את השוויונות

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1}(x) &= \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_k(s))\, ds, \\ \mathbf{y}_k(x) &= \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_{k-1}(s))\, ds. \end{aligned}$$

מתקבל

$$\mathbf{y}_{k+1}(x) - \mathbf{y}_k(x) = \int_{x_0}^{x} \big(\mathbf{f}(s, \mathbf{y}_k(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_{k-1}(s))\big) ds,$$

מכאן

$$\begin{aligned} ||\mathbf{y}_{k+1}(x) - \mathbf{y}_k(x)|| &\le \int_{x_0}^{x} ||\, \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_k(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_{k-1}(s))\, ||\, ds \\ &\le \int_{x_0}^{x} L\, ||\mathbf{y}_k(s) - \mathbf{y}_{k-1}(s)||\, ds \\ &\le L \int_{x_0}^{x} 2b\, \frac{L^{k-1}(s-x_0)^{k-1}}{(k-1)!}\, ds = 2b\, \frac{L^k (x-x_0)^k}{k!}, \end{aligned}$$

כנדרש. בגלל ההגבלה על ערכי x, $0 \le x - x_0 \le h$,

$$||\mathbf{y}_{i+1}(x) - \mathbf{y}_i(x)|| \le 2b \frac{L^i h^i}{i!}.$$

אך טור המספרים החיוביים $\sum_0^\infty (Lh)^i/i!$ מתכנס לכל L, h (למעשה זהו טור אקספוננציאלי שסכומו $\exp(Lh)$), לכן לפי קריטריון ההתכנסות של ויירשטראס טור הפונקציות

$$\sum_1^\infty \big(\mathbf{y}_i(x) - \mathbf{y}_{i-1}(x)\big)$$

מתכנס במידה שווה בקטע הנזכר למעלה. מכאן אנו מסיקים כי סדרת הפונקציות $\mathbf{y}_k(x)$ מתכנסת במידה שווה בקטע $x_0 \le x \le x_0 + h$ ופונקציית הגבול $\lim_{k\to\infty} \mathbf{y}_k(x) = \mathbf{y}(x)$ רציפה שם. יתר על כן, הגרף של $\mathbf{y}(x)$ מוכל בתיבה B.

שלב 4. $\mathbf{f}(s, \mathbf{y})$ רציף במידה שווה בתיבה לכן גם $\mathbf{f}(s, \mathbf{y}_k(x))$ מתכנס במידה שווה. הודות להתכנסות זו נעבור במשוואה (3.10) לגבול כאשר $k \to \infty$ ונקבל כי $\mathbf{y}(x)$ מקיים את המשוואה האינטגרלית

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y_0} + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\, ds.$$

האינטגרנד $\mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))$ רציף לכן $\mathbf{y}(x)$ שבאגף שמאל בעל נגזרת רציפה. כשגוזרים את המשוואה האינטגרלית מקבלים $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$ וכמובן ש־ $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0}$.

בזה סיימנו להוכיח קיום פתרון עבור $x_0 \le x \le x_0 + h$. עבור $x_0 - h \le x \le x_0$ ההוכחה דומה.

שלב 5. נעבור להוכחת היחידות. נניח כי לבעיית ההתחלה (3.8) יש שני פתרונות, $\mathbf{y}(x)$, $\mathbf{z}(x)$ ולהם תחום הגדרה משותף מסוים. כל אחד מהם מקיים את אותה משוואה אינטגרלית

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y_0} + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\, ds,$$

$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{y_0} + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(s, \mathbf{z}(s))\, ds.$$

על ידי החסרת המשוואות האינטגרליות זה מזה,

$$\begin{aligned} ||\mathbf{y}(x)-\mathbf{z}(x)|| &\le \int_{x_0}^{x} ||\,\mathbf{f}(s,\mathbf{y}(s))-\mathbf{f}(s,\mathbf{z}(s))\,||\,ds \\ &\le L\int_{x_0}^{x} ||\mathbf{y}(s)-\mathbf{z}(s)||\,ds. \end{aligned} \tag{3.12}$$

נעבוד בקטע מסוים $[x_0,x_0+\ell]$, שארכו ייקבע מאוחר יותר. מכיון ש־$||\mathbf{y}(x)-\mathbf{z}(x)||$ פונקציה רציפה בקטע $[x_0,x_0+\ell]$, תהי x_1 נקודה בה היא מקבלת ערך מקסימלי:

$$||\mathbf{y}(x_1)-\mathbf{z}(x_1)|| = \max_{[x_0,x_0+\ell]} ||\mathbf{y}(x)-\mathbf{z}(x)||\,.$$

אז

$$\begin{aligned} ||\mathbf{y}(x_1)-\mathbf{z}(x_1)|| &\le L\int_{x_0}^{x_1} \max ||\mathbf{y}(s)-\mathbf{z}(s)||\,ds \\ &\le L\ell\,||\mathbf{y}(x_1)-\mathbf{z}(x_1)||\,. \end{aligned}$$

אם מחליטים כי הקטע $[x_0,x_0+\ell]$ בעל אורך $\ell < 1/L$, אז אי השוויון האחרון מביא לסתירה אלא אם כן

$$||\mathbf{y}(x_1)-\mathbf{z}(x_1)|| = \max_{[x_0,x_0+\ell]} ||\mathbf{y}(x)-\mathbf{z}(x)|| = 0.$$

מכאן מסיקים כי $\mathbf{y}(x)\equiv\mathbf{z}(x)$ לפחות בקטע $[x_0,x_0+\ell]$.

יהי x_2 סופרמום הערכים מימין ל־x_0 שעבורם $\mathbf{y}(x)=\mathbf{z}(x)$. הודות לרציפות הפתרונות גם $\mathbf{y}(x_2)=\mathbf{z}(x_2)$. נקח את $x=x_2$ כנקודת התחלה חדשה. לפי מה שכבר הוכח למעלה יש קטע מסוים מימין ל־x_2 בו $\mathbf{y}(x)=\mathbf{z}(x)$, בסתירה להגדרת x_2. מכאן נובע כי $\mathbf{y}(x),\ \mathbf{z}(x)$ זהים בכל תחום הגדרתם. □

נחזור לבעיות ההתחלה שבתחילת הפרק ונדון בהם שנית לאור טענות משפטי הקיום.

דוגמא 3.8 לבעיית ההתחלה $y'=y^{1/3}$, $y(0)=0$ שבדוגמא 3.2. מצאנו פתרונות רבים. ואכן אגף ימין של המשוואה, $f(x,y)=y^{1/3}$, רציף לכל x,y אך אין הוא מקיים תנאי ליפשיץ בסביבת $y=0$ כי

$$|y^{1/3}-0^{1/3}| \le L|y-0|$$

בלתי אפשרי כאשר $y\to 0$. לכן תנאי משפט 3.9 אינם מתקיימים וחוסר היחידות אינו מפתיע.

נסתכל עתה בבעיית התחלה דומה,

$$y'=y^{1/3}+1, \qquad y(0)=0.$$

גם במשוואה זו הפונקציה $f(x,y)=y^{1/3}+1$ רציפה ואינה מקיימת תנאי ליפשיץ בקרבת $y=0$. אך על ידי הפרדת משתנים

$$\int_0^y \frac{dy}{y^{1/3}+1} = \int_0^x dx.$$

המכנה אינו מתאפס קרוב ל־$y=0$, לכן אין פתרון סינגולרי העובר דרך $(x,y)=(0,0)$. האינטגרל באגף שמאל קיים (הצב $y=z^3$ וחשב אותו!) ונקבל פתרון יחיד הנתון על ידי פונקציה סתומה מהצורה

$$G(y)=x.$$

כאן $G'(y)=\dfrac{1}{y^{1/3}+1}$, $G'(0)=1>0$, לכן G מונוטוני עולה ולפי משפט הפונקציות ההפוכות קיים פתרון יחיד $y=G^{-1}(x)$, גזיר בסביבת $(0,0)$.

דוגמא זו מראה כי תנאי ליפשיץ בו השתמשנו בהוכחת משפט הקיום והיחידות של פיקרד־לינדלף הוא תנאי מספיק אך לאו דווקא הכרחי ליחידות הפתרון. □

דוגמא 3.9 בדוגמא 3.3 טיפלנו בבעיית ההתחלה $y'=y^2$, $y(2)=1$. אגף ימין, $f(x,y)=y^2$, רציף בכל המישור ומקיים תנאי ליפשיץ

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|=|y_2^2-y_1^2|=|y_2+y_1||y_2-y_1|\le L|y_2-y_1|$$

בכל קבוצה חסומה. נחפש תיבה אופטימלית סביב נקודת ההתחלה $(2,1)$,

$$B=\{|x-2|\le a,\ |y-1|\le b\},$$

שעבורה $h=\min\{a,b/M\}$ גדול ככל האפשר. כאן $M=\max\limits_B|f(x,y)|=(1+b)^2$ לכן $h=\min\{a,b/(1+b)^2\}$. אולם ערכו הגדול ביותר של הביטוי $b/(1+b)^2$ הוא $1/4$ והוא מתקבל עבור $b=1$. נבחר a גדול כרצוננו ונקבל $h=1/4$. לפיכך המשפט מבטיח קיום פתרון עבור $|x-2|\le 1/4$, ז"א $7/4\le x\le 9/4$.

מצד שני מצאנו כי לבעיית ההתחלה פתרון $y=1/(3-x)$ בקטע $(-\infty,3)$. השוני בין הבטחת המשפט לבין התוצאה המדויקת אינו מפתיע. הערכת המשפט נכונה לכל המשוואות הדיפרנציאליות ולכן אי אפשר לצפות כי הערכה זו תהיה מדויקת למשוואה ספציפית. □

בהוכחות משפט הקיום ראינו כי למרות שהמשוואה הדיפרנציאלית מוגדרת, רציפה ומקיימת תנאי ליפשיץ בתיבה

$$B=\{|x-x_0|\le a,\ ||\mathbf{y}-\mathbf{y_0}||_\infty\le b\}\subset R^{n+1},$$

קיום הפתרון מובטח רק בקטע $|x-x_0|\le h$ עם $h\le a$, ולא דווקא בכל הקטע $|x-x_0|\le a$. מדוע והיכן חדל פתרון מלהתקיים?

משפט 3.10 נניח שהמשוואה הדיפרנציאלית $\mathbf{y}'(x)=\mathbf{f}(x,\mathbf{y}(x))$ מקיימת את הנחות משפט 3.9 בתחום D ובנוסף על כך $\mathbf{f}(x,\mathbf{y}(x))$ חסום בתחום D.

אם פתרון $\mathbf{y}(x)$ של המשוואה מוגדר בקטע (x_0,x_1) אז קיים הגבול $\lim\mathbf{y}(x)=\mathbf{y}_1$ כאשר x מתקרב ל־x_1 משמאל. אם הנקודה $(x_1,\mathbf{y}_1)$ מוכלת בתחום D אז הפתרון ניתן להמשכה מימין ל־$x=x_1$. במילים אחרות, פתרון של משוואה דיפרנציאלית אינו יכול "להסתיים" בנקודה הנמצאת בפנים התחום בו הנחות משפט הקיום והיחידות מתקיימות.

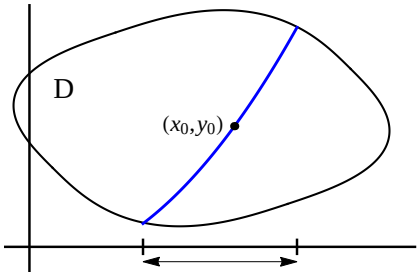
ובאמת, על פי המשוואה האינטגרלית אם $x_0 < x < \hat{x} < x_1$ אז מתקיים

$$||\mathbf{y}(\hat{x}) - \mathbf{y}(x)|| \leq \int_x^{\hat{x}} ||\,\mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\,||\; ds \leq M|\hat{x} - x|.$$

לכן על פי קריטריון Cauchy, כאשר x שואף ל־x_1 משמאל, הגבול $\lim \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_1$ קיים.

לפי ההנחה הנקודה $(x_1, \mathbf{y}_1)$ נמצאת בתחום D בו משפט הקיום והיחידות בר תוקף, ולכן קיים פתרון המוגדר בסביבה מסוימת מימין ומשמאל ל־x_1. "נדביק" פתרון חדש זה אל $y(x)$ ונקבל המשכה המוגדרת "עוד קצת" מימין ל־x_1. לכן $(x_1, \mathbf{y}_1)$ אינה נקודת הסיום של הפתרון. □

איור 3.4 מדגים את תחום ההגדרה של משוואה דיפרנציאלית במישור (x, y) ואת תחום הגדרתו המקסימלי של פתרון מסוים.



איור 3.4: תחום ההגדרה של משוואה, גרף של פתרון ותחום הגדרתו המקסימלי של הפתרון

3.4 קיום של פתרון גלובלי

בסעיפים הקודמים ראינו כי פתרון של בעיית התחלה אינו חייב להתקיים בכל מקום בו המשוואה הדיפרנציאלית מוגדרת. פתרון המוגדר רק בסביבה מוגבלת של נקודת ההתחלה ייקרא פתרון לוקלי. טבעי לשאול באיזה תנאים יהיה קיים פתרון גלובלי אשר מוגדר לכל ערך של x שעבורו המשוואה מוגדרת?

כשבוחנים מחדש את מהלך ההוכחה של משפט הקיום של פיקרד־לינדלף, רואים כי המקום היחיד המטיל מגבלה על תחום הקיום של פתרון הוא במשוואה (3.11) בשלב 2 של הוכחת המשפט. במקום זה השתמשנו בהנחה כי $h \leq b/M$ כדי להבטיח כי האיטרציות לא תברחנה מתוך התיבה B בכיוון האנכי. אך דרישה זו הופכת למיותרת אם התיבה מוחלפת בפס אנכי אינסופי

$$B = \{\ |x - x_0| \leq a, \quad \text{בלתי מוגבל } \mathbf{y}\ \} \subset R^{n+1},$$

בו אין מגבלה על הממד האנכי. במקרה אין צורך להוכיח דבר על $||\mathbf{y}_k(x) - y_0||$ וגם אין צורך בגדלים $b/M,\ M = \max ||\mathbf{f}(x, \mathbf{y})||$. נקבל וריאציה על משפט הקיום של פיקרד־לינדלף:

משפט 3.11 נתונה מערכת המשוואות $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ ותנאי ההתחלה $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0}$ בה הפונקציה $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ רציפה בפס האינסופי הסגור

$$B = \{a \le x \le b, \quad \text{בלתי מוגבל } \mathbf{y}\ \} \subset R^{n+1},$$

ו־$a \le x_0 \le b$. נניח כי קיים קבוע L כך שבפס B מתקיים תנאי ליפשיץ אחיד

$$||\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})|| \le L||\mathbf{y} - \mathbf{z}||, \qquad \text{לכל } \mathbf{y},\ \mathbf{z}$$

אז לבעיית ההתחלה קיים פתרון $\mathbf{y}(x)$ בעל נגזרת רציפה אשר מוגדר בכל הקטע $a \le x \le b$ ופתרון זה הוא יחיד.

הוכחת משפט זה דומה להוכחת משפט 3.9, למעט השמטת שלב 2. את סימון הקטע $[x_0, x_0 + h]$ נחליף בקטע $[x_0, b]$. $\square$

ממבט ראשון נראה כי משפט 3.11 משפר באופן ניכר את תוצאות משפט 3.9. אך לשיפור זה יש מחיר. תנאי ליפשיץ חייב להתקיים לכל $\mathbf{y},\ \mathbf{z}$ ולכל $a \le x \le b$. בין היתר, $||\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{0})|| \le L||\mathbf{y}||$ כלומר

$$||\mathbf{f}(x, \mathbf{y})|| \le ||\mathbf{f}(x, \mathbf{0})|| + L||\mathbf{y}||$$

כלומר $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ רשאי לגדול לכל היותר בקצב לינארי! למשל, המשוואה $y' = y^2$ אשר מופיעה בדוגמא 3.3 אינה יכולה לקיים דרישה זו לכל y.

המצב יכול להיות בעייתי יותר כאשר המשוואה מוגדרת בפס אינסופי פתוח. נתבונן למשל בדוגמא הבאה:

דוגמא 3.10 היכן מוגדר פתרון של בעיית התחלה

$$y' = \tan(x)\sin(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad -\pi/2 < x_0 < \pi/2 \quad ?$$

אגף ימין $f(x, y) = \tan(x)\sin(y)$ של המשוואה רציף בפס האינסופי הפתוח $\{-\pi/2 < x < \pi/2,\ -\infty < y < \infty\}$. כדי לבדוק את קיום תנאי ליפשיץ יש להתבונן ב־

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |\tan x| \cdot |\sin y_2 - \sin y_1| \le |\tan x| \cdot |y_2 - y_1|.$$

תנאי ליפשיץ אינו יכול להתקיים בכל הפס הפתוח כי $\tan x$ מקבל שם ערכים גדולים כרצוננו. אולם תנאי ליפשיץ כן מתקיים כאשר x מוגבל לקטע סגור כלשהו $[\alpha, \beta] \subset (-\pi/2, \pi/2)$, עם קבוע ליפשיץ $L = \max\limits_{\alpha \le x \le \beta} |\tan x|$. למרבה המזל, זה מספיק כדי להבטיח קיום פתרון גלובלי בכל הקטע הפתוח $-\pi/2 < x < \pi/2$. ואמנם, עלינו להראות כי לכל נקודה נתונה $x_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$, הפתרון המתחיל ב־x_0 מגיע אל x_1. כדי להוכיח זאת נבחר קטע סגור $[\alpha, \beta]$ כך ש־

$$x_0, x_1 \in [\alpha, \beta] \subset (-\pi/2, \pi/2),$$

נקח תנאי ליפשיץ המתאים לפס האינסופי הסגור $\{-\alpha \le x \le \beta,\ -\infty < y < \infty\}$ ונוכל להסיק לפי משפט 3.11 כי יש פתרון היוצא מ־x_0 ומוגדר עבור x_1. נימוק זה נכון לכל נקודה x_1 בקטע הפתוח. הודות ליחידות, מדובר בפתרון יחיד המוגדר בכל הקטע $(-\pi/2, \pi/2)$.

הנמקה דומה מתאימה גם לכל המרחב.

דוגמא 3.11 מהו תחום ההגדרה המקסימלי של פתרון של בעיית התחלה

$$y' = x^7 \sin(y), \quad y(x_0) = y_0 \quad ?$$

אגף ימין של המשוואה רציף לכל x, y, ותנאי ליפשיץ מסוים קיים בכל פס אינסופי סגור $\{\alpha \le x \le \beta,\ -\infty < y < \infty\}$, כי

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |x^7| \cdot |\sin y_2 - \sin y_1| \le \max\{|\alpha|^7, |\beta|^7\} \cdot |y_2 - y_1|.$$

אך תנאי ליפשיץ לא קיים בכל מישור x, y. על כן פתרון בעיית ההתחלה $y(x)$ מוגדר בכל קטע $\alpha \le x \le \beta$, ולפי השיקול שלמעלה $y(x)$ קיים גם לכל $-\infty < x < \infty$.

נסכם עקרון זה במשפט הבא:

משפט 3.12 נתונה בעיית ההתחלה $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$, $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0}$ בה הפונקציה $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ רציפה בפס האינסופי הפתוח $B = \{a < x < b,\ \ ||\mathbf{y}|| < \infty\}$ עם $-\infty \le a < b \le \infty$, ו־$x_0 \in (a, b)$.

נניח כי לכל פס סגור $\{\alpha \le x \le \beta,\ \ ||\mathbf{y}|| < \infty\}$ המוכל בפס הפתוח B קיים קבוע $L_{\alpha,\beta}$ כך שבפס סגור זה מתקיים תנאי ליפשיץ $||\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})|| \le L_{\alpha,\beta}||\mathbf{y} - \mathbf{z}||$. אז לבעיית ההתחלה קיים פתרון $\mathbf{y}(x)$ אשר מוגדר בכל הקטע הפתוח $a < x < b$ ופתרון זה הוא יחיד.

ואכן, לפי הנימוק שלמעלה, פתרון $\mathbf{y}(x)$ המתחיל בנקודה $x = x_0$ מגיע לכל נקודה נתונה $x_1 \in (a, b)$. יש לשים לב כי לא חייב להיות קבוע ליפשיץ משותף המתאים לכל הפס הפתוח B.

3.5 הוכחת קיום בעזרת העתקה מכווצת

הוכחה נוספת של קיום ויחידות מתקבלת מעקרון טופולוגי כללי.

הגדרה 3.13 מרחב מטרי היא קבוצה M בה מוגדרת פונקציית מרחק ("מטריקה") $d(p, q)$ המקיימת לכל $p, q, r \in M$ את התכונות

1. (חיוביות) $d(p, q) \ge 0$ ושוויון קיים אך ורק כאשר $p = q$,

2. (סימטריה) $d(p,q) = d(q,p)$,

3. (אי שוויון המשולש) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$.

כהכללה למקובל בחשבון דיפרנציאלי, סדרת נקודות במרחב המטרי M נקראת סדרת *Cauchy* אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך ש־ $d(p_n, p_m) < \varepsilon$ לכל $n, m > N$.

מרחב מטרי נקרא מרחב מטרי שלם אם כל סדרת Cauchy מתכנסת לגבול אשר שייך ל־M.

דוגמא 3.12 R^n הוא מרחב מטרי שלם עם פונקציית המרחק $d(p,q) = ||p-q||$. אולם מרחב מטרי אינו חייב להיות מרחב לינארי ולא כל פונקציית מרחק נגזרת דווקא מנורמה.

דוגמא 3.13 אוסף הפונקציות הרציפות בקטע $[a,b]$, $C[a,b]$, עם פונקציית המרחק

$$d(f,g) = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$

הוא מרחב מטרי שלם. ואכן, $d(f_n, f_m) < \varepsilon$ משמעותו התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות על $[a,b]$, ולכן גם הגבול הוא פונקציה רציפה ושייך למרחב הנדון.

נגדיר שני מושגים נוספים:

הגדרה 3.14 העתקה T מ־M לתוך M, $T : M \to M$, נקראת העתקה מכווצת אם קיים קבוע k, $0 \leq k < 1$, כך שלכל $p, q \in M$ קיים

$$d(Tp, Tq) \leq k d(p,q).$$

$p \in M$ נקרא נקודת שבת (fixed point) אם $Tp = p$.

משפט 3.15 (משפט נקודת השבת של Banach) להעתקה מכווצת על מרחב מטרי שלם קיימת נקודת שבת אחת ויחידה.

הוכחה. נבחר אלמנט כלשהו p_0 של M ונגדיר סדרה $p_0, p_1, \ldots$ על ידי

$$p_n = Tp_{n-1} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

על מנת להראות שזו סדרת Cauchy נעריך את $d(p_n, p_m)$ מלמעלה. לפי אי שוויון המשולש עבור $m > n$,

$$d(p_n, p_m) \leq d(p_n, p_{n+1}) + d(p_{n+1}, p_{n+2}) + \cdots + d(p_{m-1}, p_m) \ .$$

מצד שני,

$$d(p_i, p_{i+1}) = d(Tp_{i-1}, Tp_i) \leq k\, d(p_{i-1}, p_i) \leq \cdots \leq k^i d(p_0, p_1)$$

לכן

$$d(p_n,p_m) \le \left(k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{m-1}\right) d(p_0,p_1) \le \frac{k^n}{1-k}\, d(p_0,p_1)\,.$$

מכיוון ש־$k<1$, האבר האחרון יהיה קטן כרצוננו עבור $m>n>N$ די גדולים ולכן $\{p_n\}$ סדרת Cauchy. אך M מרחב מטרי שלם, לכן הגבול $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ קיים. נעבור לגבול בשוויון $p_n = Tp_{n-1}$. ההעתקה T מכווצת, לכן היא בפרט רציפה ולפיכך

$$p = \lim p_n = \lim Tp_{n-1} = T\lim p_{n-1} = Tp$$

ו־p היא נקודת שבת.

אם להעתקה T יש נקודת שבת נוספת q, אז

$$0 \le d(p,q) = d(Tp,Tq) \le kd(p,q).$$

מכיוון ש־$0\le k<1$, נובע מכאן כי $d(p,q)=0$ ו־$p=q$. יחידות נקודת השבת הוכחה בזה. $\square$

דוגמא 3.14 אי אפשר להחליף את אי השוויון $d(Tp,Tq)\le kd(p,q)$, $0\le k<1$, באי השוויון החלש יותר $d(Tp,Tq)<d(p,q)$. כי למשל, אם $M=R$ ו־ $T(x)=\sqrt{x^2+1}$ אז

$$|T(x)-T(y)| = |\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}| = \left|\frac{(x-y)(x+y)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\right| < |x-y|\,,$$

אך אין אף נקודת שבת המקיימת $T(x)=x$. $\square$

עכשיו אנו מוכנים לתת הוכחה נוספת לטענת הקיום והיחידות שבמשפט 3.9. את המשוואה האינטגרלית

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y_0} + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(s,\mathbf{y}(s))\,ds. \tag{3.13}$$

ניתן לכתוב בצורה $\mathbf{y}=T(\mathbf{y})$ כאשר ההעתקה $T: C[a,b]\to C[a,b]$ מוגדרת על ידי

$$T\mathbf{y} = \mathbf{y_0} + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(s,\mathbf{y}(s))\,ds.$$

אם נבחר מטריקה $d(\mathbf{y},\mathbf{z}) = \sup_{a\le x\le b} ||\mathbf{y}(x)-\mathbf{z}(x)||$, נקבל מרחב מטרי שלם, ונותר רק להראות כי T אופרטור מכווץ.

ובאמת, אם נצמצם את תחום ההגדרה של הפונקציות לקטע $[x_0,x_0+h]$, אז כמו במשוואה (3.12) נקבל

$$\begin{aligned} ||T\mathbf{y}(x)-T\mathbf{z}(x)|| &\le \int_{x_0}^{x} ||\mathbf{f}(s,\mathbf{y}(s))-\mathbf{f}(s,\mathbf{z}(s))||\,ds \\ &\le L\int_{x_0}^{x} ||\mathbf{y}(s)-\mathbf{z}(s)||\,ds \\ &\le Lh\,\sup ||\mathbf{y}(x)-\mathbf{z}(x)||\,, \end{aligned} \tag{3.14}$$

כלומר

$$d(T\mathbf{y}, T\mathbf{z}) \leq Lh\, d(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

אם אורך הקטע h די קצר כך ש־$Lh < 1$, אז T העתקה מכווצת ולה נקודת שבת יחידה, כנדרש. $\square$

3.6 משפט קיום למשוואות ממעלה גבוהה

למען השלמות ננסח גם משפט קיום ויחידות למשוואה ממעלה n הרשומה בצורה מנורמלת ו־n תנאי התחלה,

$$\begin{aligned} &y^{(n)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ &y^{(i)}(x_0) = \alpha_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{3.15}$$

הבעיה (3.15) ניתנת לתרגום למערכת של n משוואות ממעלה ראשונה מהצורה (3.6)־(3.7). אם נסמן

$$u_1(x) = y(x), \quad u_2(x) = y'(x), \quad \ldots \quad u_n(x) = y^{(n-1)}(x),$$

אז מתקבלת מערכת המשוואות

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2, \\ &\vdots \\ u_{n-1}' &= u_n, \\ u_n' &= g(x, u_1, \ldots, u_n) \end{aligned} \tag{3.16}$$

ותנאי ההתחלה יהפכו ל־

$$u_i(x_0) = \alpha_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.17}$$

(3.16) היא מערכת מהצורה (3.8) עם

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ g(x, u_1, \ldots, u_n) \end{pmatrix}.$$

ננצל את תוצאות משפט 3.9 לבעיה זו. מכיון שהרכיבים הראשונים לינאריים, עלינו להניח רק כי הפונקציה $g(x, u_1, \ldots, u_n) = g(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ רציפה בכל $n+1$ המשתנים שלה ומקיימת תנאי ליפשיץ ביחס ל־n המשתנים $(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.

משפט 3.16 אם הפונקציה $g(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ רציפה בסביבה מסוימת של הנקודה $(x_0, \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in R^{n+1}$ ומקיימת תנאי ליפשיץ ביחס ל־n המשתנים $(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$,

אז לבעיית ההתחלה (3.16) - (3.17) קיים בסביבה מסוימת של x_0 פתרון $y(x) \in C^n$, ופתרון זה הוא יחיד.
אם $g(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ רציף בפס אינסופי

$$B = \left\{ a \le x \le b,\ -\infty < y, y', \ldots, y^{(n-1)} < \infty \right\} \subset R^{n+1},$$

כאשר $a \le x_0 \le b$, ומקיים בפס זה תנאי ליפשיץ גלובלי ביחס ל־$(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, אז $y(x) \in C^n[a, b]$.

3.7 הלמה של Gronwall

הטענה הבאה תספק לנו הוכחה נוספת ליחידות הפתרון בהנחת תנאי ליפשיץ. אולם יש לה שימושים נוספים מועילים ולכן נוכיח אותה באופן כללי.

יהי $\mathbf{y}(x)$ פתרון של בעיית ההתחלה (3.8),

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0},$$

ו־ $\mathbf{z}(x)$ פתרון המקיים את אותה משוואה דיפרנציאלית אך תנאי התחלה אחר,

$$\mathbf{z}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{z}), \qquad \mathbf{z}(x_0) = \mathbf{z_0}.$$

ושניהם מוגדרים בתחום הגדרה משותף מסוים. $\mathbf{y}(x),\ \mathbf{z}(x)$ מקימים בהתאמה את המשוואות האינטגרליות

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y_0} + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\, ds,$$
$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{z_0} + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(s, \mathbf{z}(s))\, ds.$$

על ידי החסרת המשוואות האינטגרליות זה מזה,

$$\mathbf{y}(x) - \mathbf{z}(x) = (\mathbf{y_0} - \mathbf{z_0}) + \int_{x_0}^{x} \big(\mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{z}(s))\big) ds$$

ובדומה ל־ (3.12),

$$\begin{aligned} 0 \le ||\mathbf{y}(x) - \mathbf{z}(x)|| &\le ||\mathbf{y_0} - \mathbf{z_0}|| + \int_{x_0}^{x} ||\, \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{z}(s))\, ||\, ds \\ &\le ||\mathbf{y_0} - \mathbf{z_0}|| + L \int_{x_0}^{x} ||\mathbf{y}(s) - \mathbf{z}(s)||\, ds. \end{aligned} \tag{3.18}$$

לשם הנוחיות נסמן שני גדלים סקלריים $u(x) = ||\mathbf{y}(x) - \mathbf{z}(x)||$, $m = ||\mathbf{y_0} - \mathbf{z_0}||$. עתה אנו מוכנים לנסח ולהוכיח את הלמה של גרונוול:

למה 3.17)הלמה של גרונוול, Gronwall's lemma[5](אם $m, L \geq 0$ ו־

$$0 \leq u(x) \leq m + L \int_{x_0}^{x} u(s)\, ds, \qquad x_0 < x, \tag{3.19}$$

אז

$$0 \leq u(x) \leq m e^{L(x-x_0)}, \qquad x_0 < x.$$

בפרט אם $m = 0$ אז $u(x) \equiv 0$ מימין ל־x_0.

הוכחה. נסמן את האינטגרל שבאגף ימין כ־ $w(x) = \int_{x_0}^{x} u(s)\, ds$. כמובן שמתקיים $w'(x) = u(x)$ ואי השוויון הנתון הופך בסימון זה ל־

$$0 \leq w'(x) \leq m + Lw(x).$$

אי השוויון $w'(x) - Lw(x) \leq m$ מזכיר משוואה דיפרנציאלית לינארית לא הומוגנית מסדר ראשון, ואכן נטפל בו באופן דומה. כופלים את שני אגפי אי השוויון בגורם אינטגרציה e^{-Lx} ומקבלים

$$\left(e^{-Lx} w(x)\right)' = e^{-Lx}\left(w'(x) - Lw(x)\right) \leq e^{-Lx} m.$$

אינטגרציה על הקטע $[x_0, x]$ מביאה ל־

$$e^{-Lx} w(x) - e^{-Lx_0} w(x_0) \leq -\frac{m}{L}\left(e^{-Lx} - e^{-Lx_0}\right)$$

אך $w(x_0) = 0$, ולאחר ארגון מחדש מקבלים

$$w(x) \leq \frac{m}{L}\left(e^{L(x-x_0)} - 1\right).$$

כזכור $w(x)$ מסמן את האינטגרל שבאגף ימין של (3.19). נציב בחזרה את $w(x)$ ל־ (3.19) ונקבל $0 \leq u(x) \leq m + L \cdot \frac{m}{L}\left(e^{L(x-x_0)} - 1\right)$. מכאן נובעת מסקנת הלמה.
□

אם ניישם את הלמה של גרונוול על אי השוויון (3.18) נקבל עבור שני פתרונות המתאימים לשני תנאי התחלה את ההערכה

$$||\mathbf{y}(x) - \mathbf{z}(x)|| \leq ||\mathbf{y_0} - \mathbf{z_0}||\, e^{L(x-x_0)}.$$

אי שוויון זה בתוקף בקטע מימין ל־x_0 בו תנאי ליפשיץ תקף ושני הפתרונות מוגדרים והוא מהווה חסם מלעיל לקצב ההתרחקות של שני פתרונות זה מזה. משני צדדי x_0 ההערכה תכתב כ־

$$||\mathbf{y}(x) - \mathbf{z}(x)|| \leq ||\mathbf{y_0} - \mathbf{z_0}||\, e^{L|x-x_0|}. \tag{3.20}$$

מכאן מתקבלת הוכחה נוספת ליחידות הפתרון של בעיית התחלה:

[5] Thomas Gronwall, 1877-1932

מסקנה 3.18 אם $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ רציף ומקיים תנאי ליפשיץ אז לבעיית ההתחלה (3.8) יש לכל היותר פתרון אחד.

כי אם שני פתרונות $\mathbf{y}(x),\mathbf{z}(x)$ מקיימים את אותו תנאי התחלה $\mathbf{y}(x_0)=\mathbf{z}(x_0)$ אז מ־(3.20) מתקבל $\mathbf{y}(x)\equiv\mathbf{z}(x)$. □

דוגמא 3.15 הראה כי אם $\mathbf{y}(x)$ הוא פתרון לבעיית ההתחלה (3.8) ו־$\mathbf{z}(x)$ הוא ε־קרוב לאותה בעיית התחלה על $[a,b]$ אז $||\mathbf{z}(x)-\mathbf{y}(x)||\le\varepsilon(b-a)e^{L(b-a)}$.

כי יהיו נתונים $\mathbf{y}'(x)=\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$, $\mathbf{z}'(x)-\mathbf{f}(x,\mathbf{z})=\varepsilon(x)$, $||\varepsilon(x)||\le\varepsilon$ וגם $\mathbf{y}(x_0)=\mathbf{z}(x_0)=\mathbf{y_0}$. אז לאחר אינטגרציה על $[x_0,x]$ והחסרה,

$$\begin{aligned}||\mathbf{z}(x)-\mathbf{y}(x)||&\le\int_{x_0}^{x}||\,\mathbf{f}(s,\mathbf{z}(s))-\mathbf{f}(s,\mathbf{y}(s))\,||\,ds+\varepsilon(x-x_0)\\&\le L\int_{x_0}^{x}||\mathbf{z}(s)-\mathbf{y}(s))||\,ds+\varepsilon(b-a)\end{aligned}$$

והמסקנה נובעת מאי שוויון גרונוול)למה 3.17(עם $m=\varepsilon(b-a)$. □

תרגיל 3.16 הראה כי אם $\mathbf{y}(x)$ ו־$\mathbf{z}(x)$ הם בהתאמה פתרונות בעיות ההתחלה

$$\begin{aligned}\mathbf{y}'(x)&=\mathbf{f}(x,\mathbf{y}),\qquad\mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y_0},\\\mathbf{z}'(x)&=\mathbf{g}(x,\mathbf{z}),\qquad\mathbf{z}(x_0)=\mathbf{z_0},\end{aligned}$$

אז

$$||\mathbf{z}(x)-\mathbf{y}(x)||\le||\mathbf{z}_0-\mathbf{y}_0||e^{L|x-x_0|}+\frac{M}{L}\left(e^{L|x-x_0|}-1\right)$$

כאשר $M=\sup||\mathbf{g}(x,\mathbf{y})-\mathbf{f}(x,\mathbf{y})||$. □

תרגיל 3.17 הוכח את ההכללה הבאה של הלמה של גרונוול: אם $h(x)\ge0$ ו־

$$u(x)\le g(x)+\int_{x_0}^{x}h(s)u(s)\,ds,\qquad x_0\le x,$$

אז

$$u(x)\le g(x)+\int_{x_0}^{x}g(s)h(s)\exp\left(\int_s^x h(r)\,dr\right)\,ds.$$

רמז. סמן $w(x)=\int_{x_0}^{x}h(s)u(s)\,ds$ והמשך כמו בהוכחת למה (3.17). □

תרגיל 3.18 לפי מודל אי השוויון של גרונוול אפשר ליצור הכללות רבות. מצא, למשל, חסם מלעיל ל־$y(x)$ כאשר

$$0\le y(x)\le K+\int_0^x y^2(s)\,ds,\qquad 0\le x.$$

שימוש נוסף לאי השוויון של גרונוול יימצא בסעיף הבא במשפט 3.20.

3.8 תלות פתרונות בפרמטר ובתנאי ההתחלה

לעיתים משוואה דיפרנציאלית תלויה גם בפרמטר ואנו מעונינים לדעת על תלות הפתרונות שלה בפרמטר. המשפט הבא מספק אינפורמציה על מצב זה.

משפט 3.19 נתונה מערכת המשוואות הדיפרנציאליות ותנאי ההתחלה

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mu), \qquad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0}.$$

נניח כי הפונקציה $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mu)$ רציפה ב־ $(x, \mathbf{y}, \mu)$ עבור

$$(x, \mathbf{y}) \in B = \{|x - x_0| \le a,\ ||\mathbf{y} - \mathbf{y_0}|| \le b\}, \quad \mu \in U.$$

נניח כי $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mu)$ מקיים תנאי ליפשיץ משותף ביחס למשתנה $\mathbf{y}$, נסמן

$$M = \max_{(x,\mathbf{y},\mu)\in B\times U} ||\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mu)||, \qquad h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

אז לבעיית ההתחלה (3.8) קיים פתרון יחיד $\mathbf{y}(x, \mu)$, הוא מוגדר בקטע $x_0 - h \le x \le x_0 + h$ ורציף ב־μ.

הוכחה. ההוכחה עוקבת אחרי צעדי ההוכחה של משפט 3.9. נבחר את האיטרציה הראשונה כ־$\mathbf{y}_0(x, \mu) \equiv y_0$, בלתי תלויה ב־$\mu$, ובהמשך

$$\mathbf{y}_{k+1}(x, \mu) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_k(s), \mu)\, ds \quad k = 1, 2, \dots\ .$$

כל האיטרציות העוקבות רציפות גם בפרמטר μ ולכן גם הגבול במידה שווה שלהם תלוי באופן רציף ב־μ. □

נעבור לתלות רציפה של פתרון בתנאי ההתחלה.

משפט 3.20 נניח כי $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ רציפה ומקיימת תנאי ליפשיץ עם קבוע L ביחס ל־$\mathbf{y}$ בתחום D ונתון פתרון מסוים $\mathbf{y}_0(x)$ אשר מוגדר בקטע $a \le x \le b$. אז קיים $\delta > 0$ כך שעבור כל $a \le x_0 \le b$ ולכל η כך ש־$||\eta - \mathbf{y}_0(x_0)|| < \delta$ פתרון בעיית ההתחלה

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(x_0) = \eta,$$

מוגדר בקטע $a \le x \le b$ ותלוי שם באופן רציף ב־η.

הוכחה. נבחר δ_1 די קטן כך שהקבוצה הסגורה והחסומה

$$U = \left\{(x, y) \;\middle|\; a \le x \le b,\ ||y - y_0(x)|| \le \delta_1\right\}$$

תהיה מוכלת בתחום D. עכשיו נבחר $\delta = \delta_1 e^{-L(b-a)}$. לפי הנתון, הפתרון $\mathbf{y}_0(x)$ מקיים בקטע $[a,b]$

$$\mathbf{y}_0(x) = \mathbf{y}_0(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_0(s))\, ds \ ;$$

ופתרון בעיית ההתחלה $\mathbf{y}(x_0) = \eta$ מקיים

$$\mathbf{y}(x) = \eta + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\, ds$$

בתחום הגדרתו המקסימלי. כמו בסעיף 3.7, נקבל כי מימין ל־x_0 ובתחום ההגדרה המשותף

$$||\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}_0(x)|| \le ||\eta - \mathbf{y}_0(x_0)|| + \int_{x_0}^{x} L||\mathbf{y}(s) - \mathbf{y}_0(s)||\, ds.$$

על פי הלמה של Gronwall, נסיק כמו ב־(3.20) את ההערכה

$$||\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}_0(x)|| \le ||\eta - \mathbf{y}_0(x_0)|| e^{L|x-x_0|}.$$

אם $||\eta - \mathbf{y}_0(\xi)|| < \delta$ אז

$$||\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}_0(x)|| \le ||\eta - \mathbf{y}_0(x_0)|| e^{L|x-x_0|} < \delta e^{L(b-a)} < \delta_1.$$

לפיכך הפתרון $\mathbf{y}(x)$ אינו עוזב את הקבוצה $D \supset U$ ולכן הוא מוגדר לכל $a \le x \le b$.

מאי־השוויון האחרון נובע כי הפתרון $\mathbf{y}(x)$ קרוב במידה שווה ל־$\mathbf{y}_0(x)$ בכל הקטע $[a,b]$ בתנאי שתנאי ההתחלה η די קרוב ל־$\mathbf{y}_0(\xi)$. □

המשפט הבא מברר באיזה תנאים פתרון תלוי בתנאי ההתחלה באופן גזיר.

משפט 3.21 נתונה בעיית ההתחלה

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(x_0) = \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n). \tag{3.21}$$

בה $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ מקיימת את תנאי משפט 3.9.

א. אם כל $n \times n$ אברי המטריצה $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ רציפים, אז פתרון בעיית ההתחלה (3.21) שיסומן ב־$\mathbf{y}(x,\eta) = \mathbf{y}(x, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ הוא בעל נגזרות רציפות לפי $\eta_1, \ldots, \eta_n$.

ב. הנגזרת $\mathbf{z}_k(x,\eta) = \dfrac{\partial \mathbf{y}(x,\eta)}{\partial \eta_k}$, $k = 1, \ldots, n$, מקיימת את בעיית ההתחלה הלינארית

$$\frac{d\mathbf{z}}{dx} = \left(\frac{\partial f_i(x, \mathbf{y}(x,\eta))}{\partial y_j}\right) \mathbf{z}, \qquad \mathbf{z}(x_0) = \mathbf{e}_k. \tag{3.22}$$

ג. המטריצה $Z(x,\eta) = \left(\dfrac{\partial y_i(x,\eta)}{\partial \eta_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ מקיימת את המערכת המטריצית ותנאי ההתחלה

$$\frac{dZ}{dx} = \left(\frac{\partial f_i(x, \mathbf{y}(x,\eta))}{\partial y_j}\right) Z, \qquad Z(x_0) = I_{n\times n}.$$

בספרות נהוג לסמן את מטריצות הנגזרות בסימונים המקוצרים

$$D_{\mathbf{y}}\mathbf{f} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^{n}, \qquad D_{\eta}\,\mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial y_i(x,\eta)}{\partial \eta_j}\right)_{i,j=1}^{n}$$

והמערכת ב־(3.22) תכתב בצורה

$$\mathbf{z}\,' = D_{\mathbf{y}}\mathbf{f}\big(x,\mathbf{y}(x,\eta)\big)\ \mathbf{z}. \tag{3.23}$$

הוכחה. האתגר העיקרי במשפט זה הוא להוכיח כי הפתרון תלוי באופן גזיר בתנאי ההתחלה. אם זה ידוע, אז גזירה פורמלית של רכיבי

$$\frac{d\mathbf{y}(x,\eta_1,\ldots,\eta_n)}{dx} = \mathbf{f}(x,\mathbf{y}(x,\eta_1,\ldots,\eta_n))$$

לפי η_k מובילה ל־

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y_i(x,\eta_1,\ldots,\eta_n)}{\partial \eta_k}\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(x,\mathbf{y}(x,\eta))}{\partial y_j}\,\frac{\partial y_j(x,\eta)}{\partial \eta_k}, \qquad i=1,\ldots,n,$$

כפי שנטען במשוואה (3.22).

על מנת להוכיח את קיום הנגזרת $\dfrac{\partial \mathbf{y}(x,\eta)}{\partial \eta_k}$, נסתכל בשני הפתרונות המתאימים לתנאי התחלה הנבדלים ברכיב ה־k־י שלהם בלבד, $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(x,\eta)$, $\mathbf{y}_h = \mathbf{y}(x,\eta+h\mathbf{e}_k)$ ונוכיח את קיום הגבול

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta_k} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{y}(x,\eta+h\mathbf{e}_k)-\mathbf{y}(x,\eta)}{h}.$$

המונה $\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_0$ מקיים

$$\frac{d}{dx}(\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_0) = \mathbf{f}(x,y_{h,1},\ldots,y_{h,n}) - \mathbf{f}(x,y_{0,1},\ldots,y_{0,n}).$$

לרכיב ה־i־י שלו יש לפי משפט ערך הביניים $0<c_k<h$ כך ש־

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_0)_i &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\big(x,\mathbf{y}(x,\eta+c_i\mathbf{e}_k)\big)(y_{h,j}-y_{0,j})\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\big(x,\mathbf{y}(x,\eta)\big)+R_{i,j}\right](y_{h,j}-y_{0,j})\end{aligned} \tag{3.24}$$

והודות לרציפות $\partial f_i/\partial y_j$, $R_{i,j}\to 0$ כאשר $h\to 0$.

מצד שני, על פי הלמה של גרונוול ואי שוויון (3.20),

$$0 \le ||(\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_0)(x)|| \le ||(\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_0)(x_0)||\,e^{L(x-x_0)} \le he^{L(b-a)}.$$

נחלק את (3.24) ב־h ונסמן $\mathbf{w}(x) = (\mathbf{y}_h(x) - \mathbf{y}_0)(x)/h$. אז בכתיב וקטורי־מטריצי

$$\frac{d}{dx}\mathbf{w}(x) = \left(\frac{\partial f_i(x, \mathbf{y}(x,\eta))}{\partial y_j}\right)\mathbf{w} + \Big(R_{i,j}\Big)\mathbf{w}.$$

מכיוון ש־$R_{i,j} \to 0$ ו־$||\mathbf{w}(x)|| \le e^{L(b-a)}$, מתקבל כי

$$\left|\left|\mathbf{w}\,' - \left(\frac{\partial f_i(x, \mathbf{y}(x,\eta))}{\partial y_j}\right)\mathbf{w}\right|\right| < \varepsilon$$

כלומר $\mathbf{w}(x)$ הוא ε־קירוב לפתרון של המערכת הלינארית (3.22). ברור ש־ $\mathbf{w}(x_0) = \mathbf{e}_k$.

נקח עתה את פתרון בעיית ההתחלה (3.22) שתסומן ב־$z(x)$. לפי דוגמא 3.15 הפתרון $z(x)$ והקירוב $\mathbf{w}(x)$ מקיימים $||\mathbf{w}(x) - \mathbf{z}(x)|| \le \varepsilon(b-a)e^{L(b-a)}$ עבור h די קטן, כלומר $\mathbf{w}(x) \to \mathbf{z}(x)$ במידה שווה על $[a,b]$ כאשר $h \to 0$. זה מוכיח את קיום $\partial\mathbf{y}/\partial\eta_k = \lim_{h\to 0}(\mathbf{y}_h - \mathbf{y}_0)/h$ ואת רציפות $\partial\mathbf{y}/\partial\eta_k$. □

מערכת מסוג (3.23) מופיעה גם בהקשר אחר, כקרוב לינארי למערכת בלתי לינארית בקרבת פתרון מסוים. נתונה מערכת לא לינארית

$$\mathbf{y}\,'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \tag{3.25}$$

והנגזרות החלקיות $\partial f_i/\partial y_j$, $i,j = 1,\ldots,n$ רציפות. יהי $\mathbf{y}_0(x)$ פתרון נתון. מההצבה $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0(x)$ מתקבל

$$\begin{aligned}\mathbf{z}\,' = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)' &= \mathbf{f}\big(x, \mathbf{y}_0(x) + \mathbf{z}\big) - \mathbf{f}\big(x, \mathbf{y}_0(x)\big)\\ &= D_{\mathbf{y}}\,\mathbf{f}\big(x, \mathbf{y}_0(x)\big)\,\mathbf{z} + \mathbf{g}(x, \mathbf{z}).\end{aligned} \tag{3.26}$$

כאשר $D_{\mathbf{y}}\mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ והשארית היא $||\mathbf{g}(x,\mathbf{z})|| = o(||\mathbf{z}||)$ עבור $||\mathbf{z}(x)||$ קטן. המערכת

$$\mathbf{z}\,' = D_{\mathbf{y}}\,\mathbf{f}\big(x, \mathbf{y}_0(x)\big)\mathbf{z} \tag{3.27}$$

היא הקרוב הלינארי ל־(3.26) בסביבת $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ ונקראת הוריאציה הראשונה (first variation) של (3.26).

3.9 שימושים ליחידות פתרון

ליחידות הפתרון של בעיית התחלה חשיבות רבה. נסכם את המשמעות הגיאומטרית של היחידות עבור משוואה דיפרנציאלית סקלרית מסדר ראשון:

אם המשוואה הדיפרנציאלית הסקלרית $y' = f(x,y)$ מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות בתחום D במישור x, y אז שני פתרונות שונים כלשהם של משוואה זו אינם נפגשים בתחום D.

כאשר אנו אומרים כי "פתרונות אינם נפגשים", אנו מתכיוונים למעשה לומר כי "הגרפים המתאימים לפתרונות אינם נפגשים".

ובאמת, לו שני פתרונות שונים היו נפגשים בנקודה כלשהי (x_1, y_1) של D, אז לבעיית ההתחלה $y' = f(x,y),\ \ y(x_1) = y_1$ היו שני פתרונות שונים, בסתירה למשפט הקיום והיחידות.

דוגמא 3.19 נחזור שוב למשוואה הלוגיסטית שנדונה בדוגמא 2.1,

$$y'(x) = ky(1 - \frac{y}{L}), \qquad k, L > 0.$$

כאן $f(x,y) = ky(1 - y/L)$ שבאגף ימין מקיים ללא ספק את הנחות משפט הקיום והיחידות לכל ערכי x, y, בהיותו פולינום ב־y ובלתי תלוי ב־x.

למשוואה זו יש שני פתרונות יוצאי דופן $y(x) \equiv 0$ ו־$y(x) \equiv L$. לפי האמור למעלה כל פתרון אחר $y(x)$ שנקבע על ידי תנאי התחלה

$$y(x_0) = y_0, \qquad 0 < y_0 < L,$$

אינו יכול לפגוש בשני הפתרונות הסינגולריים ולכן עליו לקיים $0 < y(x) < L$ לכל x.
□

מסקנה דומה חלה על פתרונות סינגולריים של משוואות הנפתרות על ידי הפרדת משתנים. כזכור פתרנו משוואות מהצורה $y' = g(x)h(y)$ על ידי הפרדת משתנים: אם $h(y) \neq 0$ אז אנו מקבלים

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\, dx$$

ולפנינו פתרון כללי התלוי בפרמטר ורשום בצורה סתומה כ־$H(y) = G(x) + C$. בנוסף, אם יש ערך y_1 שעבורו $h(y_1) = 0$ אז גם הפונקציה הקבועה $y_1(x) \equiv y_1$ היא פתרון נוסף של המשוואה הדיפרנציאלית המכונה בשם פתרון סינגולרי.

האם יתכן פתרון $y(x)$ המקבל את הערך y_1 בחלק מהנקודות אך מקבל ערכים אחרים בנקודות אחרות (כלומר אינו זהותית קבוע)? אם אגף ימין של המשוואה הדיפרנציאלית, $f(x,y) = g(x)h(y)$, מקיים את הנחות משפט הקיום והיחידות התשובה היא שלילית כי שני הפתרונות השונים $y_1(x) \equiv y_1,\ y(x)$ אינם יכולים להפגש.

בהעדר יחידות המצב שונה.

דוגמא 3.20 נסתכל בבעיית ההתחלה

$$y' = +\sqrt{1 - y^2}, \quad y(0) = 0$$

בה המשוואה אינה מקיימת את תנאי משפט פיקרד־לינדלף עבור $y = 1, -1$.

על ידי הפרדת משתנים מקבלים $\int (1 - y^2)^{-1/2}\, dy = \int dx$ עבור $y \neq 1, -1$, כלומר $\arcsin(y) = x + c$, השקול ל־ $y = \sin(x + c)$. תנאי ההתחלה $y(0) = 0$ קובע את הפתרון $y = \sin(x)$.

האמנם זה הפתרון לכל x? הפונקציה $y = \sin(x)$ עולה ויורדת בעוד שהמשוואה הדיפרנציאלית מחייבת כי $y' = +\sqrt{1-y^2} \geq 0$ ואף פתרון שלה אינו יכול לרדת!

ואכן, כאשר הפתרון $y = \sin(x)$ מגיע לערך $y = 1$ בה משפט הקיום והיחידות אינו מתקיים, הוא פוגש בנקודה $(x, y) = (\pi/2, 1)$ בפתרון הסינגולרי $y(x) \equiv 1$. מכיון שהמשוואה הדיפרנציאלית דורשת כי $y' \geq 0$, פתרון בעיית ההתחלה שלנו ממשיך מכאן ואילך לאורך $y(x) \equiv 1$. על כן הפתרון המלא לבעיית ההתחלה הוא

$$y(x) = \begin{cases} -1, & -\infty < x \leq -\pi/2, \\ \sin(x), & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \\ 1, & \pi/2 \leq x < \infty. \end{cases} \qquad \square \tag{3.28}$$

דוגמא 3.21 נסתכל בבעיית התחלה עם נקודת התחלה בין שני פתרונות סינגולריים:

$$y' = g(x)h(y), \qquad y(x_0) = y_0$$

כאשר $h(y_1) = h(y_2) = 0$ ו־$y_1 < y_0 < y_2$. אם המשוואה מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות אז לפי הניתוח שלמעלה פתרון בעיית ההתחלה המוגדר על ידי

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{h(y)} = \int_{x_0}^{x} g(x)\, dx$$

מקיים $y_1 < y(x) < y_2$ כלומר הוא חסום בין שני הפתרונות הסינגולריים $y(x) \equiv y_1$, $y(x) \equiv y_2$. האם הפתרון בהכרח מתקרב אל הפתרונות הסינגולריים?

התשובה לא בהכרח חיובית. למשל פתרון $y' = (1-y^2)(1+x^2)$, $y(0) = 0$ נתון על ידי $\int_0^y \frac{dy}{1-y^2} = \int_0^x (1+x^2)\, dx$ וברור שכאשר $x \to +\infty$ אז $y(x) \to 1$.

לעומת זאת פתרון הבעיה

$$y' = (1-y^2)/(1+x^2), \qquad y(0) = 0$$

מקיים $\int_0^y \frac{dy}{1-y^2} = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} < \frac{\pi}{2}$ והפתרון $y(x)$ מונוטוני עולה אך אינו מתקרב לערך 1. $\square$

משפט היחידות יכול לשמש לנו גם כדי להוכיח כי שני פתרונות מתלכדים.

דוגמא 3.22 הוכח כי אם $y(x)$ פתרון כלשהו של המשוואה הדיפרנציאלית

$$\frac{dy}{dx} + \cos^5(3\pi x)\, y = \cos^7(3\pi x).$$

אז $y(1-x) \equiv y(x)$.

נחליף את המשתנה החפשי $t = 1 - x$ ונסמן $z(x) = y(1-x) = y(t)$. אז לפי כלל השרשרת

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot (-1).$$

בנוסף גם $\cos(3\pi x) = \cos\big((3\pi(1-t)\big) = \cos(3\pi - 3\pi t) = -\cos(3\pi t)$.

נעביר את כל מחוברי המשוואה הדיפרנציאלית לאגף אחד ונציב בה את החלפות המשתנים:

$$\begin{aligned}
&\frac{dz}{dx} + \cos^5(3\pi x)\, z(x) - \cos^7(3\pi x) \\
&\quad = \left[-\frac{dy}{dt} - \cos^5(3\pi t)\, y(t) + \cos^7(3\pi t)\right]_{t=1-x} \\
&\quad = -\left[\frac{dy}{dt} + \cos^5(3\pi t)\, y(t) - \cos^7(3\pi t)\right] \equiv 0.
\end{aligned}$$

מתברר, אם כן, כי גם $z(x)$ מקיים את אותה משוואה דיפרנציאלית. אך בנקודה $x = 1/2$ קיים גם $z(1/2) = y(1/2)$, כלומר שני הפתרונות $z(x),\ y(x)$ מקימים גם את אותו תנאי התחלה. ברור כי המשוואה הדיפרנציאלית הנתונה מקיימת את דרישות משפט הקיום והיחידות בכל מישור (x, y). לכן, על פי משפט זה, שני פתרונות אלה מתלכדים, כלומר $z(x) \equiv y(x)$ ולכן $y(1-x) \equiv y(x)$ לכל x. □

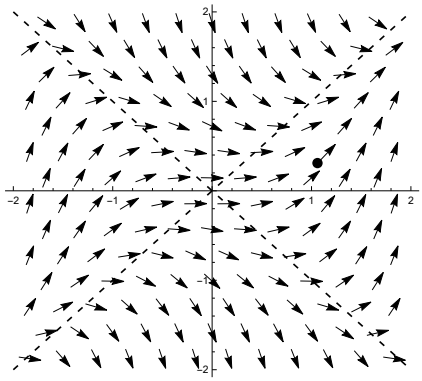
3.10 חקירה איכותית של פתרונות

נדגים כיצד אפשר לנצל משפטי קיום ויחידות ואמצעים אחרים כדי לנתח את אופיים והתנהגותם של פתרונות אף כשאין אנו יודעים לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית במפורש.

דוגמא 3.23 כיצד נראה פתרון בעיית ההתחלה

$$y' = x^4 - y^4, \qquad y(3) = 1\ ? \tag{3.29}$$

נצייר את שדה הכיוונים של המשוואה כמתואר באיור 3.5. בתור קווי עזר נסמן את שני הישרים $y = x,\ y = -x$, שבנקודותיהם שיפוע שדה הכיוונים הוא $y' = x^4 - y^4 = 0$ (איזוקלינות).



איור 3.5: שדה הכיוונים של המשוואה $y' = x^4 - y^4$ וקווי העזר $y = \pm x$

בתוך הגזרה $|y| < |x|$ מתקיים $y' > 0$ לכן הפתרון היוצא מנקודת ההתחלה $(x_0, y_0) = (3, 1)$ הוא פונקציה עולה בסביבת $x_0 = 3$. כאשר x הולך וגדל, גרף הפתרון אינו יכול לחצות את הקו $y = x$ מלמטה כלפי מעלה. כי על מנת לחצות קו זה, שיפוע גרף הפתרון היה חייב להיות לפחות 1 בעוד שעבור $y = x$ שיפוע המסלול הוא $y' = 0$. לפיכך פתרון היוצא מהנקודה $(3, 1)$ ימינה, ממשיך לעלות אך נשאר תחת הקו $y = x$. בפרט אין הוא בורח ל־$y = +\infty$ עבור אף x סופי. על פי משפט 3.10 הפתרון גם אינו יכול להסתיים באף נקודה סופית (x_1, y_1), עם $3 < x_1 < \infty$, אלא מוגדר לכל $3 < x < \infty$.

בעזרת איור 3.5 בלבד קשה לקבוע את התנהגות הפתרון לכל $x < 3$. □

דוגמא 3.23 אינה אלא מקרה פרטי של עקרון כללי יותר.

משפט 3.22 נתונה משוואה דיפרנציאלית $y' = f(x, y)$ ושתי פונקציות גזירות, $\alpha(x) < \beta(x)$, המקיימות

$$\alpha'(x) < f(x, \alpha(x)), \tag{3.30}$$

$$\beta'(x) > f(x, \beta(x)), \tag{3.31}$$

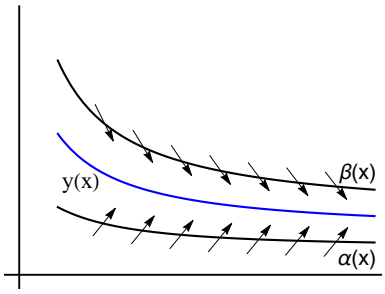
לכל $x \geq a$. נניח כי המשוואה הדיפרנציאלית מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות ב־

$$D = \big\{(x, y) \,\big|\, a \leq x < \infty,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\big\}.$$

אז לכל נקודה (x_0, y_0) ב־D, פתרון בעיית ההתחלה $y(x_0) = y_0$ מקיים

$$\alpha(x) < y(x) < \beta(x), \qquad x_0 < x < \infty.$$

הוכחה. משמעות אי השוויון (3.30) היא שבכל נקודה $(x, \alpha(x))$ של העקום $\alpha(x)$, שיפוע שדה הכיוונים של המשוואה הדיפרנציאלית, הנתון על ידי $f(x, \alpha(x))$, גדול משיפוע העקום $\alpha(x)$, אשר נתון על ידי $\alpha'(x)$. באופן דומה, בכל נקודה של העקום $\beta(x)$, שיפוע שדה הכיוונים קטן משיפוע העקום $\beta(x)$. בגלל התמונה הגיאומטרית, התחום D המוגבל בין העקומים $\alpha(x)$, $\beta(x)$ נקרא **משפך** (funnel).[6] ראה איור 3.6.



איור 3.6: משפך

ההנחות (3.30), (3.31) מבטיחות כי פתרון המתחיל בנקודה (x_0, y_0) של D אינו יכול לפגוש בעקומים $\alpha(x)$, $\beta(x)$ עבור אף ערך $x > x_0$ ולברוח מתוך D. לכן $\alpha(x) < y(x) < \beta(x)$ לכל $x > x_0$. אילו היה להפך, אז היינו מסמנים ב־x_1 את הנקודה הראשונה מימין ל־x_0 בה $y(x_1) = \alpha(x_1)$. לפי (3.30),

$$y'(x_1) = f(x_1, y(x_1)) = f(x_1, \alpha(x_1)) > \alpha'(x_1),$$

כלומר $y(x) - \alpha(x)$ עולה בסביבת x_1. אך זה סותר את העובדה כי $y(x) - \alpha(x)$ חיובי מ־x_0 עד x_1 ומתאפס ב־x_1. □

דוגמא 3.24 $\alpha(x) \equiv 0,\ \beta(x) = x$ יוצרים משפך ברביע הראשון עבור המשוואה $y' = x^4 - y^4$ המוזכרת בדוגמא 3.23. □

דוגמא 3.25 עבור המשוואה $y' = y^2 - x$ זוג הפונקציות $\alpha(x) = -\sqrt{x+1}$, $\beta(x) = -\sqrt{x-1}$, יוצרות משפך. (למעשה אלה הן האיזוקלינות $y^2 - x = \pm 1$). ואכן,

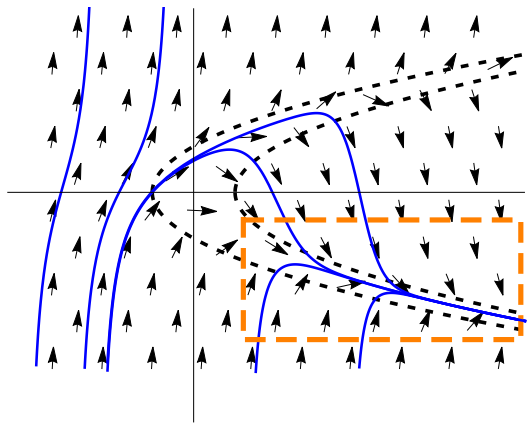
$$\alpha'(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} < f(x, \alpha(x)) = \alpha^2(x) - x \equiv 1, \qquad x > 0,$$

$$\beta'(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^{-1/2} > f(x, \beta(x)) = \beta^2(x) - x \equiv -1 \qquad x > 5/4.$$

לכן כל פתרון $y(x)$ המתחיל במשפך זה ממשיך לקיים

$$-\sqrt{x+1} < y(x) < -\sqrt{x-1}, \qquad x > 5/4.$$

מכיוון ש־$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = 0$, משפך זה הולך וצר וכל פתרון שבתוכו מתנהג לבסוף כמו $-\sqrt{x}$. ראה איור 3.7. □



איור 3.7: שדה כיוונים ופתרונות אחדים עבור המשוואה $y' = y^2 - x$. המשפך מודגש במלבן.

המשפט הבא מציג את המצב ההפוך והוא עדין ומתוחכם יותר.

משפט 3.23 נתונה משוואה דיפרנציאלית $y' = f(x,y)$ ושתי פונקציות גזירות $\alpha(x) < \beta(x)$ המקיימות

$$\alpha'(x) > f(x, \alpha(x)), \tag{3.32}$$

$$\beta'(x) < f(x, \beta(x)), \tag{3.33}$$

לכל $x \geq a$. נניח כי המשוואה הדיפרנציאלית מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות ב־

$$D = \big\{(x,y) \,\big|\, a \leq x < \infty,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\big\}.$$

אזי קיים לפחות פתרון אחד $y(x)$ כך ש־$\alpha(x) < y(x) < \beta(x)$ בקטע $a \leq x < \infty$.
אם $\lim_{x\to\infty} \big(\beta(x) - \alpha(x)\big) = 0$ ובנוסף על כך $\frac{\partial f}{\partial y} \geq 0$ ב־D, אז קיים פתרון יחיד שנשאר בין $\alpha(x)$ ל־$\beta(x)$.

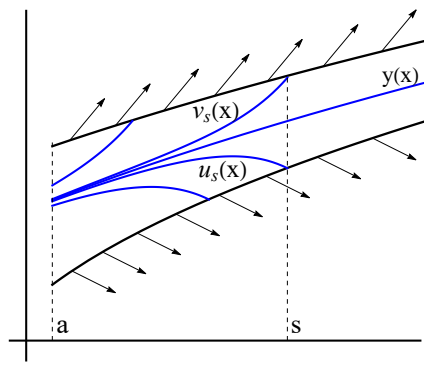
הוכחה. אי השוויונות (3.32), (3.33) הפוכים ל־(3.30), (3.31), בהתאמה. ראה את איור 3.8 המשקף אי שוויונות אלה. המשמעות הגיאומטרית של אי השוויונות היא שכל פתרון המגיע לנקודה על אחד העקומים $\alpha(x), \beta(x)$, המהווים את שפת D, חייב לעזוב את D דרך נקודה זו, כאשר x גדל. לפיכך נקרא D בשם **משפך הפוך** (anti funnel).

מטרתנו היא להוכיח כי בין כל מסלולי הפתרונות הבורחים מתוך D כלפי מעלה או כלפי מטה, מונח לפחות פתרון אחד המוגדר לכל $a \leq x < \infty$ ואשר נשאר בתוך D.

[6] J. H. Hubbard, B. H. West, Differential equations, A dynamical system approach, Springer Verlag, NY, 1991

עבור כל s, $a < s < \infty$, נבחר פתרון היוצא מנקודת ההתחלה $(s, \beta(s))$ המונחת על העקום $\beta(x)$, נסמן אותו כ־$v_s(x)$ ונמשיך אותו שמאלה. בגלל ההנחות (3.32), (3.33) ברור כי פתרון זה אינו יכול לברוח מתוך המשפך ההפוך משמאל ל־$x = s$ ובהגיעו ל־$x = a$, ערכו הוא $v_s(a)$. ראה איור 3.8. באופן דומה הפתרון $u_s(x)$ היוצא מהנקודה $(s, \alpha(s))$ מגיע אל $x = a$ וערכו שם $u_s(a)$. עבור $a < s_1 < s_2 < \infty$ הפתרונות $v_{s_1}(x), u_{s_1}(x), v_{s_2}(x), u_{s_2}(x)$ מקיימים $u_{s_1}(a) < u_{s_2}(a) < v_{s_2}(a) < v_{s_1}(a)$, דהיינו

$$[u_{s_2}(a), v_{s_2}(a)] \subset [u_{s_1}(a), v_{s_1}(a)].$$



איור 3.8: משפך הפוך

על פי הלמה של קנטור, לסדרה של קטעים סגורים וחסומים המוכלים כל אחד בקודמו, יש חיתוך משותף המכיל לפחות נקודה אחת A. הפתרון $y(x)$ המוגדר על ידי תנאי ההתחלה $y(a) = A$, מקיים לכן

$$\alpha(x) < u_s(x) < y(x) < v_s(x) < \beta(x)$$

לכל $a < x < s$. ראה איור 3.8. מכיון שזה נכון לכל s, הפתרון $y(x)$ מוגדר לכל $a < x < \infty$ וכלוא בין $\alpha(x)$ ל־$\beta(x)$.

נניח כי במשפך ההפוך יש שני פתרונות, $\alpha(x) < y_1(x) < y_2(x) < \beta(x)$. לפי ההנחה

$$\big(y_2(x) - y_1(x)\big)' = f(x, y_2(x)) - f(x, y_1(x)) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, s)\, ds \geq 0$$

והמרחק בין שני הפתרונות אינו יכול לקטון. אך זה סותר את הנתון כי המרחק בין $\alpha(x)$ ל־$\beta(x)$ שואף לאפס ומאשר את יחידות הפתרון במשפך ההפוך. □

דוגמא 3.26 הפונקציות $\alpha(x) = +\sqrt{x-1}$, $\beta(x) = +\sqrt{x+1}$ יוצרות משפך הפוך עבור המשוואה $y' = y^2 - x$. כי באמת,

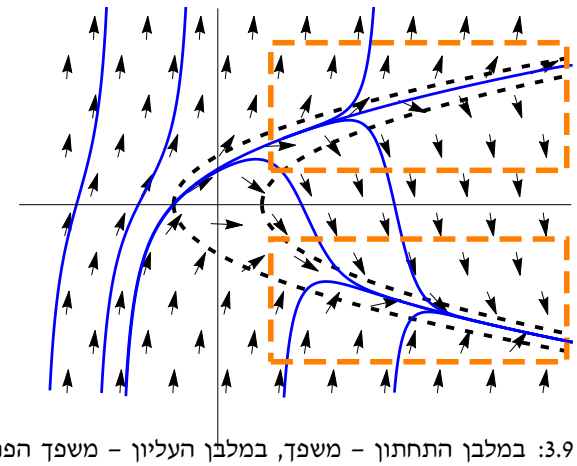
$$\alpha'(x) = +\frac{1}{2}(x-1)^{-1/2} > f(x, \alpha(x)) = \alpha^2(x) - x \equiv -1, \qquad x > 5/4$$

$$\beta'(x) = +\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} < f(x, \beta(x)) = \beta^2(x) - x \equiv 1, \qquad x > .$$

לכן קיים לפחות פתרון אחד $y(x)$ המונח כולו במשפך הפוך זה ומקיים

$$+\sqrt{x-1} < y(x) < +\sqrt{x+1}, \qquad 5/4 < x < \infty.$$

ראה איור 3.9. מכיון ש־$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \to 0$ ובתחום הנדון $\partial f/\partial y = 2y \geq 0$, המשפך ההפוך מכיל בדיוק פתרון אחד. $\square$



איור 3.9: במלבן התחתון – משפך, במלבן העליון – משפך הפוך

המשפט הבא מאפשר להעריך פתרון של משוואה דיפרנציאלית בעזרת פתרון של אי שוויון.

משפט 3.24 יהי $y(x)$ פתרון בעיית ההתחלה

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

שבה $f(x,y)$ מקיים תנאי משפט קיום ויחידות ו־$z(x)$ פונקציה המקיימת

$$z' \leq f(x,z), \qquad z(x_0) \leq y_0.$$

אז $z(x) \leq y(x)$ בקטע ההגדרה המשותף להן מימין ל־x_0.

הוכחה. א. נדגים תחילה מקרה פרטי בו מניחים אי שוויון חריף $z' < f(x,z)$ ונוכיח כי $z(x) < y(x)$ בקטע ההגדרה המשותף להן מימין ל־x_0.

נראה כי בסביבה ימנית קטנה של x_0 מתקיים $z(x) < y(x)$. אם $z(x_0) = y(x_0)$ אז הטענה נובעת מאי השוויון

$$z'(x_0) < f(x_0, z(x_0)) = f(x_2, y(x_0)) = y'(x_0)$$

ואם $z(x_0) < y(x_0)$, אותה מסקנה נובע מרציפות. נניח בדרך השלילה כי קיימת נקודה $x_1 > x_0$ בה $z(x) < y(x)$ אינו מתקיים אלא $z(x_1) \geq y(x_1)$. אז יש נקודה ראשונה

$x_2 \in (x_0, x_1]$ כך ש־$z(x_2) = y(x_2)$ בעוד משמאלו $z(x) < y(x)$ ב־$(x_0, x_2]$. בנקודת המפגש $(x_2, y(x_2)) = (x_2, z(x_2))$ הפונקציה $z(x)$ עולה אל $y(x)$ ולכן $z'(x_2) \geq y'(x_2)$. אך זה בלתי אפשרי, כי על פי ההנחה

$$z'(x_2) < f(x_2, z(x_2)) = f(x_2, y(x_2)) = y'(x_2).$$

ב. נעבור להוכחת המשפט עם אי שוויונות לא חריפים. נוסיף בעיית התחלה

$$w' = f(x, w) + \frac{1}{n}, \qquad w(x_0) = y_0,$$

ונסמן את פתרונה ב־$w_n(x)$. הודות למשפט 3.19 הסדרה $w_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ל־$y(x)$ בכל קבוצה קומפקטית בתחום ההגדרה של $y(x)$. מצד שני, בדומה למקרה הפרטי שבסעיף א' מתברר כי $z(x) < w_n(x)$ בקטע ההגדרה המשותף ל־$z(x), y(x)$. כאשר $n \to \infty$ מתקבל כי $z(x) \leq y(x)$. $\square$

ממשפט 3.24 נובעת המסקנה:

מסקנה 3.25 נתונות שתי בעיות ההתחלה

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0, \\ z' &= g(x, z), \qquad z(x_0) = z_0. \end{aligned}$$

אם $f(x, z) \geq g(x, z)$ ו־$y(x_0) \geq z(x_0)$ אז $y(x) \geq z(x)$ פימין ל־$x = x_0$ בתחום ההגדרה המשותף להם.

הערה. אין זה הכרחי כי לשני הפתרונות $y(x), z(x)$ יהיה בדיוק אותו תחום הגדרה. יתכן כי אחד מהם יפסיק להתקיים לפני השני.

דוגמא 3.27 מצא חסם מלמעלה לפתרון בעיית ההתחלה

$$y' = \frac{1}{x^2 + y^2}, \qquad y(1) = 1, \tag{3.34}$$

לכל $1 \leq x < \infty$.

מחיוביות y' מסיקים כי $y(x)$ היא פונקציה עולה. לכן $y(x) \geq 1$ לכל $x \geq 1$ וכך $\frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{x^2 + 1}$. לכן נשווה את בעיית ההתחלה (3.34) עם בעיית ההתחלה

$$z' = \frac{1}{x^2 + 1}, \qquad z(1) = 1. \tag{3.35}$$

על פי משפט 3.24 נובע כאן כי $y(x) \leq z(x)$ לכל $x \geq 1$. אך הפתרון הכללי עבור z הוא $z = \arctan(x) + C$ ותנאי ההתחלה קובע כי $C = 1 - \pi/4$. לסיכום,

$$1 \leq y(x) \leq \arctan(x) + 1 - \pi/4, \qquad 1 \leq x < \infty. \qquad \square$$

3.11 משוואות אוטונומיות מסדר ראשון

מערכת משוואות דיפרנציאליות $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ נקראת אוטונומית (autonomous) אם אגף ימין שלה אינו תלוי באופן מפורש במשתנה החפשי x, כלומר צורתה היא

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \qquad f : R^n \to R^n \ .$$

בפרק זה נדון במשוואה אוטונומית יחידה

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \ . \tag{3.36}$$

משוואות אחדות בהן פגשנו למעלה הן אוטונומיות. ביניהם נמנה את מודל ההתפרקות הרדיואקטיבית $\frac{dy}{dt} = -ky(t)$ (משוואה (1.3)), המשוואה הלוגיסטית (משוואה (1.2))

$$\frac{dN}{dt} = kN\left(1 - \frac{N}{L}\right)$$

והמשוואות $y' = y^2$, $y' = y^{1/3}$, $y' = \sqrt{1-y^2}$ (דוגמאות 3.2, 3.3 ו־3.20 בהתאמה).

אחת מתכונות היסוד של משוואות אוטונומיות היא תכונת ההזזה. אם $y(x)$ פתרון אז על ידי הצבה ישירה מתברר כי לכל קבוע c גם $y(x+c)$ הוא פתרון של אותה משוואה. במשפט 3.29 שבהמשך נדון בתכונת ההזזה בפרוט.

משוואה אוטונומית (3.36) ניתנת לפתרון בשיטת הפרדת המשתנים. פתרון בעיית התחלה $y(x_0) = y_0$ נתון בכל קטע בו $f(y)$ שונה מ־0 על ידי נוסחה סתומה מהצורה

$$x - x_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)}, \qquad f(y) \neq 0. \tag{3.37}$$

בקטע בו $f(y)$ בעל סימן קבוע, (3.37) מגדיר פונקציה מונוטונית $x = x(y)$ וזה קובע פונקציה הפוכה $y = y(x)$. יש לשים לב כי בקטעי y שונים המופרדים על ידי אפס של f, מדובר בפתרונות נפרדים.

למרות קיום נוסחה (3.37) לפתרון, נוח להתבונן בייצוג הגרפי של שדה הכיוונים וללמוד ממנו על התנהגות הפתרונות.

הגדרה 3.26 $y = \alpha$ נקרא נקודה קריטית או נקודת שווי משקל של המשוואה $y' = f(y)$ אם $f(\alpha) = 0$.

אם α נקודה קריטית, כלומר $f(\alpha) = 0$, אז $y(x) \equiv \alpha$ הוא כמובן פתרון של המשוואה ונקרא פתרון שווי משקל. בין שתי נקודות קריטיות עוקבות α, β הגודל $f(y)$ בעל סימן קבוע, לכן ברצועה שבין שתי פתרונות שווי משקל $y(x) \equiv \alpha,\ y(x) \equiv \beta$ כל פתרון $y(x)$ הוא מונוטוני. סימני הפונקציה $f(y)$ בין האפסים שלה קובעים את ההתנהגות האיכותית של פתרונות משוואה אוטונומית (3.36).

המשפטים הבאים יסכמו כמה מתכונות הפתרונות. על פי רוב נרצה לדון במשוואת שמצייתות למשפט קיום ויחידות. בדרך כלל נשיג זאת על ידי ההנחה כי הפונקציה $f(y)$ מקיימת תנאי ליפשיץ ביחס למשתנה y.

משפט 3.27 נניח כי המשוואה (3.36) מקיימת תנאי משפט קיום ויחידות. אם α, β הן שתי נקודות קריטיות עוקבות וביניהן $f(y) \neq 0$, אז פתרון בעיית התחלה $y(x_0) = y_0$ עם $\alpha < y_0 < \beta$, מוגדר לכל $-\infty < x < \infty$, הוא מונוטוני והוא מקבל את כל הערכים בין α ל־β. לפתרון כזה יש לפחות נקודת פיתול אחת בין α ל־β.

הוכחה. אם $\alpha < y_0 < \beta$, אז הפתרון היוצא מנקודת ההתחלה (x_0, y_0) אינו יכול לפגוש בפתרונות $y(x) \equiv \alpha,\ y(x) \equiv \beta$ ולכן הוא נשאר חסום ברצועה שביניהם. מכיוון ש־$f(y)$ בעל סימן קבוע בפס $\alpha < y < \beta$, הפתרון מונוטוני לכל אורך קיומו. הודות לרציפות $f(y)$ ועל פי משפט 3.10, לא ייתכן כי פתרון זה יסתיים בנקודה סופית כלשהי $(\tilde{x}, \tilde{y})$, $\tilde{x} < \infty,\ \alpha < \tilde{y} < \beta$, לפיכך הוא ניתן להמשכה לכל $-\infty < x < \infty$.

אם $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = L$ ו־$\alpha < L < \beta$, אז $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = \lim f(y(x)) = f(L) \neq 0$. אולם לא ייתכן כי $y(x)$ ישאף באופן מונוטוני אל קבוע סופי ונגזרתו תשאף אל קבוע השונה מ־0. לכן $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \beta$ או $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \alpha$ בהתאם לסימנו של $f(y)$. המצב ההפוך קורה כאשר $x \to -\infty$ לכן ערכי $y(x)$ מכסים את כל טווח הערכים (α, β) .

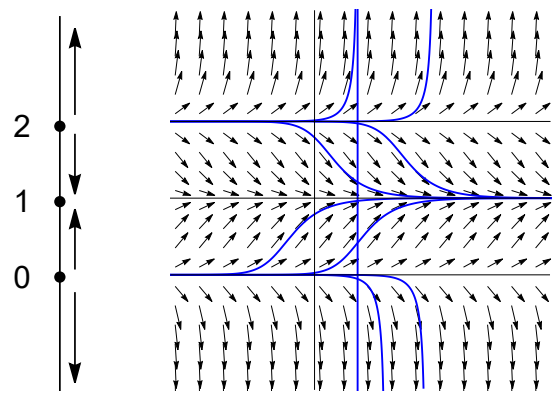
מהנתון $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ נובע כי קיימת נקודה $\alpha < \hat{y} < \beta$ בה $f'(y)$ מחליף את סימנו. בנקודה זו גם $y'' = f'(y)y' = f'(y)f(y)$ מחליף סימן וזו נקודת פיתול של הפתרון. $\square$

משפט 3.28 נניח כי המשוואה (3.36) מקיימת תנאי משפט קיום ויחידות. תהי α נקודה קריטית מקסימלית ונניח למשל כי $f(y) > 0$ לכל $\alpha < y < +\infty$. אז פתרון בעיית התחלה $y(x_0) = y_0$, עם $\alpha < y_0$, הוא מונוטוני עולה ומקבל את כל הערכים בטווח (α, ∞). תחום ההגדרה המקסימלי של הפתרון הוא מהצורה $x \in (-\infty, x_+)$ כאשר $x_+ = x_0 + \int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{f(y)}$, סופי או אינסופי. כאשר x_+ סופי, הפתרון $y(x)$ "בורח" לאינסוף לאורך אסימפטוטה אנכית.

הוכחת המשפט דומה לזו של המשפט הקודם. $\square$

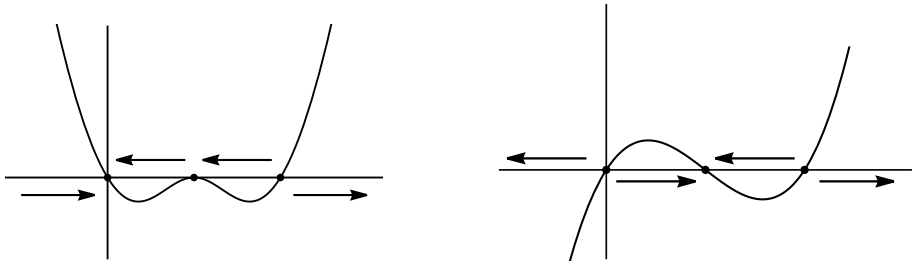
נוח לייצג את המשפטים שלמעלה באופן גרפי על ידי ציור שדה הכיוונים, פתרונות שווי המשקל והפתרונות ביניהם. ציור זה נקרא תמונת הפאזה (phase portrait) של המשוואה. ראה איור 3.10, מצד ימין. למעשה פגשנו בתמונת פאזה כזו בדוגמא 2.1 ובאיור 2.2.

אפשר לתאר את מרבית הדינמיקה של המשוואה האוטונומית (3.36) על ידי כווני העליה והירידה של הפתרונות בין הנקודות הקריטיות ולהסתפק בציור ציר y בלבד. תמונה זו נקראת ישר הפאזה (phase line) ומשורטטת באיור 3.10 משמאל לתמונת הפאזה.



איור 3.10: תמונת פאזה וישר פאזה של המשוואה $y' = y(y-1)(y-2)$

דרך אחרת לייצג את הדינמיקה של המשוואה היא על ידי ציור גרף של הפונקציה $f(y)$ על אפסיו ושינויי הסימן שלו והדגשת כווני המונוטוניות של פתרונות בטווחים השונים. ראה האיורים 3.11 בהם מימין $f(y)$ מחליף את סימנו ומשמאל בו $f(y)$ מתאפס מבלי להחליף סימן.



איור 3.11: ישרי הפאזה של $y' = y(y-1)(y-2)$ ושל $y' = y(y-1)^2(y-2)$

משפטים 3.27, 3.28 אינם בתוקף ללא הנחת יחידות הפתרון. למשל לבעיית ההתחלה

$$y' = |1-y^2|^{1/2}, \qquad y(0) = 0,$$

יש את הפתרון (3.28) המוזכר בדוגמא 3.20 ואשר חסום בתוך הפס $-1 \le y \le 1$. אך לאותה בעיית התחלה יש גם הפתרון הבלתי חסום

$$y(x) = \begin{cases} -\cosh(x+\pi/2), & -\infty < x \le -\pi/2, \\ \sin(x), & -\pi/2 \le x \le \pi/2, \\ \cosh(x-\pi/2), & \pi/2 \le x < \infty \end{cases}$$

ואחרים.

משפט 3.29 א. אם $y(x)$ פתרון של המשוואה (3.36) אז לכל קבוע c גם ההזזה $y(x+c)$ היא פתרון של אותה משוואה.
ב. ולהפך, נניח כי המשוואה (3.36) מקיימת תנאי משפט קיום ויחידות ו־$y(x)$ פתרון שטווח הערכים שלו הוא הקטע $\alpha < y < \beta$, סופי או אינסופי. אז כל פתרון אחר $z(x)$ המקבל ערך בטווח (α, β) ניתן להצגה כהזזה של $y(x)$.
ליתר דיוק, אם $z(\hat{x}) = \gamma$, $\alpha < \gamma < \beta$, והפתרון $y(x)$ מקבל את הערך γ בנקודה $\hat{\hat{x}}$ אז $z(x) \equiv y(x + \hat{\hat{x}} - \hat{x})$.

הוכחה. כפי שכבר הערנו קודם, מתברר ידי הצבה ישירה כי אם $y(x)$ פתרון של (3.36) אז גם $y(x+c)$ מקיים את אותה משוואה. ובכיוון ההפוך, מהנתון $z(\hat{x}) = y(\hat{\hat{x}}) = \gamma$ נובע כי $z(x), y(x + \hat{\hat{x}} - \hat{x})$ מקימים את אותו תנאי התחלה בנקודה $x = \hat{x}$ ולכן זהים.

טענה דומה לא מתקיימת עבור שני פתרונות בעלי טווח ערכים שונה. ראה למשל פתרונות $y' = y^2$ עם תנאי התחלה $y(x_0) > 0$ ו־$y(x_0) < 0$. □

3.12 משוואות אוטונומיות מסדר שני

הודות לחוק השני של ניוטון רבות מבעיות המכניקה מתוארות על ידי משוואה אוטונומית מסדר שני מהצורה

$$y''(t) = -f(y). \tag{3.38}$$

למשל, משוואת המטוטלת (דוגמא 1.5), $\theta'' = -\frac{g}{L}\sin\theta$; משוואת הקפיץ (דוגמא 1.6) $y''(t) = -\frac{k}{m}y$ ומשוואת תנועה הרמונית $y''(t) = -\omega^2 y$; ומשוואת התנועה של גוף המשוגר בכיוון אנכי מפני האדמה תחת השפעת כוח המשיכה, $y''(t) = -\frac{\gamma M}{y^2}$.

נמנה כמה תכונות יסוד של משוואות אוטונומיות מסדר שני.

משפט 3.30 אם $y(x)$ פתרון של המשוואה (3.38) אז גם ההזזה $y(t+c)$ והשיקוף $y(-t)$ הם פתרונות של אותה משוואה.

ההוכחה היא על ידי הצבה וחישוב ישירים. □

מסקנה 3.31 אם $y(t)$ פתרון של (3.38) אז גם $y(c-t)$ פתרון של אותה משוואה.

משפט 3.32 אם המשוואה (3.38) מקיימת תנאי משפט קיום ויחידות ו־$y'(t_0) = 0$ אז $t = t_0$ הוא ציר סימטריה של הפתרון $y(t)$, כלומר $y(t_0 + t) \equiv y(t_0 - t)$.

הוכחה. לפי משפט 3.30 ומסקנה 3.31, $y_1(t) = y(t_0 + t)$ ו־$y_2(t) = y(t_0 - t)$ הם שני פתרונות של (3.38) והם מקיימים $y_1(0) = y_2(0) = y(t_0)$, $y_1'(0) = y_2'(0) = 0$. הודות למשפט היחידות, פתרונות אלה זהים: $y(t_0 + t) \equiv y(t_0 - t)$. □

משפט 3.33 אם המשוואה (3.38) מקיימת תנאי משפט קיום ויחידות ולפתרון $y(t)$ קיימות שתי נקודות $t_1 < t_2$ כך ש־$y'(t_1) = y'(t_2) = 0$, אז הפתרון $y(t)$ מחזורי עם מחזור $T = 2(t_2 - t_1)$.

הוכחה. לפי משפט 3.32, $y(t_1 + t) = y(t_1 - t), \quad y(t_2 + t) = y(t_2 - t)$. על ידי שימוש חוזר ונשנה בזהויות אלה,

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_1 + (t - t_1)\,) = y(t_1 - (t - t_1)\,) = y(2t_1 - t) \\ &= y(t_2 + (2t_1 - t - t_2)\,) = y(t_2 - (2t_1 - t - t_2)\,) \\ &= y(t + 2(t_2 - t_1)\,)\ . \qquad \square \end{aligned}$$

בהנחה כי $y'(t) \not\equiv 0$ נכפול את המשוואה $y''(t) + f(y) = 0$ ב־y': $y''y' + f(y)y' = 0$.
נסמן $F(y) := \int_c^y f(y)\,dy$. מכיון ש־$y''y' = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}y'^2\right)$, $f(y)y' = \frac{d}{dt}F(y)$ אפשר לכתוב את המשוואה המשוואה בצורה

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}y'^2 + F(y)\right) = 0.$$

לכן

$$\frac{1}{2}y'^2 + \int_c^y f(y)\,dy \equiv \mathrm{C}. \tag{3.39}$$

שני האברים ב־(3.39) מייצגים אנרגיה קינטית ואנרגיה פוטנציאלית, והביטוי כולו מתאר את חוק שימור האנרגיה. (3.39) נקרא משוואת האנרגיה עבור המשוואה (3.38).

הזהות $\frac{1}{2}y'^2 + F(y) = C$ מאפשרת לפתור את המשוואה (3.38). אנו מקבלים

$$\frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{2\big(C - F(y)\big)}$$

וסימן השורש נקבע כסימנו של תנאי התחלה מתאים $y'(t_0)$. לאחר הפרדת משתנים ואינטגרציה שניה מקבלים

$$t - t_0 = \int_\alpha^y \frac{dy}{\sqrt{2\big(C - F(y)\big)}}\ ,$$

הקובע את $y = y(t)$ בעזרת פונקציה סתומה.

עד כאן התעלמנו מהמקרה בו $y'(t) \equiv 0$. במצב זה למשוואה (3.38) יש פתרון זהותית קבוע, $y(t) \equiv y_0$. התנאי לכך הוא $f(y_0) = 0$. אם קיים y_0 כזה, זהו פתרון סינגולרי שאינו כלול בפתרון הדו־פרמטרי שלמעלה.

דוגמא 3.28 נסתכל במשוואת התנועה של גוף הנורה מפני כדור הארץ כלפי מעלה. לפי חוק הכבידה של ניוטון, הכוח (וכמובן גם התאוצה) פרופורציוני הפוך לרבוע המרחק בין

מרכזי הגופים, כלומר $y''(t) = -k/y^2$. נסמן את רדיוס כדור הארץ ב־R ואת התאוצה על פני הכדור ב־g, אז בעיית ההתחלה היא

$$y''(t) = -g\frac{R^2}{y^2}, \qquad y(0) = R,\ y'(0) = v_0.$$

בדוגמא זו $F(y) = \dfrac{gR^2}{y}$ ובעזרת (3.39) ותנאי ההתחלה

$$\frac{1}{2}y'^2(t) + \frac{gR^2}{y} = C = \frac{1}{2}v_0^2 + \frac{gR^2}{R}.$$

ובצורה אחרת

$$\frac{1}{2}\left(y'^2(t) - {v_0}^2\right) = gR^2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right),$$

ומתקבל

$$\frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{({v_0}^2 - 2gR) + 2gR^2/y}\ . \tag{3.40}$$

א. אם ${v_0}^2 - 2gR \geq 0$ אז $y' \neq 0$ והוא חיובי כמו v_0,

$$t = \int_R^y \frac{dy}{\sqrt{({v_0}^2 - 2gR) + 2gR^2/y}} \ \to\ +\infty$$

כאשר $y \to +\infty$.

ב. אם ${v_0}^2 - 2gR < 0$ אז עבור $y_1 = 2gR^2/(2gR - {v_0}^2)$, הנגזרת (3.40) מתאפסת. מכיון ש־ $y''(t) = -k/y^2 < 0$, $y(t)$ קמור, y_1 מקסימום לוקלי והוא מתקבל עבור

$$t_1 = \int_R^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{2gR^2/y - (2gR - {v_0}^2)}}$$

מכאן והלאה $y(t)$ קמור ויורד עם $y'(t) = -\sqrt{2gR^2/y - (2gR - {v_0}^2)} < 0$ ושוב $y < y_1$. לכן מעבר למקסימום

$$t = \int_R^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{2gR^2/y - (2gR - {v_0}^2)}} + \int_{y_1}^{y(t)} \frac{dy}{-\sqrt{2gR^2/y - (2gR - {v_0}^2)}}$$

ומכיון ש־ $y(t) < y_1$,

$$= \int_R^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{2gR^2/y - (2gR - {v_0}^2)}} + \int_{y(t)}^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{2gR^2/y - (2gR - {v_0}^2)}}$$

$v_0 = \sqrt{2gR}$ היא המהירות ההתחלית המינימלית שעבורו הגוף המשוגר מתרחק ללא גבול ואינו חוזר. מהירות זו נקראת מהירות הבריחה (*escape velocity*). $\square$

על פי המודל של המשוואה $y'' = -y$ בעלת הפתרונות המחזוריים נבדוק את האפשרות כי למשוואה $y'' = -f(y)$ יהיה פתרון מחזורי. נניח כי $f(y)$ איזוגי ולכן $F(y) = \int_0^y f(y)\,dy$ זוגי, $f(y) \geq 0$ עבור $y > 0$ וכן $F(y) \geq 0$.

נצא מהמשוואה $\frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{2\big(C - F(y)\big)}$ ונניח כי קיים $y_1 > 0$ כך ש־$C = F(y_1)$. נניח גם כי $y'(0) > 0$, אז

$$t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{2\big(F(y_1) - F(y)\big)}} \ ,$$

וזו המשוואה הסתומה עבור $y = y(t)$ בתחום זה. בפרט נגדיר

$$t_1 := \int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{2\big(F(y_1) - F(y)\big)}} \ .$$

אם אינטגרל זה מתבדר אז $y(t) \to y_1$ כש־$t \to \infty$ והפתרון לא מחזורי.

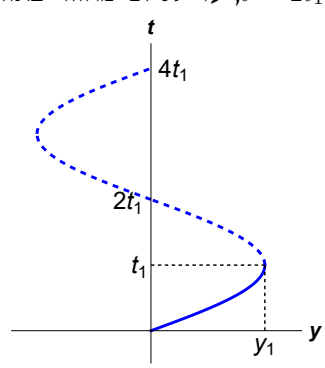
אם $f(y_1) = 0$ אז בהמשך $y(t) \equiv y_1$ פתרון. אחרת, אם $y''(t_1) = -f(y_1) < 0$ אז $y'(t) < 0$ עבור $t > t_1$ ו־$y_1 = y(t_1)$ היא האמפליטודה המקסימלית. מכאן ואילך

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{2\big(F(y_1) - F(y)\big)} \ ,$$

y יורד מ־y_1 ל־0 ו־t עולה מ־t_1 ל־$2t_1$ ובתחום זה

$$t = t_1 + \int_{y_1}^y \frac{dy}{-\sqrt{2\big(F(y_1) - F(y)\big)}} \ .$$

בסוף קטע זה $t = 2t_1$, $y(2t_1) = 0$, $y'(2t_1) = -y'(0) < 0$. מכאן והלאה הגרף נמשך על ידי הארכה איזוגית סביב $t = 2t_1$, עד לסיום מחזור באורך $T = 4t_1$ כמתואר באיור 3.12.



איור 3.12: t כפונקציה של y ומחזור שלם

דוגמא 3.29 נסתכל במשוואת המטוטלת (דוגמא 1.5) $y'' = -k^2 \sin y$. כאן

$$F(y) = \int_0^y -k^2 \sin y \, dy = k^2(\cos y - 1) = -2k^2 \sin^2(y/2),$$

והמחזור T הוא

$$\frac{T}{4} = \int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{4k^2\big(\sin^2(y_1/2) - \sin^2(y/2)\big)}} \ .$$

בעזרת ההצבה $u = \sin(y/2) \Big/ \sin(y_1/2)$,

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{k} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\big(1-u^2\big)\big(1-\sin^2(y_1/2)u^2\big)}} \ .$$

אינטגרל זה נקרא 'אינטגרל אליפטי שלם מהסוג הראשון' (complete elliptic integral of the first kind).

נשים לב כי המחזור משתנה מפתרון למישנהו ותלוי באמפליטודה המקסימלית. □

פרק 4

משוואות לינאריות מסדר כלשהו

4.1 משפט קיום ויחידות למשוואות לינאריות

משוואה מסדר n נקראת לינארית אם הנעלם y ונגזרותיו $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ מופיעים במשוואה רק באופן לינארי, כלומר הצורה הכללית של המשוואה היא

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x), \quad x \in I,$$

I אינטרואל סגור או פתוח, סופי או אינסופי. המשתנה החפשי x מופיע במקדמים $a_i(x), b(x)$ שבתכונותיהם נדון בהמשך. לרוב נניח כי $a_0(x) \neq 0$, נחלק בו ונעסוק במשוואה המנורמלת

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x).$$

בה הנגזרת הגבוהה ביותר של הנעלם, $y^{(n)}$, מופיעה עם מקדם 1. כזכור, תנאי ההתחלה המתאימים למשוואה מסדר n הם מהצורה

$$y(x_0) = \alpha_0, \quad y'(x_0) = \alpha_1, \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}.$$

כדי להתאים משפט קיום ויחידות לבעיית התחלה זו, נסמן כמו במשפט 3.16

$$u_1(x) = y(x), \quad u_2(x) = y'(x), \quad \cdots, \quad u_n(x) = y^{(n-1)}(x),$$

ונקבל מערכת משוואות

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2, \\ &\vdots \\ u_{n-1}' &= u_n, \\ u_n' &= q(x) - p_n(x)u_1 - p_{n-1}(x)u_2 - \cdots - p_1(x)u_n \end{aligned} \tag{4.1}$$

ותנאי ההתחלה

$$u_i(x_0) = \alpha_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.2}$$

(4.1) היא מערכת מהצורה (3.6) עם $f_i(x, u_1, \ldots, u_n) = u_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$,

$$f_n(x, u_1, \ldots, u_n) = q(x) - p_n(x)u_1 - p_{n-1}(x)u_2 - \cdots - p_1(x)u_n.$$

מכיון ש־$n-1$ הרכיבים הראשונים לינאריים, עלינו לדרוש רק כי הרכיב האחרון יהיה רציף בכל $n+1$ המשתנים $x, u_1, \ldots, u_n$ ומקיים תנאי ליפשיץ ביחס ל־n המשתנים $(u_1, \ldots, u_n)$. אך

$$|f_n(x, u_1, \ldots, u_n) - f_n(x, v_1, \ldots, v_n)| \le \sum_{i=1}^{n} \sup |p_{n-i}(x)| \cdot |u_i - v_i|,$$

לכן תנאי ליפשיץ גלובלי מתקיים כאשר הפונקציות $p_1(x), \ldots, p_n(x), q(x)$ רציפות עבור $x \in [a, b]$. זה מבטיח את משפט הקיום והיחידות הגלובלי (משפט 3.11) עבור בעיית ההתחלה הלינארית (4.1)־(4.2). נתרגם זאת בחזרה עבור המשוואה הלינארית מסדר n:

משפט 4.1 נתונה בעיית ההתחלה

$$\begin{aligned} &y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x), \\ &y(x_0) = \alpha_0, \quad y'(x_0) = \alpha_1, \quad \ldots\ , \quad y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

אם הפונקציות $q(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ רציפות בקטע $[a, b]$ ו־x_0 נקודה בקטע זה, אז לבעית ההתחלה (4.3) קיים פתרון $y(x)$, פתרון זה הוא יחיד והוא מוגדר בכל הקטע $[a, b]$. הפתרון מקיים שם $y \in C^n[a, b]$.

בדומה להכללה במשפט 3.12, אם המקדמים רציפים בקטע פתוח או אינסופי, גם פתרון בעיית ההתחלה קיים בקטע זה.

נעיר על המשמעות הגיאומטרית של יחידות הפתרון. כפי שראינו בסעיף 3.9, אם משוואה דיפרנציאלית סקלרית $y' = f(x, y)$ מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות בתחום במישור x, y אז הגרפים של שני פתרונות שונים שלה, $y_1(x), y_2(x)$, אינם יכולים להפגש. עבור משוואה מסדר $n > 1$, משמעות היחידות היא כי שני פתרונות שונים $y_1(x), y_2(x)$ אינם יכולים לקיים בנקודה x_0,

$$\big(y_1(x_0),\ \ldots,\ y_1^{(n-1)}(x_0)\big) = \big(y_2(x_0),\ \ldots,\ y_2^{(n-1)}(x_0)\big).$$

אך חלק מהנגזרות יכולות להיות שוות. עבור $n = 2$, למשל, $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ אפשרי אך לא ייתכן $\big(y_1(x_0),\ y_1'(x_0)\big) = \big(y_2(x_0),\ y_2'(x_0)\big)$, כלומר הגרפים של $y_1(x), y_2(x)$ יכולים להחתך אך לא להשיק זה לזה.

נדגים שמוש בתכונת היחידות.

דוגמא 4.1 נתונה משוואה $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ בעלת מקדמים רציפים, בה $p_1(x)$ פונקציה איזוגית ו־$p_2(x)$ פונקציה זוגית בקטע $[-a, a]$. הוכח כי פתרון תנאי ההתחלה $y(0) = y_0,\ y'(0) = 0$, היא פונקציה זוגית ב־$[-a, a]$.

פתרון. על פי משפט הקיום לבעיית ההתחלה יש פתרון $y(x)$ המוגדר בכל $[-a, a]$. כדי להוכיח כי $y(x)$ זוגי, עלינו להראות כי $y(-x) \equiv y(x)$ בקטע. לשם כך נגדיר פונקציה

$$z(x) := y(-x), \qquad -a \le x \le a,$$

ונוכיח כי גם פונקציה זו היא פתרון של אותה בעיית התחלה. ואכן מתקיים

$$z'(x) = -y'(-x), \quad z''(x) = y''(-x)$$

ונתון כי $p_1(-x) = -p_1(x),\ p_2(-x) = p_2(x)$. לכן $z(x)$ מקיים

$$\begin{aligned} z''(x) + p_1(x)z'(x) + p_2(x)z(x) \\ &= y''(-x) + (-p_1(-x))(-y'(-x)) + p_2(-x)y(-x) \\ &= (y'' + p_1y' + p_2y)(-x) = 0, \end{aligned}$$

כי $y(x)$ מקיים את המשוואה הנתונה בפרט בנקודה $-x \in [-a, a]$. $z(x)$ אף מקיים את שני תנאי ההתחלה

$$z(0) = y(-0) = y_0, \quad z'(0) = -y'(-0) = 0.$$

לכן על פי משפט הקיום והיחידות הפתרונות $z(x)$, $y(x)$, הם זהים, $y(-x) \equiv y(x)$, דהיינו $y(x)$ פונקציה זוגית.

באופן דומה אפשר להוכיח כי פתרון בעיית ההתחלה $y(0) = 0,\ y'(0) = y_1$ הוא איזוגי. הפעם יש להראות כי $-y(-x) \equiv y(x)$. $\square$

4.2 משוואות לינאריות הומוגניות

נוח להבדיל בין משוואות לינאריות בלתי הומוגניות

$$(NH) \qquad y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x), \tag{4.4}$$

עם $q(x) \not\equiv 0$, למשוואות הומוגניות

$$(H) \qquad y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \tag{4.5}$$

המונח "הומוגני" שאוב ממושגי האלגברה הלינארית ואין לו שום קשר למושג "משוואה דיפרנציאלית מטיפוס הומוגני" בו נתקלנו בפרק השני. את הדיון במשוואות לינאריות נתחיל במשוואות ההומוגניות.

אוסף הפעולות שאנו מפעילים על הפונקציה y כשמציבים אותה לאגף שמאל של המשוואה (4.5) יסומן לשם קצור ונוחיות ב־

$$L[y] := \left(\frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x)\right) y.$$

בסמון זה המשוואה ההומוגנית (H) תכתב בקצור כ־

$$L[y] = 0.$$

משפט 4.2 אם $y_1(x), y_2(x)$ פתרונות של (H) אז כל צרוף ליניארי $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ עם מקדמים קבועים הוא פתרון של (H). תכונה זו נקראת גם "עקרון הסופרפוזיציה".
במילים אחרות, L הוא אופרטור ליניארי ואוסף הפתרונות של (H) מהווה מרחב ליניארי, הגרעין *(kernel)* של L.

ההוכחה נובעת מחישוב ישיר המאמת כי

$$L[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2],$$

אשר נובע מ־

$$\frac{d}{dx}[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)] = c_1\frac{d}{dx}\,y_1 + c_2\frac{d}{dx}\,y_2.$$

תחום ההגדרה הטבעי המתאים לאופרטור הלינארי L הוא C^n.
בפרט הפונקציה $y(x) \equiv 0$ היא פתרון של כל משוואה הומוגנית, המתאים לתנאי ההתחלה $y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$. הוא מכונה הפתרון הטריוויאלי. □

מכיון שמדובר במרחב לינארי, ההגדרות והטענות הבאות דומות לאלה המוכרות מאלגברה לינארית. עלינו להגדיר ולאפיין בסיס למרחב ולברר מהו הממד שלו. כזכור אברי בסיס חיבים לקיים שתי תכונות:

1. הם בלתי תלויים לינארית (כלומר אין ביניהם יותר מדי אברים).
2. הם פורשים את המרחב (כלומר יש בהם די אברים).

הגדרת אי־תלות לינארית במרחב פונקציות שונה מעט מזו של וקטורים ב־R^n:

הגדרה 4.3 קבוצת פונקציות $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_m(x)$ המוגדרות בקטע I נקראות תלויות לינארית בקטע I אם קיימים קבועים $c_1, c_2, \ldots, c_m$, לא כולם אפס, כך ש־

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_mf_m(x) \equiv 0$$

לכל ערכי $x \in I$. אם אין $(c_1, \ldots, c_m) \neq (0, \ldots, 0)$ כאלה אז הפונקציות נקראות בלתי תלויות לינארית בקטע I.

הגדרת התלות הלינארית תלויה בקטע I. נסתכל למשל בשתי הפונקציות

$$f_1(x) = x^3, \qquad f_2(x) = |x|^3. \tag{4.6}$$

הפונקציות $f_1,\ f_2$ תלויות לינארית בקטע $(-\infty,0]$ כי $f_1(x)+f_2(x)\equiv 0$ שם. הן תלויות לינארית גם בקטע $[0,\infty)$ כי $f_1(x)-f_2(x)\equiv 0$ שם. אך $f_1,\ f_2$ בלתי תלויות לינארית בקטע $(-\infty,\infty)$ כי לא קיימים קבועים $(c_1,c_2)\neq(0,0)$ כך ש־$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)\equiv 0$ לכל x.

תרגיל 4.2 הוכח כי שתי הפונקציות

$$f_1(x)=\begin{cases} x^5, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\qquad\qquad f_2(x)=\begin{cases} 0, & x\geq 0,\\ x^7, & x<0,\end{cases}$$

בלתי תלויות לינארית בקטע $(-\infty,\infty)$.

תרגיל 4.3 הפונקציות $\{1,x,x^2,\ \ldots,\ x^m\}$ בלתי תלויות לינארית על $(-\infty,\infty)$ לכל m.

כי כל צרוף לינארי $c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m$ הוא פולינום ממעלה m, יש לו לכל היותר m אפסים בכל קטע, ואין הוא יכול להתאפס זהותית באף קטע. $\square$

מכיון שפתרון של המשוואה הדיפרנציאלית (H) נקבע על ידי n תנאי התחלה, סביר להניח כי מדובר במשפחה בעלת n דרגות חופש. המשפט המדויק בנושא זה הוא

משפט 4.4 אם המשוואה הלינארית, הומוגנית (H) (משוואה (4.5)) מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות בקטע מסוים I, אז אוסף הפתרונות שלה בקטע הוא מרחב לינארי n־ממדי.

הוכחה. כדי להוכיח את טענת המשפט, עלינו להציע n פתרונות ולהראות כי הם בלתי תלויים לינארית ופורשים את כל מרחב הפתרונות. נעשה זאת בשלושה שלבים.

שלב 1. כזכור, פתרון מזוהה על ידי n תנאי התחלה שהוא מקיים בנקודה מסוימת. ערכי התחלה אלה הם "תעודת הזהות" שלו. לכן נגדיר n פתרונות $\{y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)\}$ של (H) על ידי n קבוצות של תנאי התחלה. אפשר לבחור למשל את תנאי ההתחלה

$$y_1(x):\begin{cases} y_1(x_0)=1\\ y_1'(x_0)=0\\ \vdots\\ y_1^{(n-1)}(x_0)=0,\end{cases}\quad y_2(x):\begin{cases} y_2(x_0)=0\\ y_2'(x_0)=1\\ \vdots\\ y_2^{(n-1)}(x_0)=0,\end{cases}\quad\ldots\quad y_n(x):\begin{cases} y_n(x_0)=0\\ y_n'(x_0)=0\\ \vdots\\ y_n^{(n-1)}(x_0)=1.\end{cases}$$

אך באותה מידה אפשר לבחור את n קבוצות של תנאי התחלה גם על ידי

$$\begin{pmatrix} y_i(x_0)\\ \vdots\\ y_i^{(n-1)}(x_0)\end{pmatrix}=\mathbf{v}_i\,,\qquad i=1,\ldots,n,$$

כאשר $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ הם n וקטורים בלתי תלויים כלשהם. לפי משפט הקיום והיחידות לכל בעיית התחלה שלמעלה יש פתרון יחיד ולכן הגדרנו באמת n פתרונות של (H) בקטע I.

שלב 2. הפתרונות שהגדרנו למעלה בלתי תלויים לינארית ב־I. נניח להפך כי הם תלויים לינארית דהיינו קיימים קבועים $c_1,\ldots,c_n$, לא כולם 0, כך ש־

$$c_1\,y_1(x)\ +\ \cdots\ +\ c_n\,y_n(x)\equiv 0,\qquad x\in I.$$

הפתרונות בעלי n נגזרות רציפות, לכן אפשר לגזור אותם עוד $n-1$ פעמים ולקבל

$$\begin{gathered} c_1\,{y_1}'(x)\ +\ \cdots\ +\ c_n\,{y_n}'(x)\ \equiv 0,\\ \vdots\\ c_1 y_1^{(n-1)}(x)+\cdots+c_n y_n^{(n-1)}(x)\equiv 0. \end{gathered}$$

או בכתיב מטריצי־וקטורי

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x)\\ {y_1}'(x) & {y_2}'(x) & \cdots & {y_n}'(x)\\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

בפרט עבור $x=x_0$ נקבל מתנאי ההתחלה כי

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix},$$

או בהתאמה

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix}.$$

בשתי האפשרויות מדובר במטריצה הפיכה, לכן $c_1=\ldots=c_n=0$. מכאן נובעת המסקנה כי $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ שהגדרנו בשלב 1 הם בלתי תלויים לינארית ב־I.

שלב 3. לבסוף נראה כי הפתרונות שהגדרנו למעלה פורשים את מרחב הפתרונות של (H). עלינו להראות כי פתרון כלשהו $v(x)$ של (H) ניתן להצגה כצרוף לינארי

$$v(x)\equiv c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$$

לכל x ב־I, בעזרת קבועים מתאימים $c_1,c_2,\ldots,c_n$. נניח לרגע כי צרוף כזה אכן קיים, נגזור אותו $n-1$ פעמים ונציב בו $x=x_0$:

$$\begin{gathered} c_1\,y_1(x_0)\ +\ \cdots\ +\ c_n\,y_n(x_0)\ =v(x_0),\\ \vdots\\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\cdots+c_ny_n^{(n-1)}(x_0)=v^{(n-1)}(x_0), \end{gathered} \tag{4.8}$$

ובכתיב וקטורי

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(x_0) \\ \vdots \\ v^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

על פי תנאי ההתחלה שבחרנו, המטריצה שלמעלה הפיכה ולמערכת האלגברית, הלא־הומוגנית (4.8) יש פתרון יחיד $c_1, \ldots, c_n$.

זה עדין איננו מוכיח את טענתנו, כי הנחנו מראש שהקומבינציה הלינארית קיימת. אולם נסתכל על (4.8) כמערכת של n משוואות אלגבריות ב־n נעלמים $c_1, \ldots, c_n$ עם מטריצת מקדמים הפיכה ולה פתרון יחיד. עבור הקבועים $c_1, \ldots, c_n$ שמצאנו נגדיר

$$u(x) \stackrel{\text{def}}{\equiv} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

זו קומבינציה לינארית של פתרונות, לכן אף u פתרון של (H). יתר על כן, לפי (4.8) מתקיים

$$\begin{aligned} u(x_0) &= v(x_0), \\ &\vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) &= v^{(n-1)}(x_0). \end{aligned}$$

לכן $u(x), v(x)$ הם שני פתרונות של (H) המקימים את אותם תנאי ההתחלה ולפי משפט הקיום והיחידות הם זהים בכל הקטע I. במפורש,

$$v(x) \equiv c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x), \qquad x \in I,$$

כנדרש. $\square$

הערה. מה היה קורה לו השתמשנו במערכת דומה ל־(4.8) אך לא בנקודה מסוימת x_0 אלא בנקודה כלשהי x? במקרה זה, אם יש למערכת פתרון $c_1, \ldots, c_n$, ערכי הפתרון היו תלויים במשתנה x ולא קבועים כנדרש.

ללא משפט הקיום והיחידות טענת משפט 4.4 אינה נכונה. נצא מהמשוואה הדיפרנציאלית מסדר שני $y'' - (6/x)y' + (12/x^2)y = 0$ (עבור מקור המשוואה, ראה סעיף 4.6 בהמשך) ונתקן אותה למשוואה

$$\begin{aligned} &y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \\ &p_1(x) = \begin{cases} -6/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad p_2(x) = \begin{cases} 12/x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.10}$$

המשוואה החדשה מוגדרת לכל x, מקדמיה בלתי רציפים ב־$x = 0$ ותנאי משפט הקיום והיחידות 4.1 אינם בתוקף. קל לאמת באופן ישיר כי הפונקציות $y_1(x) = x^3$, $y_2(x) = x^4$ הן שני פתרונות בלתי תלויים לינארית של משוואה זו ב־$(-\infty, \infty)$. אך גם הפונקציות

$$y_3(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad y_4(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ x^4, & x < 0, \end{cases}$$

הן פתרונות ב־C^2 לאותה משוואה וכל הפתרונות האלה יחד הם בלתי תלויים לינארית ב־$(-\infty,\infty)$. מה ממד מרחב הפתרונות של (4.10) על $(-\infty,\infty)$ ומהו בסיס מתאים?

4.3 הוורונסקיאן ותפקידיו

ראינו כי מטריצה מהצורה המוזכרת במשוואות (4.9), (4.7) והפיכותה משחקות תפקיד באי־תלות של פונקציות ובפרישת מרחב על ידן. למרות שאנו עוסקים רק בפתרונות של משוואות דיפרנציאליות, נגדיר באופן כללי יותר:

הגדרה 4.5 תהיינה נתונות n פונקציות $f_1(x),\dots,f_n(x)$ ב־$C^{n-1}(I)$, לאו דווקא פתרונות של איזו משוואה דיפרנציאלית. הוורונסקיאן *(Wronskian)*[1] שלהם הוא הדטרמיננט

$$W(f_1,\dots,f_n)(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x)\\ f_1{}'(x) & f_2{}'(x) & \cdots & f_n{}'(x)\\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}$$

$$=\det\left(f_i^{(j)}(x)\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 0\le j\le n-1}}$$

משפט 4.6 תנאי הכרחי לתלות לינארית של n פונקציות $f_1(x),\dots,f_n(x)$ על קטע I הוא

$$W(f_1,\dots,f_n)(x)\equiv 0,\qquad x\in I.$$

הוכחה. מכיון שהפונקציות תלויות, קיימים קבועים $c_1,\dots,c_n$, לא כולם 0, כך ש־

$$c_1\,f_1(x)\ +\ \cdots\ +\ c_n\,f_n(x)\equiv 0,\qquad x\in I.$$

נגזור ונקבל בהמשך כי

$$\begin{aligned} c_1\,f_1'(x)\ +\ \cdots\ +\ c_n\,f_n'(x)\ &\equiv 0,\\ &\vdots\\ c_1f_1^{(n-1)}(x)+\cdots+c_nf_n^{(n-1)}(x)&\equiv 0\end{aligned}$$

באופן זהותי ב־I. ביחד זו מערכת של n משוואות הומוגניות וקיים לה פתרון לא־טריוויאלי $(c_1,\dots,c_n)\neq(0,\dots,0)$, ולכן דטרמיננט המערכת $W(f_1,\dots,f_n)(x)$ חייב להיות 0 לכל $x\in I$. □

[1] J. H. de Wronski, 1778-1853

התנאי אינו תנאי מספיק עבור תלות לינארית של פונקציות כלשהן. כזכור, שתי הפונקציות $f_1 = x^3,\ f_2 = |x|^3$ בלתי תלויות לינארית ב־(∞,∞) למרות ש־

$$W(f_1,f_2) = \begin{vmatrix} x^3 & x^3\,\mathrm{sgn}(x) \\ 3x^2 & 3x^2\,\mathrm{sgn}(x) \end{vmatrix} \equiv 0, \qquad \infty < x < \infty.$$

כשמדובר לא בפונקציות כלשהן אלא בפתרונות משוואה לינארית, הומוגנית שמקיימת תנאי משפט קיום ויחידות, המצב שונה.

משפט 4.7 תהיינה $y_1(x),\dots,y_n(x)$ פתרונות של משוואה (H) אשר מקיימת את תנאי אחד ממשפטי הקיום והיחידות בקטע I. אזי תנאי הכרחי ומספיק לתלות הלינארית שלהם הוא

$$W(y_1,\dots,y_n)(x) \equiv 0, \qquad x \in I.$$

גם $W(y_1,\dots,y_n)(x_0) = 0$ עבור נקודה אחת x_0 כלשהי בקטע I הוא תנאי הכרחי ומספיק לתלות לינארית.

הוכחה. הכרחיות התנאי הוכחה במשפט הקודם.

נראה כי אפילו ההנחה כי $W(y_1,\dots,y_n)(x_0) = 0$ עבור נקודה אחת מספיקה להבטחת תלות לינארית. אם דטרמיננט זה מתאפס אז למערכת n המשוואות האלגבריות, לינאריות, הומוגניות

$$\begin{aligned} c_1\,y_1(x_0) \ + \ \cdots \ + \ c_n\,y_n(x_0) &\equiv 0, \\ c_1\,y_1{}'(x_0) \ + \ \cdots \ + \ c_n\,y_n{}'(x_0) &\equiv 0, \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ \cdots \ + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) &\equiv 0 \end{aligned}$$

יש פתרון לא־טריוויאלי $(c_1,\dots,c_n) \neq (0,\dots,0)$. נקח n מספרים $c_1,\dots,c_n$ אלה ונגדיר בעזרתם את הצרוף הלינארי

$$u(x) \stackrel{\text{def}}{\equiv} c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x).$$

צרוף זה גם הוא כמובן פתרון של (H) ולפי צורת הגדרתו הוא מקיים בנקודה x_0 את n תנאי ההתחלה

$$\begin{aligned} u(x_0) \ &= 0, \\ &\vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) &= 0. \end{aligned}$$

מצד שני, גם הפונקציה $v(x) \equiv 0$, היא פתרון של כל משוואה דיפרנציאלית, לינארית, הומוגנית ואף היא מקיימת את אותם תנאי ההתחלה. לפי משפט היחידות שמתקיים, שני פתרונות אלה זהים, $u(x) \equiv v(x)$ בקטע I. במילים אחרות,

$$c_1\,y_1(x) \ + \ \cdots \ + \ c_n\,y_n(x) \equiv 0, \qquad x \in I.$$

בזה מצאנו את התלות הלינארית בין הפתרונות. $\square$

מסקנה 4.8 תהיינה $y_1(x),\dots,y_n(x)$ פתרונות של משוואה (H) אשר מקיימת את תנאי אחד ממשפטי הקיום והיחידות בקטע I. אז $W(y_1,\dots,y_n)$ מתאפס בנקודה אחת של I, אם ורק אם $W(y_1,\dots,y_n)$ מתאפס זהותית בכל I.

הוכחה. אם $W(y_1,\dots,y_n)(x_0)=0$, אז לפי התנאי המספיק בהוכחה הקודמת, $y_1(x),\ \dots\ ,y_n(x)$ תלויים לינארית ב־I. אך לפי התנאי ההכרחי שלמעלה, התלות גוררת כי $W(y_1,\dots,y_n)(x)\equiv 0$ ב־I. הכיוון ההפוך מובן מאליו. □

מסקנה 4.8 אינה נכונה ללא משפט קיום ויחידות. נסתכל שוב במשוואה (4.10). כזכור, הפונקציות $y_1(x)=x^3,\ y_2(x)=x^4$ הן שני פתרונות בלתי תלויים לינארית של משוואה זו, אך הוורונסקיאן שלהם

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} x^3 & x^4\\ 3x^2 & 4x^3\end{vmatrix}=x^6$$

מתאפס בנקודה $x=0$ ושונה מ־0 בכל מקום אחר.

דטרמיננט הוורונסקיאן מקיימת זהות שימושית.

משפט 4.9 (נוסחת Abel [2]**)** נתונה המשוואה הדיפרנציאלית המנורמלת

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \qquad \text{(H)}$$

אם $y_1(x),\dots,y_n(x)$ הם n פתרונות כלשהם של המשוואה (H) אז הוורונסקיאן שלהם מקיים

$$W(y_1,\dots,y_n)(x)=W(y_1,\dots,y_n)(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p_1(t)\,dt} \tag{4.11}$$

בקטע בו האינטגרל מוגדר.

הוכחה. עבור ההוכחה נחוצה לנו נוסחה לגזירת דטרמיננטים. כידוע, פתוח דטרמיננט הוא

$$\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n}\end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1,\sigma_1}\cdot a_{2,\sigma_2}\cdots a_{n,\sigma_n}$$

כאשר σ מציין פרמוטציה מתוך אוסף הפרמוטציות של n אלמנטים, S_n ו־$\operatorname{sgn}(\sigma)$ הוא ±1 בהתאם לזוגיות הפרמוטציה σ. מכיון שמדובר בגזירת סכום של מכפלות, נגזרת של דטרמיננט היא

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\det(a_{ij}(x))&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1,\sigma_1}\cdot a_{2,\sigma_2}\cdots a'_{k,\sigma_k}\cdots a_{n,\sigma_n}\\ &=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a'_{k,1} & a'_{k,2} & \dots & a'_{k,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

[2] Niels Henrik Abel, 1802-1829

כשמפעילים נוסחת גזירה זו על דטרמיננט הוורונסקיאן

$$W(y_1,\dots,y_n)(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x)\\ {y_1}'(x) & {y_2}'(x) & \cdots & {y_n}'(x)\\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x)\\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix},$$

בכל הדטרמיננטים המתקבלים יש שתי שורות זהות עוקבות הגורמות להתאפסות, למעט במחובר האחרון:

$$\frac{d}{dx}W(y_1,\dots,y_n)(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x)\\ {y_1}'(x) & {y_2}'(x) & \cdots & {y_n}'(x)\\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x)\\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x)\end{vmatrix}.$$

אך y_i הם פתרונות המשוואה (H), לכן אפשר לכתוב דטרמיננט זה כ־

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots\\ {y_1}'(x) & {y_2}'(x) & \cdots\\ \vdots & & \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_n^{(n-2)}(x) & \\ -p_1y_1^{(n-1)}-\ldots-p_{n-1}y_1'-p_ny_1 & -p_1y_2^{(n-1)}-\ldots-p_ny_2 & \cdots\end{vmatrix}.$$

לשורה האחרונה נחבר p_n פעמים את השורה הראשונה, p_{n-1} פעמים את השורה השניה, וכולי, עד p_2 פעמים את השורה הלפני אחרונה. לאחר זאת יישאר

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x)\\ {y_1}'(x) & {y_2}'(x) & \cdots & {y_n}'(x)\\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x)\\ -p_1y_1^{(n-1)}(x) & -p_1y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & -p_1y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}=-p_1(x)W(y_1,\dots,y_n).$$

כך קיבלנו עבור הוורונסקיאן $W(x)=W(y_1,\dots,y_n)(x)$ את המשוואה הדיפרנציאלית $W'(x)=-p_1(x)W(x)$. על ידי הפרדת משתנים ואינטגרציה נקבל כי

$$\log W(x)-\log W(x_0)=-\int_{x_0}^{x}p_1(t)\,dt$$

כנדרש. □

נוסחה (4.11) מהווה הוכחה נוספת למסקנה 4.8. אמנם הנחנו כי כל מקדמי המשוואה רציפים בשעה שרק אחד מהם, $p_1(x)$, מופיע בפועל בנוסחה ובהוכחתה. אולם ללא הנחת הרציפות של כל המקדמים, עצם קיום הפתרונות אינו מובטח.

למשוואה $y'' - (6/x)y' + (12/x^2)y = 0$ שהוזכרה ב־(4.10) יש פתרונות x^3, x^4. הוורונסקיאן שלהם הוא $W(x^3, x^4) = x^6$ שמתאפס אך ורק ב־$x = 0$. כאן נוסחת אבל (4.11) עם $x_0 = 0$, $W(x) = W(0)e^{-\int_0^x (-6/t)\,dt}$, חסרת משמעות כי ב"נוסחה" זו האינטגרל לא מוגדר בגלל גבולו התחתון.

תרגיל 4.4 נתונה המשוואה הבלתי מנורמלת מסדר שני $\big(p(x)y'\big)' + q(x)y = 0$, $p(x) \neq 0$. לשמושי צורה זו ראה סעיף 5.2. אז ורונסקיאן שני פתרונות המשוואה הוא מהצורה $W(y_1, y_2)(x) = K/p(x)$, K קבוע.

תרגיל 4.5 נתונות n פונקציות $y_1(x), \ldots, y_n(x) \in C^n(I)$. מצא משוואה דיפרנציאלית לינארית, הומוגנית מסדר n שפונקציות אלה הם פתרונותיה. מה התנאי שאפשר יהיה לכתוב משוואה דיפרנציאלית זו כמשוואה מנורמלת עם מקדמים רציפים?

פתרון. נרשום את דטרמיננט הורונסקיאן מסדר $(n+1) \times (n+1)$,

$$W(y, y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y(x) & y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'(x) & {y_1}'(x) & \cdots & {y_n}'(x) \\ \vdots & & & \\ y^{(n-1)}(x) & y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \\ y^{(n)}(x) & y_1^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

כשמפתחים דטרמיננט זה לפי עמודתו הראשונה, מתקבלת משוואה דיפרנציאלית לינארית, הומוגנית מסדר n בנעלם y ומקדם הנגזרת ה־n־ית הוא $(-1)^n W(y_1, \ldots, y_n)$. הצבת כל $y(x) = y_i(x)$ מאפסת את הדטרמיננט, לכן קיבלנו את המשוואה הדרושה. אם $W(y_1, \ldots, y_n)(x) \neq 0$ בקטע הנדון, נוכל לחלק בו ולקבל כי

$$(-1)^n \frac{W(y, y_1, \ldots, y_n)}{W(y_1, \ldots, y_n)} = 0$$

היא המשוואה המנורמלת, כדרוש.

יש רק משוואה מנורמלת יחידה ש־n הפונקציות לינארית מקימות אותה. כי לו היו שתי משוואות שונות, $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$, $y^{(n)} + q_1 y^{(n-1)} + \cdots + q_n y = 0$, אז גם למשוואה $(p_1 - q_1)y^{(n-1)} + \cdots + (p_n - q_n)y = 0$ מסדר $n-1$ היו n פתרונות בלתי תלויים, סתירה. $\square$

תרגיל 4.6 לכל אחד מקבוצות הפונקציות הבאות מצא משוואה לינארית, הומוגנית שאלה הם פתרונותיה: א. $\{e^{\alpha x}, e^{\beta x}\}$ ב. $\{x^\alpha, x^\beta\}$ ג. $\left\{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right\}$

תרגיל 4.7 לשוויון $\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{y'y_1 - yy_1'}{{y_1}^2} = \frac{W(y_1,y)}{{y_1}^2}$ יש הכללה

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{W(y_1,\ldots,y_{n-1},y)}{W(y_1,\ldots,y_{n-1},y_n)}\right) = \frac{W(y_1,\ldots,y_{n-1})W(y_1,\ldots,y_{n-1},y_n,y)}{W(y_1,\ldots,y_n)^2}.$$

כדי להוכיח את השוויון, נסתכל על הביטוי בכל אגף כאופרטור דיפרנציאלי לינארי הפועל על y. אז כל אחד משני האגפים הוא אופרטור לינארי ממעלה n, מקדם $y^{(n)}$ בשניהם הוא $W(y_1,\ldots,y_{n-1})/W(y_1,\ldots,y_{n-1},y_n)$ ו־n הפונקציות $y_1,\ldots,y_n$ מאפסות אותם. לכן אלה שני אופרטורים לינאריים זהים. □

תרגיל 4.8 הוכח כי אם משוואה לינארית הומוגנית מנורמלת $L[y]=0$ מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות בקטע סגור וסופי $[a,b]$, אז לאף פתרון לא טרויאלי שלה אין אינסוף אפסים בקטע זה.

פתרון. נניח בדרך השלילה כי הפתרון $y(x) \not\equiv 0$ מתאפס אינסוף פעמיים בקטע $[a,b]$, $y(x_i)=0$, $a \le x_1 < x_2 < \ldots \le b$. סדרת האפסים חייבת להתכנס לגבול מסוים, $\lim_{i\to\infty} x_i = L$, $a \le L \le b$. בנקודת הגבול $y(L) = \lim_{i\to\infty} y(x_i) = 0$.

על פי משפט רול, בין כל שני אפסים עוקבים של $y(x)$ יש אפס של $y'(x)$,

$$y'(x_i^{(1)}) = 0, \qquad x_1 < x_1^{(1)} < x_2 < \ldots < x_i < x_i^{(1)} < x_{i+1} < \ldots$$

וכמובן גם $\lim_{i\to\infty} x_i^{(1)} = L$, $y'(L) = \lim_{i\to\infty} y'(x_i^{(1)}) = 0$.

באופן דומה נעבור מנגזרת לנגזרת ונפעיל את משפט רול, עד שנקבל כי גם לנגזרת $y^{(n-1)}(x)$ יש סדרת אפסים $x_i^{(n-1)}$ המתכנסת לאותו גבול

$$\lim_{i\to\infty} x_i^{(n-1)} = L, \qquad y^{(n-1)}(L) = \lim_{i\to\infty} y^{(n-1)}(x_i^{(n-1)}) = 0.$$

קיבלנו כי הפתרון שלנו מקיים את n תנאי ההתחלה $y(L) = \cdots = y^{(n-1)}(L) = 0$. אך גם הפתרון הטריויאלי מקיים את אותם תנאי ההתחלה ומפאת היחידות $y(x) \equiv 0$ בסתירה להנחה. □

4.4 הורדת סדר משוואה

נתונה המשוואה $L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0$ ולה ידועים m פתרונות בלתי תלויים לינארית $y_1,\ldots,y_m$, $m < n$. בעזרת הפתרונות הידועים ננסה להוריד את סדר המשוואה ולפשט אותה.

יש נקודה וסביבה שלה בה $y_1(x) \neq 0$. בסביבה זו נציב $y(x) = y_1(x)v(x)$ ונתייחס

ל־v כנעלם החדש. אז

$$\begin{aligned} L[y_1 v] &= (y_1 v)^{(n)} + p_1(x)(y_1 v)^{(n-1)} + \cdots + p_n(y_1 v) \\ &= y_1 v^{(n)} + q_1(x) v^{(n-1)} + \cdots + q_{n-1}(x) v' + q_n(x) v, \end{aligned}$$

עם $q_1(x), q_2(x), \ldots$ מסוימים. עבור $v(x) \equiv 1$ מתקבל כי $q_n(x) \cdot 1 = L[y_1] = 0$, על כן המשוואה הנתונה $L[y] = 0$ הופכת ל־

$$y_1 v^{(n)} + q_1(x) v^{(n-1)} + \cdots + q_{n-1}(x) v' = 0.$$

נסמן $z(x) = v'(x)$ ונחלק ב־ $y_1(x) \neq 0$. כך מתקבלת משוואה מסדר $n-1$ עבור הנעלם $z(x)$,

$$z^{(n-1)} + \hat{q}_1(x) z^{(n-2)} + \cdots + \hat{q}_{n-1}(x) z = 0. \tag{4.12}$$

אם מוצאים $n-1$ פתרונות בלתי תלויים $\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ של המשוואה החדשה אז השגנו גם n פתרונות למשוואה המקורית, $\{y_1 \int z_1,\ \ldots,\ y_1 \int z_{n-1},\ y_1\}$. הם בלתי תלויים, כי אם קיים צרוף לינארי

$$c_1 y_1 \int z_1 + \cdots + c_{n-1} y_1 \int z_{n-1} + c_n y_1 \equiv 0,$$

אז נחלק ב־$y_1(x) \neq 0$, נגזור ונקבל $c_1 z_1 + \cdots + c_{n-1} z_{n-1} \equiv 0$. אבל $z_1, \ldots, z_{n-1}$ בלתי תלויים, לכן $c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$ וכן גם $c_n = 0$.

עד כאן ניצלנו את הפתרון $y_1(x)$ וטרם השתמשנו בידיעת הפתרונות $y_2, \ldots, y_m$. מכיון ש־$z = v' = (y/y_1)'$, הרי

$$\left\{ \left(\frac{y_2}{y_1}\right)',\ \ldots\ , \left(\frac{y_m}{y_1}\right)' \right\}$$

הם $m-1$ פתרונות מוכרים של (4.12). גם הם בלתי תלויים. כי אם קיים צרוף לינארי

$$d_1 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' + \ \ldots\ + d_{m-1} \left(\frac{y_m}{y_1}\right)' \equiv 0,$$

אז $d_1 \dfrac{y_2}{y_1} + \ \ldots\ + d_{m-1} \dfrac{y_m}{y_1} \equiv d_m$, כלומר $d_1 y_2 + \ \ldots\ + d_{m-1} y_m - d_m y_1 \equiv 0$, לכן $d_1 = \ldots = d_m = 0$. עכשיו אפשר לחזור על תהליך הורדת הסדר שלמעלה עוד $m-1$ פעמים ולהגיע למשוואה דיפרנציאלית מסדר $n-m$.

דוגמא 4.9 אם למשוואה מסדר שני $L[y] \equiv y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0$ ידוע פתרון $y_1(x)$, אז ההצבה $y = y_1 v$ מובילה ל־

$$\begin{aligned} L[y_1 v] &= (y_1 v'' + 2y_1{}' v' + y_1{}'' v) + p_1(y_1 v' + y_1{}' v) + p_2(y_1 v) \\ &= y_1 v'' + (2y_1{}' + p_1 y_1) v' + (y_1{}'' + p_1 y_1{}' + p_2 y_1) v \\ &= y_1 v'' + (2y_1{}' + p_1 y_1) v' = 0. \end{aligned}$$

הצבה נוספת $z = v'$ מובילה למשוואה מסדר ראשון $z' + (2\frac{{y_1}'}{y_1} + p_1)z = 0$, שנוחה לפתרון. בעזרת הפרדת משתנים ואינטגרציה ראשונה, $\log z = -2\log y_1 - \int p_1 + \log c$ ולכן

$$v' = z = c{y_1}^{-2}e^{-\int p_1}.$$

בעקבות אינטגרציה שניה, $\frac{y}{y_1} = v = c\int\left({y_1}^{-2}e^{-\int p_1}\right) + d$ ומקבלים פתרון מלא של המשוואה המקורית,

$$y = cy_1\int\left({y_1}^{-2}e^{-\int p_1}\right) + d\,y_1.$$

$y_2 = y_1\int\frac{e^{-\int p_1}}{{y_1}^2}$ הוא לפיכך פתרון שני, בלתי תלוי לינארית ב־y_1. לפתרון זה אפשר להגיע גם בעזרת נוסחת אבל, כי

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_2'y_1 - y_2y_1'}{{y_1}^2} = \frac{W(y_1,y_2)}{{y_1}^2} = c\,\frac{e^{-\int p_1}}{{y_1}^2}\ . \qquad \square$$

תרגיל 4.10 למשוואה $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ יש פתרון $y_1(x) = x$ (בדוק!). מצא את כל פתרונותיה.

דוגמא 4.11 אם למשוואה מסדר שני $y'' + p(x)y = 0$ שני פתרונות בלתי תויים $y_1(x), y_2(x)$ ו־ $f = \frac{y_2}{y_1}$, אז $\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = 2p(x)$. הביטוי שבאגף שמאל נקרא הנגזרת השוורצית (Schwarzian derivative).[3]

4.5 משוואות עם מקדמים קבועים

אחד הסוגים הבודדים של משוואות דיפרנציאליות שאנו יודעים לפתור באופן שיטתי הן המשוואות הלינאריות בעלות המקדמים הקבועים,

$$L[y] := a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \quad -\infty < x < \infty, \tag{4.13}$$

כאשר $a_0,\ldots,a_n$ מספרים קבועים, $a_0 \neq 0$. בסעיף זה אין חשיבות שהמשוואה תהיה מנורמלת דווקא.

נחפש פתרונות מהצורה $y(x) = e^{rx}$, כאשר r קבוע בלתי ידוע. ההגיון בבחירה זו הוא שכל נגזרות פונקציה זו הן כפולות של e^{rx} ולכל האברים באגף שמאל של המשוואה יהיה

[3] Hermann Schwarz, 1843–1921

גורם משותף. נפעיל את האופרטור $L[\ \ ]$ על הפונקציה $y(x)=e^{rx}$ ונקבל

$$\begin{aligned} L[e^{rx}] &= a_0(r^n e^{rx}) + a_1(r^{n-1}e^{rx}) + \cdots + a_{n-1}re^{rx} + a_n e^{rx} \\ &= e^{rx}\left(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}r + a_n\right) \\ &= P(r)e^{rx}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

הביטוי $P(r) = a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}r + a_n$ נקרא הפולינום האופייני של המשוואה הדיפרנציאלית ההומוגנית (4.13). הודות ל־(4.14), e^{rx} הוא פתרון של המשוואה הדיפרנציאלית ההומוגנית אם ורק אם r שורש של המשוואה האופיינית

$$P(r) = a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

על פי המשפט היסודי של האלגברה, למשוואה האופיינית יש בדיוק n שרשים, שונים או שוים, ממשיים או מרוכבים. מטרתנו היא לרשום בסיס של פתרונות בכל אחד ממקרים אלה.

אם כל שרשי הפולינום האפיני הם מספרים ממשיים, שונים זה מזה, $r_1,\ldots,r_n$, אז $e^{r_1x},\ldots,e^{r_nx}$ הם n פתרונות של המשוואה הדיפרנציאלית. כדי לאמת שהם בלתי תלויים לינארית לכל x, נחשב את הורונסקיאן שלהם:

$$W\left(e^{r_1x},e^{r_2x},\ldots,e^{r_nx}\right) = \begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} & \cdots & e^{r_nx} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x} & \cdots & r_ne^{r_nx} \\ \vdots & & & \\ r_1^{n-1}e^{r_1x} & r_2^{n-1}e^{r_2x} & \cdots & r_n^{n-1}e^{r_nx} \end{vmatrix}.$$

נוציא מכל עמודה של המטריצה גורם משותף e^{r_ix} ונקבל

$$e^{(r_1+r_2+\ldots+r_n)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ \vdots & & & \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

הדטרמיננט האחרון נקרא דטרמיננט Vandermonde[4] וערכו הוא

$$\prod_{1\le i<j\le n}(r_j-r_i) = (r_2-r_1)(r_3-r_1)\cdots(r_n-r_1)(r_3-r_2)\ldots(r_n-r_{n-1}) \neq 0.$$

על כן $e^{r_1x},\ldots,e^{r_nx}$ מהווים בסיס למרחב הפתרונות של (4.13). בהמשך נראה הוכחה נוספת לאי תלות של פונקציות אלה.

אם אחדים משרשי הפולינום האופייני מתלכדים, לא עומדים לרשותנו n שרשים שונים והגישה שלמעלה לא תספק לנו n פתרונות מעריכיים שונים. נניח כי k משרשי הפולינום האופייני מתלכדים, למשל $r_1=\ldots=r_k\neq r_{k+1}$.

[4] Alexandre-Theophile Vandermonde, 1735-1796

מוטיווציה אפשרית לטיפול במצב זה היא "החלפת" השוויון $r_2 = r_1$ בגבול $r_2 \to r_1$. ובאמת, $y(x) = \dfrac{e^{r_2 x} - e^{r_1 x}}{r_2 - r_1}$ הוא פתרון כאשר $r_2 \neq r_1$, וכאשר $r_2 \to r_1$, הפתרון "שואף" ל־

$$\frac{e^{r_2 x} - e^{r_1 x}}{r_2 - r_1} \to \frac{\partial}{\partial r}\left(e^{rx}\right)\Big|_{r=r_1} = xe^{r_1 x}.$$

לאור מוטיווציה זו ננסה לגזור את הזהות (4.14) ℓ פעמים לפי המשתנה r ולבסוף להציב את הערך $r = r_1$. האופרטור L מציין גזירה לפי x לכן הוא מתחלף עם גזירה לפי r, $L\left[\dfrac{\partial^\ell}{\partial r^\ell}\left(e^{rx}\right)\right] = \dfrac{\partial^\ell}{\partial r^\ell}\Big(L[e^{rx}]\Big)$. לפי נוסחת ליבניץ לנגזרת של מכפלה,

$$\begin{aligned} L[x^\ell e^{rx}] &= L\left[\frac{\partial^\ell}{\partial r^\ell}\left(e^{rx}\right)\right] = \frac{\partial^\ell}{\partial r^\ell}\Big(L[e^{rx}]\Big) = \frac{\partial^\ell}{\partial r^\ell}\Big(P(r)e^{rx}\Big) \\ &= P^{(\ell)}(r)e^{rx} + \binom{\ell}{1}P^{(\ell-1)}(r)xe^{rx} + \ldots + \binom{\ell}{\ell}P(r)x^\ell e^{rx}. \end{aligned}$$

התלכדות k אפסים של הפולינום האופייני משמעותה

$$P(r_1) = P'(r_1) = \ldots = P^{(k-1)}(r_1) = 0, \quad P^{(k)}(r_1) \neq 0.$$

לכן עבור $r = r_1$ מתקבל $L[x^\ell e^{r_1 x}] = 0$ לכל $\ell = 1, \ldots, k-1$. בזה הצלחנו להתאים לכל שורש מריבוי k של הפולינום האופייני, k פתרונות $e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, \ldots, x^{k-1}e^{r_1 x}$ של המשוואה הדיפרנציאלית, סך הכל n פתרונות.

נותר להוכיח כי הפתרונות שאיתרנו בלתי תלויים לינארית ומהווים בסיס. נוכיח טענה מעט כללית יותר.

משפט 4.10 אם $r_1, \ldots, r_q$ מספרים שונים זה מזה ו־$p_1(x), \ldots, p_q(x)$ פולינומים ממעלה כלשהי, אז הפונקציות $p_1(x)e^{r_1 x}, \ldots, p_q(x)e^{r_q x}$ בלתי תלויות לינארית בכל קטע.

הוכחה. נניח כי קיימת תלות לינארית $c_1 p_1(x)e^{r_1 x} + \cdots + c_q p_q(x)e^{r_q x} \equiv 0$ לכל x בקטע I. נחלק ב־$e^{r_q x}$ ונגזור את הזהות בן q המחוברים

$$c_1 p_1(x)e^{(r_1 - r_q)x} + \cdots + c_{q-1}p_{q-1}(x)e^{(r_{q-1} - r_q)x} + c_q p_q(x) \equiv 0$$

$\deg[p_q(x)]$ פעמים, עד שהפולינום $p_q(x)$ יעלם. מכיון ש־

$$\Big(p_1(x)e^{(r_1 - r_q)x}\Big)' = \Big(p_1(x)(r_1 - r_q) + {p_1}'(x)\Big)e^{(r_1 - r_q)x}$$

ו־$r_1 - r_q \neq 0$, דרגות הפולינומים נשמרות עם הגזירה ונקבל $q-1$ מחוברים

$$c_1 \hat{p}_1(x)e^{(r_1 - r_q)x} + \cdots + c_{q-1}\hat{p}_{q-1}(x)e^{(r_{q-1} - r_q)x} \equiv 0$$

עם $\deg[\hat{p}_i(x)] = \deg[p_i(x)]$. נחזור על תהליך זה ולאחר q צעדים נקבל לבסוף כי $c_1 \hat{\hat{p}}_1(x)e^{(r_1 - r_2)x} \equiv 0$, בו $\hat{\hat{p}}_1(x)$ פולינום ממעלה $\deg[p_1(x)]$ בדיוק. מכאן נובע ש־$c_1 = 0$. באופן דומה נסיק כי כל המקדמים מתאפסים והפונקציות בלתי תלויות לינארית.

כמקרה פרטי זו הוכחה נוספת כי $e^{r_1x},\dots,e^{r_nx}$, $r_i\neq r_j$, בלתי תלויים לינארית.
□

תרגיל 4.12 הוכח כי הפונקציות $x^{r_1},\dots,x^{r_n}$, $r_i\neq r_j$, בלתי תלויות לינארית ב־$(0,\infty)$.

נותר להסביר את המצב כאשר לפולינום האופייני יש שרשים מרוכבים. במקרה זה אנו מאמצים את הגדרת הפונקציה המעריכית $\exp(z)$ או e^z (על פי נוחיות הכתיבה) כמקובל בתורת הפונקציות, על ידי

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\ ,\qquad z\in\mathbb{C}\ .$$

פונקציה זו מקיימת $\frac{d}{dz}e^z=e^z$ וכן את נוסחת הסכום

$$\begin{aligned}e^{z_1}e^{z_2}&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{{z_1}^n}{n!}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{{z_2}^k}{k!}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\sum_{n+k=m}\frac{m!}{n!\,k!}\,{z_1}^n{z_2}^k\right)\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\,(z_1+z_2)^m=e^{(z_1+z_2)}.\end{aligned}$$

לפתרון משוואות לינאריות עם מקדמים קבועים השתמשנו רק בנוסחאות גזירה ובפעולות אלגבריות. לכן כל שיטות הפתרון נשארות בתוקף אפילו כאשר המקדמים הקבועים, שורשי הפולינום האופייני ואפילו המשתנה החפשי הם מרוכבים, בתנאי שהפונקציה המעריכית מוגדרת כמו למעלה.

אנו מעונינים בעיקר במצב בו מקדמי המשוואה $a_0,\dots,a_n$ ממשיים. במקרה זה, אם לפולינום האופייני יש שורש מרוכב $r_1=\alpha+i\beta$, אז גם המספר הצמוד $r_2=\overline{r_1}=\alpha-i\beta$ הוא שורש. לשורש r_1 מתאים לפי הכללים שלנו הפתרון $e^{r_1x}=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{i\beta x}$ כאשר

$$\begin{aligned}e^{i\beta x}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i\beta x)^n}{n!}=1+(i\beta x)+\frac{(i\beta x)^2}{2!}+\frac{(i\beta x)^3}{3!}+\cdots\\&=\left(1-\frac{(\beta x)^2}{2!}+\frac{(\beta x)^4}{4!}\mp\cdots\right)+i\left(\beta x-\frac{(\beta x)^3}{3!}+\frac{(\beta x)^5}{5!}\mp\cdots\right)\\&=\cos(\beta x)+i\sin(\beta x),\end{aligned}\tag{4.15}$$

ובאופן דומה $e^{-i\beta x}=\cos(\beta x)-i\sin(\beta x)$. כך אנו מקבלים כי לשורשים הצמודים r_1,r_2 מתאימים הפתרונות המרוכבים וצמודים

$$e^{r_1x}=e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x)+i\sin(\beta x)\big),\qquad e^{r_2x}=e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x)-i\sin(\beta x)\big).$$

מכיון שיצאנו ממשוואה דיפרנציאלית ממשית, אנו מעונינים למצוא את פתרונותיה הממשיים. נשיג זאת על ידי יצירת צרופים לינאריים)עם מקדמים מרוכבים(

$$y_1(x)=\frac{1}{2}\,(e^{r_1x}+e^{r_2x})=e^{\alpha x}\cos(\beta x),\quad y_2(x)=\frac{1}{2i}\,(e^{r_1x}-e^{r_2x})=e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

נותר רק להראות כי הקומבינציות הלינאריות שומרות על אי־תלות לינארית. אם נסמן $v_1 = e^{r_1 x}, v_2 = e^{r_2 x}$, אז על ידי פעולות אלמנטריות על עמודות הוורונסקיאן,

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2, \ldots) &= W(\frac{v_1+v_2}{2}, \frac{v_1-v_2}{2i}, \ldots) = \frac{1}{i}\, W(\frac{v_1+v_2}{2}, \frac{v_1-v_2}{2}, \ldots) \\ &= \frac{1}{i}\, W(v_1, \frac{v_1-v_2}{2}, \ldots) = \frac{1}{2i}\, W(v_1, -v_2, \ldots) \neq 0. \end{aligned}$$

דוגמא 4.13 א. למשוואה הדיפרנציאלית $y'' + \omega^2 y = 0$ פולינום אופייני $r^2 + \omega^2 = 0$ ושרשים $r_1 = 0 + \omega i,\ r_2 = 0 - \omega i$. לפיכך למשוואה יש בסיס של פתרונות ממשיים

$$y_1(x) = e^{0x}\cos(\omega x) = \cos(\omega x), \qquad y_2(x) = e^{0x}\sin(\omega x) = \sin(\omega x),$$

ופתרון כללי $y(x) = c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x)$.

ב. למשוואה $y^{(4)} + 4y = 0$ פולינום אופייני $r^4 + 4 = 0$ וארבעה שרשים $\pm 1 \pm i$. לכן למשוואה פתרונות ממשיים $e^x\cos(x),\ e^x\sin(x),\ e^{-x}\cos(x),\ e^{-x}\sin(x)$. □

דוגמא 4.14 הוכח כי $2n+1$ הפונקציות

$$\{\, 1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x),\ \ldots,\ \sin(nx), \cos(nx)\,\}$$

בלתי תלויות לינארית בכל קטע.

פונקציות אלה הן פתרונות המשוואה הדיפרנציאלית שלמשוואה האופיינית שלה $2n+1$ השרשים השונים $\{0, \pi i, -\pi i, 2\pi i, -2\pi i,\ \ldots,\ n\pi i, -n\pi i\}$ (והמשוואה האופיינית היא $P(r) = r(r^2+\pi^2)\cdots(r^2+n^2\pi^2)$). על פי הדיון הקודם הפתרונות בלתי תלויים לינארית. פונקציות אלה הן הבסיס לתורת טורי פורייה (Fourier series). □

אם השורש $r_1 = \alpha + i\beta$ הוא מריבוי k, אז גם השורש הצמוד יהיה מאותו ריבוי ול־$2k$ השורשים יתאימו $2k$ הפתרונות

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ e^{\alpha x}\sin(\beta x),\ \ldots\ , x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

מסקנה 4.11 כל הפתרונות של משוואה (4.13) בעלת מקדמים קבועים שואפים ל־0 כאשר $x \to +\infty$ אם ורק אם $\mathrm{Re}\{r_i\} < 0$.
כל הפתרונות של משוואה (4.13) חסומים כאשר $x \to +\infty$ אם ורק אם $\mathrm{Re}\{r_i\} \leq 0$ וכל שורש עם $\mathrm{Re}\{r_i\} = 0$ הוא מריבוי 1. □

4.6 משוואת אוילר

משוואות אוילר מסדר שני הן משוואות מהצורה

$$E[y] \equiv ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \qquad 0 < x < \infty, \tag{4.16}$$

או באופן כללי יותר $a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0$. משוואות מטיפוס זה מופיעות בעת פתרון משוואת לפלס

$$\nabla^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0$$

בשיטת הפרדת המשתנים, הנפוצה בחקירת משוואות דיפרנציאליות חלקיות.

נפתור את (4.16) על ידי החלפת המשתנה החופשי $x=e^t$ או $t=\log x$, ונסמן את הפונקציה הנעלמת כ־$y(x)=y(e^t)=Y(t)$. אז

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dY}{dt}\frac{1}{x},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dY}{dt}\frac{1}{x}\right)&=\frac{d}{dt}\left(\frac{dY}{dt}\right)\frac{dt}{dx}\cdot\frac{1}{x}+\frac{dY}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\&=\left(\frac{d^2Y}{dt^2}-\frac{dY}{dt}\right)\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

בעקבות הצבה זו המשוואה (4.16) הופכת ל־

$$ax^2y''+bxy'+cy=a\left(\frac{d^2Y}{dt^2}-\frac{dY}{dt}\right)+b\frac{dY}{dt}+cY=0.$$

זו משוואה עם מקדמים קבועים ופולינום אופייני $P(r)=a(r^2-r)+br+c=0$ ופתרונותיה, כאשר $r_1\neq r_2$, הם $Y_1(t)=e^{r_1t},\ Y_2(t)=e^{r_2t}$. לכשנחזור למשתנה המקורי $x=e^t$ נמצא כי למשוואה (4.16) יש שני פתרונות $y_1(x)=x^{r_1}$, $y_2(x)=x^{r_2}$.

אם $r_1=r_2$ אז הפתרון $Y_2(t)=te^{r_1t}$ מתאים ל־$y_2(x)=x^{r_1}\ln x$. עבור $r_2=\overline{r}_1$ מרוכבים, הפתרונות $Y_1(t)=e^{\alpha t}\cos\beta t,\ Y_2(t)=e^{\alpha t}\sin\beta t$ הופכים ל־

$$y_1(x)=x^\alpha\cos(\beta\ln x),\quad y_2(x)=x^\alpha\sin(\beta\ln x).$$

נסכם בטבלה:

משוואת Euler $0<x<\infty$	משוואה עם מקדמים קבועים $-\infty<t<\infty$	
$x^{r_1},\ x^{r_2}$	$e^{r_1t},\ e^{r_2t}$	$r_1\neq r_2$
$x^{r_1},\ x^{r_1}\ln x$	$e^{r_1t},\ te^{r_1t}$	$r_1=r_2$
$x^\alpha\cos(\beta\ln x),\ x^\alpha\sin(\beta\ln x)$	$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\sin\beta t$	$r_1=\alpha+i\beta,$ $r_2=\alpha-i\beta$

לאחר שאנו כבר יודעים מה צורת הפתרון של משוואת אוילר, אין כלל צורך מעשי בהחלפת המשתנים. די להציב את הפתרון המשוער מהצורה x^r לתוך המשוואה הדיפרנציאלית הנתונה ולמצוא עבור איזה ערכי r הוא מהווה פתרון. ובאמת, נציב במשוואה (4.16) את $y = x^r$ ונקבל

$$\begin{aligned} E[x^r] &= ax^2 \cdot r(r-1)x^{r-2} + bx \cdot rx^{r-1} + cx^r \\ &= x^r\big[ar(r-1) + br + c\big] = 0. \end{aligned}$$

מתברר, כצפוי, כי x^r פתרון כאשר r שרש של הפולינום האופייני

$$P(r) = ar(r-1) + br + c = 0.$$

פולינום זה זהה לפולינום האופייני של המשוואה עם המקדמים הקבועים שאליה הגענו תוך כדי החלפת המשתנים.

גם משוואות אוילר מסדר n, $E[y] \equiv a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = 0$ אפשר לפתור על ידי הצבת $y = x^r$. נקבל

$$E[x^r] = x^r\big[a_0r(r-1)\cdots(r-n+1) + a_1r(r-1)\cdots(r-n+2) + \cdots + a_1\big] = 0.$$

ראה תרגיל 4.12 בענין אי התלות הלינארית של הפונקציות $x^{r_1}, \ldots, x^{r_n}$.

תרגיל 4.15 פתור את משוואת אוילר $y'' + \dfrac{c}{x^2}\,y = 0$ עבור $c = 1/4$, $c > 1/4$ ו־$c < 1/4$.

תרגיל 4.16 נתונה המשוואה $y''(x) + \left[\dfrac{1}{4x^2} + \dfrac{c}{x^2\log^2 x}\right]y = 0$. הוכח כי החלפת המשתנים $y = x^{1/2}v$, $x = e^t$ הופכת משוואה זו ל־$v''(t) + \dfrac{c}{t^2}\,v(t) = 0$. פתור את המשוואה הנתונה.

תרגיל 4.17 הראה כי אם $y(x)$ פתרון משוואת אוילר $y'' + \dfrac{c}{x^2}\,y = 0$ בקטע $0 < x < \infty$ אז $v(t) = (1-t)y\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$ פתרון של

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{4c}{(1-t^2)^2}\,v = 0, \qquad -1 < t < 1.$$

4.7 משוואות לינאריות לא הומוגניות

בסעיף זה נטפל במשוואה לינארית, לא הומוגנית, מנורמלת

$$(NH) \quad L[u] \equiv u^{(n)} + p_1(x)u^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)u' + p_n(x)u = q(x). \tag{4.17}$$

יהיו $u_1(x),\ u_2(x)$ שני פתרונות של המשוואה (NH). נחסיר אותם זה מזה:

$$L[u_2 - u_1] = L[u_2] - L[u_1] = q(x) - q(x) = 0.$$

לפיכך $u_2 - u_1$ הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה (4.5) שסומנה ב־(H). אם ידוע לנו בסיס למרחב הפתרונות של המשוואה ההומוגנית (H), $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, אז

$$u_2(x) - u_1(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

מכאן ואילך נקבע את $u_1(x)$ כפתרון פרטי מסוים של (NH) ונסמנו ב־$u_p(x)$ (p: פרטי, particular) ואל u_2 נתיחס כפתרון כלשהו של (NH) ונסמן אותו ב־$u_{_{NH}}(x)$.

מסקנה 4.12 כל פתרונות מערכת לא הומוגנית (NH) ניתנות להכתב בעזרת פתרון פרטי אחד של (NH) בתוספת אוסף כל הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה (H),

$$u_{_{NH}}(x) = u_p(x) + c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x).$$

דוגמא 4.18 אם למשוואה $L[u] = q_1(x)$ יש פתרון $u_{p_1}(x)$ ול־$L[u] = q_2(x)$ יש פתרון $u_{p_2}(x)$ אז $u_{p_1}(x) + u_{p_2}(x)$ פתרון של המשוואה $L[u] = q_1(x) + q_2(x)$. □

בהנחה שאנו מכירים את פתרונות המשוואה ההומוגנית (H), פתרון המשוואה הלא הומוגנית (NH) מצטמצם למעשה לבעיה אחת: למצוא פתרון פרטי אחד של (NH). נפתור בעיה זו בשיטת וריאציה של הפרמטרים (המכונה גם בשם וריאציה של הקבועים). את המקרה הפשוט ביותר של שיטה זו, עבור משוואות מסדר ראשון, פגשנו בסעיף 2.3.

כזכור, כל פתרון של המשוואה ההומוגנית (H) ניתן להכתב כצרוף לינארי של n פתרונות בלתי תלויים כ־ $y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$, כאשר $c_1, \ldots, c_n$ הם n קבועים. בשיטת וריאצית הפרמטרים נחפש פתרון למשוואה הבלתי הומוגנית (NH) מהצורה

$$u(x) = c_1(x) y_1(x) + \cdots + c_n(x) y_n(x)$$

כאשר $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ הן n פונקציות בלתי ידועות. מן הראוי, כמובן, לשאול מה ההצדקה להנחה זו דווקא? תשובה אפשרית היא כי בהמשך אכן נמצא פתרון כזה, ועם הצלחה קשה להתווכח.

נתחיל אם כן בחיפוש פתרון מהצורה $u(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x)$. כדי להציב אותו לתוך המשוואה הבלתי הומוגנית הנתונה (4.17), נגזור:

$$u'(x) = \sum_{i=1}^{n} \Big[c_i'(x) y_i(x) + c_i(x) y_i'(x) \Big].$$

מכיון שלפנינו n נעלמים $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ ורק משוואה אחת (הלוא היא (NH)), אנו חופשיים לדרוש עוד $n-1$ תנאים. בחירת התנאים שבהם נשתמש נועדה להבטיח את פשטות הטיפול ואת נוחיותנו, ואנו נדרוש בשלב הראשון כי

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x) = 0. \tag{4.18}$$

לאור הנחה זו ישאר רק

$$u'(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'(x).$$

נגזור שוויון זה שוב ונקבל

$$u''(x) = \sum_{i=1}^{n} \Big[c_i'(x) y_i'(x) + c_i(x) y_i''(x) \Big].$$

הפעם נוסיף את הדרישה

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'(x) = 0, \tag{4.19}$$

ויישאר

$$u''(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i''(x).$$

נמשיך בשיטה זו : בכל שלב נגזור שוב ונדרוש את התאפסות הסכום המכיל האברים מהצורה $c_i'(x)$, כך שלשלב הבא יועברו מחוברים המכילים אברים מהצורה $c_i(x)$ בלבד. שיטה זו מבטיחה כי למרות כל הגזירות לא מופיעות שום נגזרות גבוהות של $c_i(x)$. בשלב מספר $n-2$ נגיע ל־

$$u^{(n-2)}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n-2)}(x).$$

בגזירה ה־$n-1$ מתקבל

$$u^{(n-1)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \Big[c_i'(x) y_i^{(n-2)}(x) + c_i(x) y_i^{(n-1)}(x) \Big].$$

נדרוש לבסוף את הדרישה ה־$n-1$)האחרונה האפשרית(,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-2)}(x) = 0, \tag{4.20}$$

ואחרייה יישאר רק

$$u^{(n-1)}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n-1)}(x).$$

בזה סיימנו לנצל את כל $n-1$ דרגות החופש שעומדות לרשותנו, ובגזירה האחרונה

$$u^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \Big[c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) + c_i(x) y_i^{(n)}(x) \Big].$$

כדי להציב את הביטויים עבור $u, u', \ldots, u^{(n)}$ שחושבו למעלה לתוך המשוואה המקורית (4.17), נרכז אותם זה מעל זה:

$$\begin{aligned}
u^{(n)}(x) &= \sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n)}, \\
p_1(x) u^{(n-1)} &= p_1(x) \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}, \\
&\vdots \\
p_n(x)\, u &= p_n(x) \sum_{i=1}^{n} c_i y_i.
\end{aligned}$$

נחבר)ונזכור כי אנו מטפלים במשוואה מנורמלת(:

$$u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \cdots + p_n\, u = \sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i \left[y_i^{(n)} + p_1 y_i^{(n-1)} + \cdots + p_n y_i \right]$$

אגף שמאל הוא $L[u] = q(x)$ ובאגף ימין, $y_i^{(n)} + p_1 y_i^{(n-1)} + \cdots + p_n y_i = L[y_i] \equiv 0$. לכן נשאר

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x). \tag{4.21}$$

נרכז את כל משוואות שהצטברו בתהליך,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x) = 0, \tag{4.18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'(x) = 0, \tag{4.19}$$

$$\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-2)}(x) = 0, \tag{4.20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = q(x). \tag{4.21}$$

ובכתיב וקטורי,

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ {y_1}'(x) & {y_2}'(x) & \cdots & {y_n}'(x) \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {c_1}'(x) \\ {c_2}'(x) \\ \vdots \\ {c_n}'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q(x) \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

רשומה לפנינו מערכת של n משוואות אלגבריות, לינאריות, בלתי הומוגניות ב־n הנעלמים $c_1{}'(x),\dots,c_n{}'(x)$. דטרמיננט המערכת הוא הורונסקיאן של המשוואה ההומוגנית (H), $W(y_1,\dots,y_n)(x)\neq 0$, לכן קיים פתרון יחיד $c_1{}'(x),\dots,c_n{}'(x)$. על ידי אינטגרציה נקבל

$$c_i(x)=\int_{x_0}^{x} c_i{}'(t)\,dt+d_i.$$

הגבול התחתון x_0 הוא כלשהו, ובחירת נקודה אחרת תבלע בתוך הקבוע השרירותי d_i. מכאן אנו מקבלים למשוואה (NH) פתרון

$$\begin{aligned} u(x)&=\sum_{i=1}^{n} c_i(x)y_i(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{x_0}^{x} c_i{}'(t)\,dt+d_i\right)y_i(x)\\ &=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i(x)\int_{x_0}^{x} c_i{}'(t)\,dt\right)+\sum_{i=1}^{n} d_iy_i(x)\end{aligned}\tag{4.23}$$

המחובר השני, $\sum_{i=1}^{n} d_iy_i(x)$ הוא הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית המתאימה (H), והמחובר הראשון הוא פתרון פרטי, $y_p(x)$ של המשוואה הבלתי הומוגנית (NH). אם כן, חיפשנו פתרון פרטי אחד אך מצאנו למעשה את הפתרון הכללי של (NH).

דוגמא 4.19 נפתור את המשוואה $u''+u=1/\cos(x)$. פתרונות המשוואה ההומוגנית המתאימה הם $y_1(x)=\cos(x),\ y_2(x)=\sin(x)$. מערכת המשוואות עבור $c_1{}'(x),c_2{}'(x)$ היא

$$\begin{aligned} c_1{}'(x)\cos(x)\ +\ c_2{}'(x)\sin(x)&=0,\\ c_1{}'(x)(-\sin(x))+c_2{}'(x)\cos(x)&=1/\cos(x),\end{aligned}$$

פתרונה, על ידי חישוב ישיר, הוא $c_1{}'(x)=-\sin(x)/\cos(x),\ c_2{}'(x)=1$ ובהתאם, $c_1(x)=\log|\cos(x)|+d_1,\ c_2(x)=x+d_2$. לבסוף, הפתרון הכללי הוא

$$u(x)=\log|\cos(x)|\cos(x)+x\sin(x)+\Big(d_1\cos(x)+d_2\sin(x)\Big).\qquad\square$$

נפתח נוסחה כללית לפתרון (NH). נרשום את הפתרון (4.23) בצורה

$$u(x)=\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i(x)c_i{}'(t)\right)dt+\sum_{i=1}^{n} d_iy_i(x)$$

ונחשב את האינטגרנד הראשון. כזכור, כלל Cramer[5] לפתרון מערכת המשוואות $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i$, $i=1,\dots,n$, הוא

$$x_k=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & & & \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix}\Big/\det\big(a_{ij}\big).$$

[5] Gabriel Cramer, 1704-1752

$k=1,\dots,n$. בעזרת כלל זה פתרון המערכת (4.22) הוא

$$c_i{}' = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & \cdots & y_n \\ y_1{}' & \cdots & y_{i-1}{}' & 0 & y_{i+1}{}' & \cdots & y_n{}' \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-1)} & q & y_{i+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \Big/ W(y_1,\dots,y_n).$$

לפיכך

$$\sum_{i=1}^n y_i(x)c_i{}'(t) = \sum_{i=1}^n y_i(x) \begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & 0 & \cdots & y_n(t) \\ \vdots & & \vdots & & \\ y_1^{(n-2)}(t) & \cdots & 0 & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & q(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \Big/ W(y_1,\dots,y_n)(t),$$

כאשר $q(t)$ נמצא בעמודה ה־i־ית. בפיתוח הדטרמיננט לפי עמודה מספר i, רק $q(t)$ מוכפל במינור $(n-1)\times(n-1)$ המתאים ומקבלים

$$= \frac{q(t)}{W(t)} \sum_{i=1}^n y_i(x) \begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & y_{i-1}(t) & y_{i+1}(t) & \cdots & y_n(t) \\ \vdots & & & & & \\ y_1^{(n-2)}(t) & \cdots & y_{i-1}^{(n-2)} & y_{i+1}^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \end{vmatrix} (-1)^{n+i}.$$

אולם סכום זה זהה לדטרמיננט $n\times n$

$$= \frac{q(t)}{W(t)} \begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & y_{i-1}(t) & y_i(t) & y_{i+1}(t) & \cdots & y_n(t) \\ \vdots & & & & & & \\ y_1^{(n-2)}(t) & \cdots & y_{i-1}^{(n-2)}(t) & y_i^{(n-2)}(t) & y_{i+1}^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1(x) & \cdots & y_{i-1}(x) & y_i(x) & y_{i+1}(x) & \cdots & y_n(x) \end{vmatrix}$$

כפי שרואים על ידי פיתוח הדטרמיננט לפי השורה האחרונה.

הגדרה 4.13 הביטוי

$$K(x,t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1(x) & \cdots & y_n(x) \end{vmatrix} \Big/ W(y_1,\dots,y_n)(t) \tag{4.24}$$

נקרא בשם גרעין *Cauchy* של האופרטור L.

בסימון זה $\sum_{i=1}^n y_i(x)c_i{}'(t) = K(x,t)q(t)$ והפתרון הכללי של המשוואה הבלתי הומוגנית נתון על ידי

$$u(x) = \int_{x_0}^x K(x,t)q(t)\,dt + \sum_{i=1}^n d_i y_i(x). \tag{4.25}$$

מסקנה 4.14 א. כפונקציה של x, הגרעין $\varphi(x) = K(x,t)$ היא פתרון של המשוואה ההומוגנית *(H)* אשר מקיימת בנקודה $x = t$ את תנאי ההתחלה

$$\varphi(t) = \varphi'(t) = \ldots = \varphi^{(n-2)}(t) = 0, \qquad \varphi^{(n-1)}(t) = 1,$$

כלומר

$$\frac{\partial^i K(t,t)}{\partial x^i} = 0, \quad i = 0, \ldots, n-2, \qquad \frac{\partial^{n-1} K(t,t)}{\partial x^{n-1}} = 1.$$

ב. הביטוי $u_p(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,t)q(t)\,dt$ הוא פתרון של המשוואה הבלתי הומוגנית *(NH)* המקיים בנקודה x_0 את n תנאי ההתחלה ההומוגניים

$$u_p^{(i)}(x_0) = 0, \qquad n = 0, \ldots, n-1.$$

הוכחה. א. בפיתוח הדטרמיננט לפי השורה האחרונה רואים כי זו קומבינציה לינארית של פתרונות (H), $y_1(x), \ldots, y_n(x)$. גזירה ישירה i פעמים, $0 \le i \le n-1$,

$$\frac{\partial^i K(x,t)}{\partial x^i} = \begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(i)}(x) & \cdots & y_n^{(i)}(x) \end{vmatrix} \Big/ W(y_1, \ldots, y_n)(t)$$

מאמתת את תנאי ההתחלה ב־ $x = t$.

ב. על פי הבניה, ברור כי u_p הוא פתרון של (NH). נגזור אותו לפי x,

$$u_p{}'(x) = K(x,x) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\, q(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\, q(t)\,dt$$

וכך נמשיך עד נגזרת מסדר $n-1$. על ידי הצבה ישירה רואים כי אכן $u_p(x_0) = u_p{}'(x_0) = \ldots = u_p^{(n-1)}(x_0) = 0$. □

תרגיל 4.20 התיאוריה שלמעלה פותחה עבור משוואה מנורמלת

$$L[u] = u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \cdots = q.$$

איזה שינויים יש להנהיג עבור משוואה לא מנורמלת

$$L[u] = p_0 u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \cdots = q \ ?$$

דוגמא 4.21 נפתור את המשוואה $u'' + u = q(x)$. כמו בדוגמא 4.19, גם כאן $y_1(x) = \cos(x)$, $y_2(x) = \sin(x)$ וגרעין קושי הוא

$$K(x,t) = \begin{vmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \cos(x) & \sin(x) \end{vmatrix} \Big/ W(\cos(t), \sin(t)) = \sin(x-t).$$

הפתרון הכללי הוא

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} \sin(x-t)q(t)\,dt + d_1\cos(x) + d_2\sin(x). \qquad \square$$

דוגמא 4.22 פתרון המשוואה $u^{(n)} = q(x)$ ניתן להכתב, כמובן, על ידי n אינטגרציות עוקבות כ־

$$u(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t_n}\cdots\int_{x_0}^{t_2} q(t_1)\,dt_1\ldots dt_n \;+\; c_1x^{n-1} + \cdots + c_n.$$

אולם אפשר גם למצוא את גרעין קושי המתאים כפתרון $y^{(n)} = 0$ המקיים בנקודה $x = t$ את תנאי ההתחלה $\varphi(t) = \varphi'(t) = \ldots = \varphi^{(n-2)}(t) = 0$, $\varphi^{(n-1)}(t) = 1$. הפולינום $\varphi(x) = (x-t)^{n-1}/(n-1)!$ מקיים בבירור דרישות אלה ולפיכך

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,q(t)\,dt + \sum_{i=0}^{n-1} c_{n-i}x^i. \qquad \square$$

תרגיל 4.23 אם $L[y] = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny$ אופרטור עם מקדמים קבועים ו־$z(x)$ פתרון המשוואה ההומוגנית $L[y] = 0$ המקיים בנקודה $x = 0$ את תנאי ההתחלה $z^{(i)}(0) = \delta_{i,n-1}$, אז גרעין קושי המתאים הוא $K(x,t) = z(x-t)$.

דוגמא 4.24 מצא פתרון למשוואה $u'' = q(x)$ המקיים את שני תנאי השפה $u(a) = u(b) = 0$.

לפי (4.25) עם $x_0 = a$, הפתרון הכללי של משוואה לא הומוגנית מסדר שני הוא

$$u(x) = \int_a^x \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} \frac{q(t)\,dt}{W(y_1,y_2)} + d_1y_1(x) + d_2y_2(x)$$

כש־$y_1(x), y_2(x)$ שני פתרונות המשוואה ההומוגנית $y'' = 0$. נבחר אותם כך ש־$y_1(a) = 0$, $y_2(b) = 0$, למשל $y_1(x) = x-a,\ y_2(x) = b-x$. אז $W(y_1,y_2) = a-b$,

$$u(x) = (b-x)\left(\int_a^x \frac{(t-a)q(t)}{a-b}\,dt + d_2\right) - (x-a)\left(\int_a^x \frac{(b-t)q(t)}{a-b}\,dt + d_1\right).$$

$u(a) = 0$ כאשר $d_2 = 0$ והדרישה $u(b) = 0$ מחייבת לבחור

$$d_1 = -\frac{1}{a-b}\int_a^b (b-t)q(t)\,dt = \frac{1}{a-b}\int_b^a (b-t)q(t)\,dt.$$

לסיכום ולאחר ארגון מחדש,

$$u(x) = \frac{1}{a-b}\left[(b-x)\int_a^x (t-a)q(t)\,dt + (x-a)\int_x^b (b-t)q(t)\,dt\right]. \qquad \square$$

4.8 פתרון על ידי השוואת מקדמים

שיטת וריאצית הפרמטרים מתאימה לפתרון כל משוואה לינארית לא הומוגנית, בהנחה שפתרונות המשוואה ההומוגנית המתאימה ידועים. במקרה זה הפתרון מתקבל על ידי אינטגרציה אחת. אולם במקרה הפרטי בו האופרטור הדיפרנציאלי הוא בעל מקדמים קבועים ואגף ימין מכיל פולינום, פונקציה מעריכית ופונקציות טריגונומטריות, אפשר למצוא פתרון על ידי ניחוש שיטתי וחשבונות אלגבריים פשוטים.

טענה 4.15 למשוואה $a_0u^{(n)}+a_1u^{(n-1)}+\cdots+a_nu=P_m(x)$ בה $a_0,\ldots,a_n$ קבועים ו־$P_m(x)$ פולינום ממעלה m, אפשר למצוא פתרון פרטי כלהלן:

א. אם $a_n\neq 0$, אז $u_p=c_0x^m+\cdots+c_m$,

ב. אם $a_n=a_{n-1}=\ldots=a_{n-s+1}=0$, $a_{n-s}\neq 0$, אז $u_p=x^s(c_0x^m+\cdots+c_m)$.

הוכחה. יהי $P_m(x)=p_0x^m+p_1x^{m-1}+\cdots+p_m$. ננסה לחפש פתרון מהצורה $u_p=c_0x^m+\cdots+c_m$, נציב אותו למשוואה הדיפרנציאלית:

$$\begin{aligned}
&a_n\left(c_0x^m+c_1x^{m-1}+\cdots+c_m\right)\\
+&a_{n-1}\left(mc_0x^{m-1}+(m-1)c_1x^{m-2}+\cdots+c_{m-1}\right)\\
+&a_{n-2}\left(m(m-1)c_0x^{m-2}+(m-2)(m-1)c_1x^{m-2}+\cdots+c_{m-2}\right)\\
+&\qquad\cdots\qquad=\ p_0x^m+p_1x^{m-1}+\cdots+p_m\,.
\end{aligned}$$

נשווה את מקדמי החזקות $x^m,x^{m-1},\ldots,x^0$ בשני האגפים:

$$\begin{aligned}
a_n\ c_0 &&&= p_0,\\
a_{n-1}m\ c_0+ &&a_n\ c_1 &= p_1,\\
a_{n-2}m(m-1)\ c_0+ &a_{n-1}(m-1)\,c_1+ &a_n\,c_2 &= p_2,\\
\vdots &&&\ \vdots
\end{aligned}$$

זו מערכת של $m+1$ משוואות לינארית עבור $m+1$ הנעלמים $c_0,\ldots,c_m$, בעלת מטריצה משולשת ודטרמיננט $(a_n)^{m+1}$. לכן במקרה ש־$a_n\neq 0$, קים פתרון יחיד $c_0,\ldots,c_m$.

במקרה ב', המשוואה הדיפרנציאלית הנותרת היא

$$a_0u^{(n)}+a_1u^{(n-1)}+\cdots+a_{n-s}u^{(s)}=P_m(x).$$

נציב $v=u^{(s)}$ ונקבל עבור v משוואה ממעלה $n-s$. כפי שראינו למעלה, למשוואה המתקבלת יש פתרון פרטי בצורת פולינום ממעלה m ולכן למשוואה המקורית יש פתרון פרטי שהוא פולינום ממעלה $m+s$,

$$u_p(x)=c_0x^{m+s}+\cdots+c_mx^s+c_{m+1}x^{s-1}+\cdots+c_{m+s}.$$

אבל המחוברים האחרונים $x^{s-1}, x^{s-2}, \ldots$ הם פתרונות של המשוואה ההומוגנית המתאימה $a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-s}y^{(s)}=0$ ואין צורך לצרף אותם לפתרון פרטי של המשוואה הבלתי הומוגנית. אנו יכולים להסתפק, אם כן, בפתרון הפרטי $u_p = x^s(c_0x^m+\cdots+c_m)$ בלבד, כפי שנטען. □

טענה 4.16 נתונה המשוואה

$$L[u] = a_0u^{(n)} + a_1u^{(n-1)} + \cdots + a_nu = e^{\alpha x}P_m(x), \tag{4.26}$$

$P_m(x)$ פולינום ממעלה m. אם α הוא שורש מריבוי s, $s = 0, 1, \ldots, n$, של הפולינום האופייני המתאים לאופרטור L, אז למשוואה (4.26) יש פתרון פרטי מהצורה

$$u_p(x) = e^{\alpha x}x^s(c_0x^m + \cdots + c_m).$$

הוכחה. נציב $u = e^{\alpha x}v$. על פי כלל ליבניץ,

$$L[e^{\alpha x}v] = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(e^{\alpha x}v)^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}\left(\sum_{j=0}^{i}\frac{i!}{j!(i-j)!}\,\alpha^{i-j}e^{\alpha x}v^{(j)}\right).$$

הסיכום הוא על $0 \le j \le i \le n$, לכן לאחר החלפת סדר הסיכום,

$$= e^{\alpha x}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\left(\sum_{i=j}^{n}\frac{i!}{(i-j)!}\,a_{n-i}\,\alpha^{i-j}\right)v^{(j)}.$$

הפולינום האופייני הוא $P(r) = a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ ונגזרתו ה־j־ית היא

$$P^{(j)}(r) = \sum_{i=j}^{n} i(i-1)\cdots(i-j+1)\,a_{n-i}r^{i-j} = \sum_{i=j}^{n}\frac{i!}{(i-j)!}\,a_{n-i}\,r^{i-j}.$$

לכן הסכום שלמעלה ייכתב כ־

$$L[e^{\alpha x}v] = e^{\alpha x}\sum_{j=0}^{n}\frac{P^{(j)}(\alpha)}{j!}\,v^{(j)}(x)$$

והמשוואה (4.26) הופכת ל־

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{P^{(j)}(\alpha)}{j!}\,v^{(j)}(x) = P_m(x).$$

אך נתון כי α הוא שורש מריבוי s של הפולינום האופייני $P(r)$, דהיינו

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(s-1)}(\alpha) = 0, \qquad P^{(s)}(\alpha) \neq 0.$$

על פי טענה 4.15, אם בדיוק מקדמי s הנגזרות הנמוכות מתאפסים, אז למשוואה זו יש פתרון פרטי מהצורה $v_p(x) = x^s(c_0x^m + \cdots + c_m)$ ולמשוואה (4.26) יש פתרון פרטי $u_p(x) = e^{\alpha x}x^s(c_0x^m + \cdots + c_m)$.

ההנחה $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{n-s+1} = 0$, $a_{n-s} \neq 0$ בטענה 4.15 שקולה כמובן לתנאי כי $\alpha = 0$ הוא שרש מריבוי s של הפולינום האופייני. $\square$

דוגמא 4.25 א. הפולינום האופייני של המתאים למשוואה $u''-6u'+9u = e^{2x}(5x+7)$ הוא $P(r) = (r-3)^2$. האקספוננט $\alpha = 2$ אינו שרש אופייני, לכן $s = 0$. כאן נחפש פתרון פרטי $u_p = e^{2x}(c_1x + c_2)$. כדי לחשב את ערכי c_1, c_2 במפורש, יש להציב את u_p למשוואה המקורית ולבצע השוואת מקדמים.

ב. עבור $u'' - 6u' + 9u = e^{3x}(5x + 7)$ האקספוננט $\alpha = 3$ הוא שרש מריבוי $s = 2$ של הפולינום האופייני, לכן נחפש $u_p = e^{3x}x^2(c_1x + c_2)$.

ג. למשוואה $u'' - 5u' + 6u = e^{2x}(5x + 7)$ יש פולינום אופייני $P(r) = (r-2)(r-3)$, $\alpha = 2$ הוא שרש מריבוי $s = 1$, ולכן $u_p = e^{2x}x(c_1x + c_2)$. $\square$

לבסוף נטפל במשוואות בהן יש באגף ימין גם פונקציות טריגונומטריות מהצורה

$$L[u] = a_0u^{(n)} + a_1u^{(n-1)} + \cdots + a_nu = e^{\alpha x}\cos(\beta x)P_m(x)$$

או $L[u] = e^{\alpha x}\sin(\beta x)P_m(x)$, והקבועים a_i ממשיים.

לפי הזהות (4.15), $\cos(\beta x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}\right)$, ואת המשוואה נוכל לרשום כ־

$$L[u] = \frac{1}{2}e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}\right)P_m(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}P_m(x)/2 + e^{(\alpha-i\beta)x}P_m(x)/2.$$

על פי דוגמא 4.18, מספיק למצוא פתרון פרטי לכל אחד משתי המשוואות

$$L[u] = e^{(\alpha+i\beta)x}P_m(x)/2, \qquad L[u] = e^{(\alpha-i\beta)x}P_m(x)/2.$$

לראשונה משתי משוואות אלה יש פתרון מהצורה

$$u_{p_1}(x) = x^se^{(\alpha+i\beta)x}Q_m(x)$$

בו s מציין את ריבוי $\alpha + i\beta$ כשרש של הפולינום האופייני ו־$Q_m(x)$ פולינום מתאים ממעלה m, בעל מקדמים מרוכבים. מכיון שהקבועים a_i ממשיים והמשוואה השניה נבדלת מהראשונה רק בהחלפת $\alpha + i\beta$ בצמוד הקומפלכסי $\alpha - i\beta$, למשוואה השניה יש פתרון

$$u_{p_2}(x) = \overline{u_{p_1}(x)} = x^se^{(\alpha-i\beta)x}\overline{Q_m(x)}.$$

לפי דוגמא 4.18, נובע כי למשוואה המקורית יש פתרון פרטי

$$\begin{aligned} u_p(x) = u_{p_1}(x) + u_{p_2}(x) &= x^s\left[e^{(\alpha+i\beta)x}Q_m(x) + e^{(\alpha-i\beta)x}\overline{Q_m(x)}\right] \\ &= 2x^s\,\mathrm{Re}\left[e^{(\alpha+i\beta)x}Q_m(x)\right]. \end{aligned}$$

כדי לקבל בטוי ממשי ברור, נסמן $2Q_m(x) = T_1(x) + iT_2(x)$ בו $T_1(x), T_2(x)$ פולינומים ממשיים ממעלה m לכל היותר ולפחות אחד מהם ממעלה m בדיוק. אז

$$\begin{aligned} u_p(x) &= x^s e^{\alpha x} \mathrm{Re}\big[\,(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))\,(T_1(x) + iT_2(x))\,\big] \\ &= x^s e^{\alpha x}\,[\cos(\beta x)T_1(x) - \sin(\beta x)T_2(x)]\,. \end{aligned}$$

מסקנה 4.17 למשוואה $a_0u^{(n)} + a_1u^{(n-1)} + \cdots + a_nu = e^{\alpha x}\cos(\beta x)P_m(x)$ יש פתרון פרטי מהצורה

$$u_p(x) = x^s e^{\alpha x}\,[\,\cos(\beta x)Q_{m,1}(x) + \sin(\beta x)Q_{m,2}(x)\,]$$

בו $Q_{m,1}(x), Q_{m,2}(x)$ פולינומים ממשיים ממעלה m לכל היותר ולפחות אחד מהם ממעלה m בדיוק ו־s הוא ריבוי $\alpha + i\beta$ כשרש של הפולינום האופייני. □

הערות. נשים לב כי בעוד שבמשוואה מופיע רק $\cos(\beta x)$, הרי בפתרון עשויים להופיע גם $\cos(\beta x)$ וגם $\sin(\beta x)$. בתהליך השואת המקדמים יש להשוות את מקדמי

$$\cos(\beta x),\ x\cos(\beta x), \ldots,\ x^m\cos(\beta x),\ \sin(\beta x),\ x\sin(\beta x), \ldots,\ x^m\sin(\beta x)$$

ולפתור $2(m+1)$ משוואות ב־$2(m+1)$ נעלמים.

דוגמא 4.26 נפתור את המשוואה

$$u'' + \omega_0^2 u = \sin(\omega x) \tag{4.27}$$

עבור $\omega \neq \omega_0$ ועבור $\omega = \omega_0$.

הפולינום האופייני הוא $P(r) = r^2 + \omega_0^2$ ושרשיו $r_1 = i\omega_0,\ r_2 = -i\omega_0$. אגף ימין מהצורה $e^{0\,x}\sin(\omega x)\cdot 1$ כלומר "פולינום" ממעלה $m = 0$ ו־$\alpha + i\beta = 0 + i\omega$.

א. במקרה ש־$\omega \neq \omega_0$, אז $\alpha + i\beta \neq r_1, r_2$ כלומר $s = 0$. עם נתונים אלה עלינו לחפש פתרון פרטי $u_p(x) = c_0\cos(\omega x) + e_0\sin(\omega x)$. נציב במשוואה הדיפרנציאלית:

$$\big(-\omega^2 c_0\cos(\omega x) - \omega^2 e_0\sin(\omega x)\big) + \omega_0^2\big(c_0\cos(\omega x) + e_0\sin(\omega x)\big) = \sin(\omega x).$$

מהשוואת המקדמים

$$\begin{aligned} \cos(\omega x):&\qquad c_0(\omega_0^2 - \omega^2) = 0, \\ \sin(\omega x):&\qquad e_0(\omega_0^2 - \omega^2) = 1, \end{aligned}$$

מתקבל כי $c_0 = 0,\ e_0 = 1/(\omega_0^2 - \omega^2)$ והפתרון הכללי הוא

$$u(x) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega x) + d_1\cos(\omega_0 x) + d_2\sin(\omega_0 x). \tag{4.28}$$

ב. במקרה ש־$\omega = \omega_0$, אז $\alpha + i\beta = r_1$ כלומר $s = 1$. הפעם נחפש פתרון פרטי $u_p(x) = x\big(\, c_0 \cos(\omega x) + e_0 \sin(\omega x)\,\big)$ ונציב:

$$\begin{aligned} &2\big(\, -\omega c_0 \sin(\omega x) + \omega e_0 \cos(\omega x)\,\big) + x\big(\, -\omega^2 c_0 \cos(\omega x) - \omega^2 e_0 \sin(\omega x)\,\big) \\ &+ \omega_0^2\, x\big(\, c_0 \cos(\omega x) + e_0 \sin(\omega x)\,\big) = \sin(\omega x). \end{aligned}$$

הודות ל־ $\omega = \omega_0$, נותר מהשוואת המקדמים

$$\begin{aligned} \cos(\omega x): &\qquad 2e_0\omega = 0, \\ \sin(\omega x): &\qquad -2c_0\omega = 1, \end{aligned}$$

שפתרונו $e_0 = 0,\ c_0 = -1/(2\omega)$. הפתרון הכללי הוא

$$u(x) = -\frac{1}{2\omega}\, x\cos(\omega x) + d_1 \cos(\omega x) + d_2 \sin(\omega x), \qquad \omega = \omega_0. \tag{4.29}$$

בבעיות פיזיקליות רבות, משוואה לינארית, הומוגנית $L[u] = 0$ מתארת את התנועה העצמית של מערכת והמשוואה הבלתי הומוגנית $L[u] = q$ מתארת את התנהגות אותה מערכת בהשפעת אלוץ חיצוני q. למשל, המשוואה $u'' + \omega_0^2 u = 0$ מתארת תנועה הרמונית פשוטה (מטוטלת, קפיץ, מעגל חשמלי של קבל וסליל) בעלת תדירות ω_0 והמשוואה הבלתי הומוגנית (4.27) מתארת את התנהגותה בהשפעת אלוץ חצוני)כוח, מתח(מחזורי $\sin(\omega x)$ המופעל עליה. מהפתרונות רואים כי כאשר $\omega \neq \omega_0$, תנודת המערכת גדולה ככל ש־ω קרוב ל־ω_0, אך התנודה נשארת חסומה. לעומת זאת כאשר $\omega = \omega_0$, כלומר תדירות הכוח המאלץ שווה לתדירות העצמית של המערכת, אז הפתרון בלתי חסום. מבחינה הנדסית־מעשית זה מצב בלתי אפשרי והמערכת "מתפוצצת". תופעה זו מכונה רזוננס (resonance). ע"ע Tacoma bridge. □

פרק 5

משפטי שטורם וקיום ערכים עצמיים

5.1 משפטי Sturm

שני המשפטים של Sturm[1] עוסקים באפסים של פתרונות משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר שני. הראשון שבהם הוא תרגיל פשוט העוסק במשוואה לינארית כללית מסדר שני.

משפט 5.1 (משפט ההפרדה של שטורם) נתונה משוואה $u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u = 0$, $p_1(x), p_2(x)$ רציפים בקטע I. אם $u(x), v(x)$ שני פתרונות בלתי תלויים אז בין שני אפסים עוקבים של $u(x)$ יש בדיוק אפס אחד של $v(x)$, ולהפך. דהיינו, האפסים של שני פתרונות בלתי תלויים לינארית של המשוואה (אם יש אפסים) מפרידים זה את זה.

הוכחה. יהיו $u(x), v(x)$ שני פתרונות בלתי תלויים לינארית, α, β שני אפסים עוקבים של u. נניח בדרך השלילה כי $v(x) \neq 0$ בקטע הפתוח (α, β). ברור כי $v(\alpha) \neq 0$, כי אם $u(\alpha) = v(\alpha) = 0$, אז הוורונסקיאן של שני פתרונות אלה מקיים

$$W(u,v)(\alpha) = \begin{vmatrix} u(\alpha) & v(\alpha) \\ u'(\alpha) & v'(\alpha) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ u'(\alpha) & v'(\alpha) \end{vmatrix} = 0,$$

בסתירה לאי תלות הלינארית שלהם. מאותה סיבה גם $v(\beta) \neq 0$. לסיכום, $v \neq 0$ בכל הקטע הסגור $[\alpha, \beta]$. נסתכל עתה במנה

$$h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

מנה זו מוגדרת היטב בקטע $[\alpha, \beta]$ והיא רציפה וגזירה, כי המכנה שלה אינו מתאפס שם. לפי הנתון $u(\alpha) = u(\beta) = 0$ ומכאן נובע כי גם $h(\alpha) = h(\beta) = 0$. לכן לפי משפט Rolle קיימת נקודה γ ב־(α, β) כך ש־$h'(\gamma) = 0$. אבל מצד שני

$$h'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{W(v,u)}{v^2} \neq 0$$

[1] Jacques Charles Francois Sturm, 1803-1855

בכל הקטע הסגור, כי $W(u,v) \neq 0$ בשל אי תלותם של הפתרונות. סתירה זו מוכיחה כי ההנחה ש־$v(x) \neq 0$ ב־(α,β) היא בלתי אפשרית ו־$v(x)$ חיב להתאפס בין שני אפסי $u(x)$.

לסיום נחליף את תפקידי u ו־v ונסיק כי בין כל שני אפסים עוקבים של $v(x)$ גם $u(x)$ חיב להתאפס. כשנאחד שתי תוצאות אלה נגיע למסקנה כי עבור משוואה מסדר שני, נקודות ההתאפסות של כל שני פתרונות בלתי תלויים לינארית חייבים להפריד זה את זה. □

דוגמא 5.1 למשוואה $y'' + y = 0$ שני פתרונות $u(x) = \cos x$, $v(x) = \sin x$, ובאמת בין כל שני אפסים של $\cos x$ יש אפס יחיד של $\sin x$ ולהפך.

המשפט הבא, משפט ההשוואה, חל רק על משוואות דיפרנציאליות בעלות מבנה מסוים. בהמשך נראה הרחבות שלו למשוואות נוספות.

משפט 5.2 (משפט ההשוואה של שטורם) נתונות שתי משוואות דיפרנציאליות

$$u'' + p(x)u = 0, \tag{5.1}$$

$$v'' + P(x)v = 0, \tag{5.2}$$

$p(x), P(x)$ רציפות. יהי $u(x)$ פתרון של המשוואה (5.1) ולו שני אפסים, $u(\alpha) = u(\beta) = 0$. אם $P(x) \geq p(x)$ בקטע $[\alpha,\beta]$ ואי שוויון חריף מתקיים לפחות בנקודה אחת)ולכן גם בסביבה שלמה שלו), אז כל פתרון $v(x)$ של משוואה (5.2) חייב להתאפס בקטע הפתוח (α,β).

הוכחה. ללא הגבלת הכלליות נניח כי α,β הם שני אפסים עוקבים של $u(x)$ וביניהם $u(x) \neq 0$, למשל $u(x) > 0$ ב־ (α,β). מכיוון שלפתרון $u(x)$ לא ייתכנו אפסים כפולים (אחרת היה $u \equiv 0$ בגלל משפט הקיום והיחידות), חייב להתקיים

$$u'(\alpha) > 0, \quad u'(\beta) < 0.$$

נניח בדרך השלילה כי למשוואה (5.2) יש פתרון $v(x) \neq 0$ ב־(α,β), למשל

$$v(x) > 0, \qquad \alpha < x < \beta.$$

אז בקצוות הקטע בהכרח

$$v(\alpha) \geq 0, \qquad v(\beta) \geq 0.$$

נכפול את משוואה (5.1) ב־v ואת משוואה (5.2) ב־u ונחסיר זה מזה:

$$uv'' - vu'' + (P(x) - p(x))uv = 0$$

נשים לב כי $uv'' - vu'' = (uv' - vu')'$ ונבצע אינטגרציה על הקטע $[\alpha,\beta]$:

$$\int_\alpha^\beta (uv' - vu')'\,dx + \int_\alpha^\beta (P(x) - p(x))uv\,dx = 0$$

דהיינו

$$(uv' - vu')\Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta (P(x) - p(x))uv\,dx = 0$$

מכיוון ש־$u(\alpha) = u(\beta) = 0$, נשאר

$$-v(\beta)u'(\beta) + v(\alpha)u'(\alpha) + \int_\alpha^\beta (P(x) - p(x))uv\,dx = 0$$

אולם כאמור למעלה בקצות הקטע קיים

$$-u'(\beta) > 0,\ v(\alpha) \geq 0,\ u'(\alpha) > 0,\ v(\alpha) \geq 0,$$

ובכל הקטע הפתוח $u(x), v(x) > 0$, $P(x) - p(x) \geq 0$ אך לא זהותית אפס, לכן אגף שמאל חיובי ממש, והגענו לסתירה. לפיכך $v(x)$ מתאפס לפחות פעם אחת בקטע (α, β). □

דוגמא 5.2 אם $p(x) \leq 0$ בקטע מסוים, אז כל פתרון לא טריוויאלי של המשוואה $u'' + p(x)u = 0$ יכול להתאפס לכל היותר פעם אחת בקטע זה.

הוכחה. נניח להפך כי ל־u יש שני אפסים בקטע, נאמר $u(\alpha) = u(\beta) = 0$. נבחר $P(x) \equiv 0$, כלומר $0 \equiv P(x) \geq p(x)$. בלי הגבלת הכלליות נניח כי $P(x) \not\equiv p(x)$ (אחרת אנו דנים במשוואה $u'' = 0$ ועבורה הטענה מובנת מאליה). לפי משפט ההשוואה של שטורם כל פתרון של משוואה (5.2) חייב להתאפס בקטע (α, β). אך במקרה שלנו זו המשוואה $v'' = 0$ שפתרונותיה הם $v(x) = c_1x + c_2$, ובודאי יש כאלה שאינם מתאפסים בקטע הנדון. סתירה זו מאשרת את טענתנו. □

דוגמא 5.3 אם $p(x) \leq \dfrac{1}{4x^2}$, $0 < x < \infty$, אז כל פתרון לא טריוויאלי של המשוואה $u'' + p(x)u = 0$ יכול להתאפס לכל היותר פעם אחת בחצי הישר הזה.

כי אם ל־u יש שני אפסים בקטע, אז לפי משפט ההשוואה של שטורם לכל פתרון של המשוואה $u'' + \dfrac{1}{4x^2}u = 0$ יש לפחות אפס אחד בקטע $(0, \infty)$. אולם זו משוואת אוילר ולה פתרון $u(x) = x^{1/2}$ שאינו מתאפס בקטע המוזכר למעלה. □

דוגמא 5.4 אם

$$\frac{m^2\pi^2}{(b-a)^2} < p(x) < \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}, \qquad a \leq x \leq b,$$

אז לכל פתרון לא טרוויאלי של (5.1) יש לפחות m אפסים ב־(a, b) ולכל היותר n אפסים ב־$[a, b]$. בפרט, אם

$$p(x) < \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \tag{5.3}$$

אז לכל פתרון לא טרוויאלי של (5.1) יש לכל היותר אפס יחיד ב־$[a, b]$.

נשווה את שלוש המשוואות הבאות בעזרת משפט ההשוואה של שטורם:

$$u'' + \frac{m^2\pi^2}{(b-a)^2}\, u = 0, \tag{5.4}$$

$$y'' \;+\; p(x)\; y \;=\; 0, \tag{5.5}$$

$$v'' + \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}\, v = 0, \tag{5.6}$$

הפתרון $u = \sin\left(\dfrac{m\pi(x-a)}{b-a}\right)$ של (5.4) מתאפס ב־$x = a$, יש לו בדיוק $m+1$ אפסים בקטע הסגור $[a,b]$, האחרון שבהם ב־$x = b$, כי המרחק בין שני אפסים עוקבים שלו הוא $(b-a)/m$. לפי משפט שטורם בין כל שני אפסי u עוקבים יש לפחות אפס אחד של כל פתרון y של (5.5), סך הכל לפחות m אפסים ב־(a,b).

נניח כי ל־y יש יותר מ־n אפסים ב־$[a,b]$, דהיינו לפחות $n+1$. בין כל זוג אפסים עוקבים יש לפחות אפס אחד לכל פתרון v של (5.6), כלומר לפחות n אפסים ב־(a,b). אך זה לא נכון כי לפתרון $v = \sin\left(\dfrac{n\pi(x-a)}{b-a}\right)$ יש בדיוק $n-1$ אפסים בקטע הפתוח (a,b), סתירה. $\square$

בנוסף לאי שוויון (5.3) נוכיח כי לכל פתרון של המשוואה יש לכל היותר אפס יחיד גם כאשר $p(x)$ "די קטן" בממוצע:

משפט 5.3 (אי השוויון של ליאפונוב) אם

$$\int_a^b p^+(t)\,dt < \frac{4}{(b-a)}, \qquad p^+(x) = \max\{\,p(x), 0\} \geq 0, \tag{5.7}$$

אז לאף פתרון של $y'' + p(x)y = 0$ אין שני אפסים בקטע $[a,b]$.

הוכחה. נניח כי יש פתרון של $y'' + p(x)y = 0$ עם שני אפסים בקטע. הודות ל־$p^+(x) \geq p(x)$, גם למשוואה $y'' + p^+(x)y = 0$ יש פתרון עם שני אפסים עוקבים α, β, $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ שביניהם הפתרון חיובי. מכיון שאגף שמאל של (5.7) גדל עם הקטע בעוד שאגף ימין יורד, מספיק להניח בלי הגבלת כללית כי אפסים עוקבים אלה α, β נמצאים דווקא בנקודות $x = a, b$. כמו כן נניח שערכו המקסימלי של $y(x)$ מתקבל בנקודה $a < \xi < b$, $\max\limits_{[a,b]} y(x) = y(\xi) > 0$. לכל c, d, $a \leq c < d \leq b$

$$\begin{aligned}\int_a^b p^+(t)\,dt &= \int_a^b \left|\frac{y''(t)}{y(t)}\right| dt > \frac{1}{y(\xi)}\int_a^b |y''(t)|\; dt \\ &> \frac{1}{y(\xi)}\left|\int_c^d y''(t)\,dt\right| = \frac{1}{y(\xi)}\Big|y'(d) - y'(c)\Big|.\end{aligned}$$

על פי משפט Rolle נבחר את הנקודות $c \in (a,\xi)$, $d \in (\xi,b)$ כך ש־

$$y'(c) = \frac{y(\xi)-y(a)}{\xi-a} = \frac{y(\xi)}{\xi-a}, \qquad y'(d) = \frac{y(b)-y(\xi)}{b-\xi} = \frac{y(\xi)}{\xi-b}.$$

מכיון ש־$\max\limits_{[a,b]}(\xi-a)(b-\xi) = \frac{(b-a)^2}{4}$, מתקבל בסיכום

$$\int_a^b p^+(t)\,dt > \frac{1}{\xi-a} - \frac{1}{\xi-b} = \frac{b-a}{(\xi-a)(b-\xi)} \geq \frac{4}{b-a}$$

בניגוד ל־(5.7). לפיכך לא ייתכנו עם שני אפסים בקטע. □

תרגיל 5.5 נניח כי במשוואה (5.1), מתקיים

$$0 < m \leq p(x) \leq M,$$

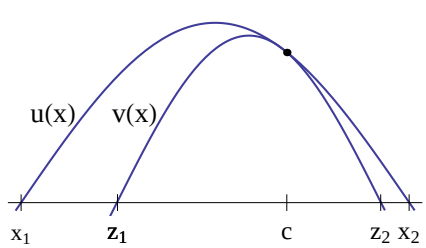
m, M קבועים. הוכח כי אם לפתרון $u(x)$ יש שני אפסים עוקבים $x_1 < x_2$, אז המרחק ביניהם מקיים

$$\pi M^{-1/2} \leq x_2 - x_1 \leq \pi m^{-1/2}.$$

תרגיל 5.6 נניח כי במשוואה (5.1), $p(x)$ היא פונקציה מונוטונית עולה, $u(x)$ פתרון ולו שלושה אפסים עוקבים $x_1 < x_2 < x_3$. הוכח כי $x_2 - x_1 > x_3 - x_2$, כלומר המרחק בין האפסים מונוטוני יורד.

הדוגמא הבאה היא ניסוח בעל גוון גיאומטרי של משפט ההפרדה של שטורם.

דוגמא 5.7 יהיו $P(x), p(x)$ רציפים, $P(x) > p(x)$ בקטע $[a,b]$. יהי $u(x)$ פתרון של המשוואה (5.1) עם שני אפסים עוקבים, x_1, x_2, ו־$v(x)$ פתרון של (5.2) אשר משיק ל־$u(x)$ בנקודה כלשהי $x = c$, $x_1 < c < x_2$. אז ל־$v(x)$ יש לפחות שני אפסים בקטע (x_1, x_2), האחד ב־(x_1, c) והשני ב־(c, x_2). בין שני האפסים הקרובים של $v(x)$ משני צידי c, העקום $v(x)$ מונח בין $u(x)$ לבין ציר x. ראה איור 5.1.



איור 5.1: משפט ההשוואה של שטורם

הוכחה. נניח למשל כי $u(x) > 0$ ב־(x_1, x_2). נקח נקודה $c \in (x_1, x_2)$ ואת הפתרון $v(x)$ שמקיים שם את תנאי ההתחלה

$$v(c) = u(c) > 0, \qquad v'(c) = u'(c). \tag{5.8}$$

אם $v(x)$ לא מתאפס ב־(c, x_2), אז הודות לתנאי ההתחלה גם $v(x) > 0$ ב־(c, x_2). מהזהות $(vu' - uv')' = vu'' - uv'' = (P - p)uv$ נובע כי

$$(vu' - uv')\Big|_c^{x_2} = \int_c^{x_2} (P - p)uv\, dx\ .$$

באגף שמאל $(vu' - uv')(c) = 0$ בגלל תנאי ההתחלה. $u(x)$ מתחיל מערכים חיוביים ומתאפס בנקודה x_2 לכן $u(x_2) = 0$, $u'(x_2) < 0$ ולפי ההנחה $v(x_2) \geq 0$. לסיכום $(vu' - uv')(x_2) \leq 0$ ואגף שמאל לא חיובי. לעומת זאת, הודות ל־$u, v > 0$, $P > p$, האינטגרל מימין חיובי. סתירה זו מוכיחה כי $v(x)$ מתאפס ב־(c, x_2). באופן דומה מראים כי $v(x)$ מתאפס גם ב־(x_1, c).

נסמן ב־z_1, z_2 את שני אפסי $v(x)$ שמשני צידי c, $x_1 < z_1 < c < z_2 < x_2$. בקטע (c, z_2), המנה $u(x)/v(x)$ מקיימת לפי האמור למעלה

$$u(c)/v(c) = 1, \qquad (u(x)/v(x))' = (vu' - uv')/v^2(x) > 0$$

ולכן $u(x) > v(x) > 0$ שם, וכך גם בקטע (z_1, c). □

משפט ההשוואה של שטורם נוסח רק עבור משוואות בעלות מבנה כמו משוואה (5.1), שבהם האבר u' נעדר. בדוגמא הבאה נראה כי ניתן להביא כל משוואה לינארית מסדר שני לצורה זו, מבלי לשנות את אפסי הפתרונות.

דוגמא 5.8 תהי נתונה המשוואה

$$u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u = 0. \tag{5.9}$$

אז הפונקציה $y(x) = e^{\frac{1}{2}\int p_1(x)}u(x)$ מקיימת משוואה מהצורה

$$y'' + P(x)y = 0, \qquad P(x) = p_2 - \frac{1}{2}\,{p_1}' - \frac{1}{4}\,{p_1}^2.$$

ל־$u(x)$ ול־$y(x)$ יש את אותם האפסים.

הוכחה. ננסה החלפת משתנים $u(x) = r(x)y(x)$, בה $y(x)$ הפונקציה הנעלמת החדשה ו־$r(x)$ פונקציה שתקבע בהמשך לפי נוחיותנו. על פי הצבה זו

$$(ry'' + 2r'y' + r''y) + p_1(ry' + r'y) + p_2(ry) = 0$$

ולאחר סדור מחדש וחלוקה ב־$r \neq 0$,

$$y'' + \left(2\,\frac{r'}{r} + p_1\right)y' + \left(\frac{r''}{r} + p_1\,\frac{r'}{r} + p_2\right)y = 0. \tag{5.10}$$

כדי שבמשוואה החדשה מקדם y' יתאפס, דהיינו $\frac{r'}{r} = -\frac{1}{2}p_1$, נבחר

$$r(x) = e^{-\frac{1}{2}\int p_1(x)} \neq 0$$

(או כפולתו). לשם חישוב האבר r''/r במשוואה הדיפרנציאלית החדשה כדאי לגזור: $\left(\frac{r'}{r}\right)' = \frac{r''r - r'\cdot r'}{r^2} = -\frac{1}{2}\,{p_1}'$, ונקבל

$$\frac{r''}{r} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{1}{2}\,{p_1}' = \frac{1}{4}\,p_1^2 - \frac{1}{2}\,{p_1}'.$$

מחישוב זה מתקבל כי

$$\frac{r''}{r} + p_1\,\frac{r'}{r} + p_2 = \left(\frac{1}{4}\,{p_1}^2 - \frac{1}{2}{p_1}'\right) + p_1\left(-\frac{1}{2}p_1\right) + p_2 = p_2 - \frac{1}{2}\,{p_1}' - \frac{1}{4}{p_1}^2$$

והמשוואה (5.10) הופכת ל־

$$y'' + \left(p_2 - \frac{1}{2}\,{p_1}' - \frac{1}{4}\,{p_1}^2\right) y = 0. \tag{5.11}$$

מכיוון ש־$r(x) = e^{-\frac{1}{2}\int p_1(x)} \neq 0$, לפתרון $u(x)$ של המשוואה המקורית (5.9) ולפתרון $y(x)$ של המשוואה החדשה (5.11) יש את אותם אפסים. □

צורת המשוואה (5.11) מתאימה למשפט ההשוואה של שטורם וכך החלפת המשתנים של דוגמא 5.8 מאפשרת לנו לחקור את אפסי פתרונות משוואת בסל (Bessel) מסדר α,

$$x^2u'' + xu' + (x^2 - \alpha^2)u = 0, \qquad x > 0,$$

בה α קבוע נתון. במשוואה זו נדון בהרחבה בסעיף 7.6.

משפט 5.4 א. לכל פתרון של משוואת בסל מסדר כלשהו יש אינסוף אפסים ב־$(0,\infty)$.
ב. נסמן ב־$0 < c_1 < c_2 < \ldots$ את האפסים של פתרון מסוים $y(x)$ של משוואת בסל. אם $\alpha > 1/2$ אז המרחק בין שני אפסים עוקבים, $c_n - c_{n-1}$, יורד ואם $0 \leq \alpha < 1/2$ אז המרחק עולה.
ג. לכל α, $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n - c_{n-1}) = \pi$.

הוכחה. נרשום את המשוואה כ־

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) u = 0, \qquad x > 0, \tag{5.12}$$

כלומר $p_1(x) = 1/x,\ p_2(x) = 1 - \alpha^2/x^2$. כאמור למעלה נבחר הצבה

$$u(x) = e^{-\frac{1}{2}\int p_1(x)\,dx}\,y(x) = e^{-\frac{1}{2}\int dx/x}\,y(x) = x^{-1/2}\,y(x)$$

ונקבל עבור (5.11) את

$$y'' + \left(1 + \frac{1/4 - \alpha^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad x > 0. \tag{5.13}$$

משוואה דיפרנציאלית חדשה זו מתאימה לדרישות משפט ההשוואה של שטורם ולפתרונה $y(x)$ אותם אפסים כמו לפתרון $u(x)$ המתאים של משוואת בסל. מספיק איפוא לטפל באפסי פתרונות המשוואה (5.13).

א. עבור ערכי x די גדולים קיים $1 + (1/4 - \alpha^2)/x^2 > c^2 > 0$, c קבוע, ולכן בין כל שני אפסים עוקבים של פתרון המשוואה $w'' + c^2 w = 0$, למשל בין כל שני אפסי $w = \sin(cx)$, יש אפס לכל פתרון $y(x)$ של (5.13). מכיון שלפונקציה $\sin(cx)$ יש אינסוף אפסים, כך גם לפתרונות משוואת בסל (5.12).

ב. אם $\alpha > 1/2$ אז הפונקציה $1 + (1/4 - \alpha^2)/x^2$ עולה ולפי תרגיל 5.6 המרחק בין אפסי הפתרון $y(x)$ של (5.13) יורד. עבור $\alpha < 1/2$ המסקנה הפוכה.)דרך אגב, מהם פתרונות משוואת בסל מסדר $\alpha = 1/2$)?

ג. לבסוף נשווה את המשוואה (5.13) עם α קבוע נתון לשתי המשוואות

$$v'' + (1 + \varepsilon) v = 0, \tag{5.14}$$

$$w'' + (1 - \varepsilon) w = 0. \tag{5.15}$$

עבור $x_0 < x < \infty$ קיים

$$1 - \varepsilon < \left(1 + \frac{1/4 - \alpha^2}{x^2}\right) < 1 + \varepsilon.$$

עבור n די גדול האפסים $c_n < c_{n+1}$ של הפתרון $y(x)$ של (5.13) נמצאים ב־(x_0, ∞). נסתכל בפתרון של (5.15) המתאפס בנקודה $x = c_n$, $w(x) = \sin\left(\sqrt{1-\varepsilon}(x - c_n)\right)$. לפי משפט ההשוואה בין כל שני אפסי $w(x)$ זה נמצא אפס של הפתרון $y(x)$ של (5.13), כלומר האפס העוקב c_{n+1}. אך המרחק בין שני אפסי $w(x)$ הוא $\pi/\sqrt{1-\varepsilon}$, לפיכך $c_{n+1} - c_n < \pi/\sqrt{1-\varepsilon}$.

באופן דומה נסתכל בפתרון $v(x) = \sin\left(\sqrt{1+\varepsilon}(x - c_n)\right)$ של (5.14) המתאפס בנקודה $x = c_n$. על פי משפט ההשוואה $v(x)$ חייב להתאפס בקטע (c_n, c_{n+1}) ולפיכך $\pi/\sqrt{1+\varepsilon} < c_{n+1} - c_n$. לסיכום,

$$\frac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}} < c_{n+1} - c_n < \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}},$$

כאשר $x_0 < c_n < c_{n+1}$. אך אי־שוויון זה נכון לכל ε חיובי ו־x_0 די גדול, לכן $\lim_{n\to\infty} (c_{n+1} - c_n) = \pi$. $\square$

5.2 טרנספורמצית Prüfer

שיטה נוספת לחקירת אפסי פתרונות של משוואה ממעלה 2 מבוססת על הטרנספורמציה של Prüfer.[2] נתחיל ממשוואה דיפרנציאלית כללית

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \qquad a \le x \le b,$$

ונביא אותה לצורה נוחה למטרותינו. נכפול את המשוואה ב־ $e^{\int p_1} > 0$:

$$e^{\int p_1} y'' + p_1 e^{\int p_1} y' + p_2 e^{\int p_1} y = 0,$$

דהיינו

$$\left(e^{\int p_1} y'\right)' + p_2 e^{\int p_1} y = 0$$

בהמשך נכתוב משוואה זו כ־

$$(P(x)y')' + Q(x)y = 0 \tag{5.16}$$

כאשר $P(x) = e^{\int p_1} > 0,\ Q(x) = p_2(x)e^{\int p_1}$. משוואה בצורה (5.16) נקראת "משוואה צמודה לעצמה" (self adjoint). במשמעות מושג זה ותפקידו יש לדון במקום אחר.

החלפת המשתנים של Prüfer מגדירה שני נעלמים $r(x), \theta(x)$ על ידי

$$\begin{aligned} y(x) &= r(x)\sin\theta(x), \\ P(x)y'(x) &= r(x)\cos\theta(x) \end{aligned} \tag{5.17}$$

זו הצגה של (y, Py') במערכת קואורדינטות פולרית במישור והיא מקיימת $\tan\theta = y/Py'$, $r^2 = y^2 + (Py')^2$. מכיון שלכל פתרון לא טרוויאלי מתקיים $(y(x), y'(x)) \neq (0,0)$ בכל נקודה x, ברור ש־$r(x) \neq 0$.

נגזור את המשוואות (5.17) לפי x:

$$\begin{aligned} r'(x)\sin\theta(x) + r(x)\cos\theta(x)\,\theta'(x) &= y' = \frac{1}{P}\, r\cos\theta \\ r'(x)\cos\theta(x) - r(x)\sin\theta(x)\,\theta'(x) &= (Py')' = -Q\, r\sin\theta. \end{aligned}$$

נחלץ ממערכת לינארית זו את r', θ' ונקבל

$$\frac{d\theta}{dx} = Q(x)\sin^2\theta + \frac{1}{P(x)}\cos^2\theta, \tag{5.18}$$

$$\frac{dr}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P(x)} - Q(x)\right)\sin 2\theta\, r. \tag{5.19}$$

אם $P(x), Q(x)$ רציפים עבור $a \le x \le b$, אז משוואה (5.18) מקיימת תנאי ליפשיץ גלובלי ב־θ ולכן לכל תנאי התחלה הפתרון המתאים $\theta(x)$ קיים לכל $a \le x \le b$. לאחר שמצאנו את $\theta(x)$, $r(x)$ ייקבע על ידי אינטגרציה של $r'/r = \frac{1}{2}(1/P - Q)\sin 2\theta$.

[2] Heinz Prüfer, 1896-1934

משפט 5.5 נתונות שתי משוואות דיפרנציאליות מהצורה (5.16),

$$(P_1(x)u')' + Q_1(x)u = 0, \tag{5.20}$$

$$(P_2(x)v')' + Q_2(x)v = 0, \tag{5.21}$$

ונסמן ב־$\theta_2(x), \theta_1(x)$ את משתני *Prüfer* המתאימים לשתי משוואות אלה.
אם $Q_2(x) \geq Q_1(x)$, $\frac{1}{P_2(x)} \geq \frac{1}{P_1(x)}$ עבור $a \leq x \leq b$ ו־$\theta_2(a) \geq \theta_1(a)$ אז $\theta_2(x) \geq \theta_1(x)$ לכל $a \leq x \leq b$.

הוכחה. נחליף משתנים כאמור לעיל ונחסיר זה מזה את המשוואות המתאימות

$$\theta_2' = Q_2(x)\sin^2\theta_2 + \frac{1}{P_2}\cos^2\theta_2,$$
$$\theta_1' = Q_1(x)\sin^2\theta_1 + \frac{1}{P_1}\cos^2\theta_1.$$

נקבל

$$\begin{aligned}(\theta_2-\theta_1)' =& (Q_2-Q_1)\sin^2\theta_2 + \left(\frac{1}{P_2}-\frac{1}{P_1}\right)\cos^2\theta_2 \\ &+ Q_1(\sin^2\theta_2-\sin^2\theta_1) + \frac{1}{P_1}\left(\cos^2\theta_2-\cos^2\theta_1\right).\end{aligned}$$

במחובר האחרון נציב $\cos^2\theta_2 - \cos^2\theta_1 = -(\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1)$ ונרשום את המשוואה כ־

$$\begin{aligned}(\theta_2-\theta_1)' =& \left(Q_1 - \frac{1}{P_1}\right)\frac{\sin^2\theta_2-\sin^2\theta_1}{\theta_2-\theta_1}(\theta_2-\theta_1) \\ &+ (Q_2-Q_1)\sin^2\theta_2 + \left(\frac{1}{P_2}-\frac{1}{P_1}\right)\cos^2\theta_2\end{aligned}$$

הפונקציה $m(x) \stackrel{\text{def}}{=} (Q_1 - 1/P_1)\frac{\sin^2\theta_2-\sin^2\theta_1}{\theta_2-\theta_1}$ רציפה (אך סימנה לא ידוע) ושני המחוברים האחרונים אינם שליליים על פי ההנחות. לכן

$$(\theta_2-\theta_1)' - m(x)(\theta_2-\theta_1) \geq 0, \qquad (\theta_2-\theta_1)(a) \geq 0.$$

לאחר כפל בגורם אינטגרציה $e^{\int -m(x)} > 0$ מתקבל

$$\left(e^{\int_a^x -m(x)}(\theta_2-\theta_1)\right)' \geq 0$$

ובעזרת אינטגרציה שלו על $[a,x]$,

$$e^{\int_a^x -m(x)}\big(\theta_2(x)-\theta_1(x)\big) \geq e^0\big(\theta_2(a)-\theta_1(a)\big) \geq 0, \qquad x \geq a.$$

בזה הוכחנו כי $\theta_2(x) \geq \theta_1(x)$ על כל $[a,b]$.

הערה: אי שוויון חריף בין מקדמי המשוואות או בין תנאי ההתחלה מבטיח אי שוויון חריף גם במסקנה. □

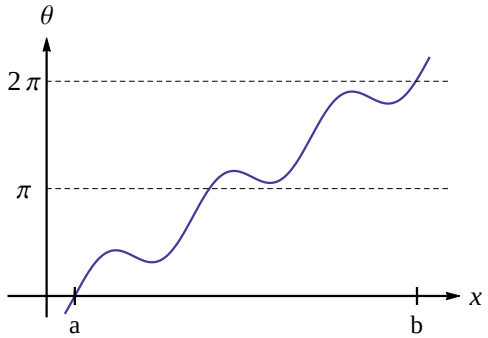
טרנספורמצית Prüfer מאפשרת הכללה של משפט ההשוואה של שטורם למשוואות דיפרנציאליות נוספות.

משפט 5.6 (משפט ההשוואה של שטורם) נתונות שתי המשוואות הדיפרנציאליות (5.20) , (5.21) עם

$$\frac{1}{P_2(x)} \geq \frac{1}{P_1(x)} > 0, \qquad Q_2(x) \geq Q_1(x)$$

וללא שוויון זהותי בקטע $[a,b]$. אם פתרון $u(x)$ של (5.20) מתאפס בנקודות $x = a, b$ אז כל פתרון $v(x)$ של (5.21) חייב להתאפס בקטע הפתוח (a,b).

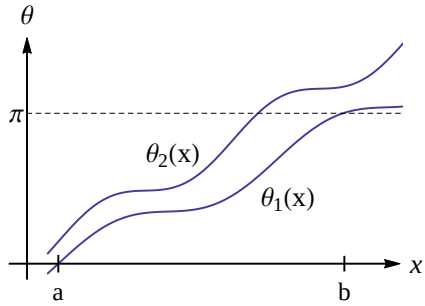
הוכחה. המשתנים של Prüfer מתאימים לחקירת אפסי פתרונות של משוואות מהצורה (5.16), כי הודות ל־$r(x) \neq 0$, פתרון $y(x)$ מתאפס בנקודה אם ורק אם $\theta(x) = n\pi$ שם, n שלם. יתר על כן, כאשר $\theta(x) = n\pi$ עבור x מסוים, אז קיים שם $\theta'(x) = \dfrac{1}{P(x)} > 0$, כלומר אם הגרף של $\theta(x)$ חותך קו אפקי בגובה $n\pi$, אז החתוך נעשה עם שיפוע חיובי. לעומת זאת הגרף אינו חייב להיות מונוטוני בכל מקום אחר, כי לא הנחנו דבר על סימנו של $Q(x)$. ראה דוגמא לפתרון של המשוואה (5.18) באיור 5.2.



איור 5.2: פתרון של משוואה (5.18)

בשתי המשוואות (5.20) , (5.21) נעבור למשתנים של Prüfer. הודות למחזוריות, $\theta_1(a)$ נקבע עד כדי כפולה של 2π. בלי הגבלת כלליות אפשר להניח כי ל־$u(a) = 0$ מתאים דווקא $\theta_1(a) = 0$ (ולא $\theta_1(a) = \pi$) כי החלפת $\theta_1(x)$ ב־$\theta_1(x) + \pi$ שקולה להחלפת הפתרון $u(x)$ בפתרון $-u(x)$. לאפס העוקב של $u(x)$, $x = b$, חייב להתאים $\theta_1(b) = \pi$ כי לפי ההערה שלמעלה, בנקודה זו $\theta_1(x)$ חייב להיות מונוטוני עולה.

באופן דומה אפשר להניח בלי הגבלת הכלליות כי לכל פתרון $v(x)$ של (5.21) מתאים דווקא $0 \leq \theta_2(a) < \pi$. אז לפי משפט 5.5 קיים $\theta_2(x) > \theta_1(x)$ כלומר $\theta_2(x)$ מגיע ל־π לפני $\theta_1(x)$ ו־$v(x)$ מתאפס ב־(a,b). ראה איור 5.3. □



איור 5.3: השוואת שתי הפונקציות $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$

5.3 בעיות שפה וערכים עצמיים

עד כאן עסקנו בבעיות התחלה, דהיינו משוואות דיפרנציאליות עם תנאים נוספים הנתונים כולם בנקודה אחת, כגון בעיה (3.15),

$$y^{(i)}(x_0) = \alpha_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

אם התנאים הנוספים נתונים בנקודות אחדות, אנו מדברים על תנאי שפה ו־בעיות שפה. מקור השם הוא במשוואות ממעלה שניה עם שני תנאים בשתי נקודות, כגון $y(a) = A,\ y(b) = B$, כשאנו מחפשים פתרון לבעיה בקטע בין a ל־b. במשוואות ממעלה גבוהה מ־2, התנאים יכולים להיות נתונים בנקודות אחדות שאינן בהכרח שפת תחום עבודתנו, אך למרות זאת הבעיה עדיין נקראת בעיית שפה.

בעיות שפה מסובכות יותר מבעיות התחלה. נביט לדוגמא בבעיית השפה

$$y'' + y = 0, \qquad y(a) = 0, \quad y(b) = 0.$$

כל פתרונות המשוואה הם מהצורה $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin(x + \varphi)$ ולכל פונקציה לא טרוויאלית כזו יש אפסים במרחק π זה מזה. לכן לבעיה יש פתרון לא טרוויאלי אם ורק אם $b - a = n\pi$ והבעיה אינה מענינת מאד.

מאפיין עיקרי של בעיות שפה מתגלה בפתרון בעיות של משוואות דיפרנציאליות חלקיות. נדגים זאת.

דוגמא 5.9 משוואת הולכת החום הפשוטה ביותר מתארת את התפלגות הטמפרטורה במוט חד ממדי באורך L. הטמפרטורה בנקודה x ובזמן t, $u(x,t)$, מקיימת את המשוואה

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0. \tag{5.22}$$

התהליך מתחיל ברגע $t = 0$ והטמפרטורה ברגע התחלי זה נתונה ונקראת תנאי ההתחלה:

$$u(x, 0) = f(x) \tag{5.23}$$

כמו כן שני קצוות המוט, $x = 0$ $x = L$ מוחזקים בטמפרטורה קבועה, אשר למען הפשטות תבחר כ־0:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0. \tag{5.24}$$

תנאים אלה נקראים תנאי שפה. ננסה למצוא פתרונות לשתי המשוואות ההומוגניות (5.22), (5.24) (אך לא למשוואה (5.23)) בשיטה הנקראת הפרדת משתנים. נחפש פתרונות לא טריוויאליים מהצורה $u(x,t) = X(x)T(t)$, כאשר $X(x), T(t)$ שתי פונקציות בלתי ידועות. נציב פתרון משוער מצורה זו למשוואה (5.22) ונקבל

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t), \qquad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0,$$

כלומר

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)}, \qquad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0.$$

אגף ימין של משוואה זו בלתי תלוי במשתנה x ואגף שמאל לא תלוי ב־t, לכן הערך המשותף חייב להיות קבוע. מקובל לסמן קבוע בלתי ידוע זה כ־$(-\lambda)$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = -\lambda, \qquad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0.$$

באופן דומה נציב $u(x,t) = X(x)T(t)$ ל־(5.24) ונקבל כי לכל $t \ge 0$,

$$X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0.$$

לפיכך הפונקציה המבוקשת $X(x)$ צריכה לקיים לכל $0 \le x \le L$,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X(0) = X(L) = 0. \tag{5.25}$$

עתה מוטל עלינו לקבוע עבור איזה ערכי λ יש לבעיית השפה (5.25) פתרון לא טרוויאלי.

לאחר שהצגנו את בעיית השפה (5.25), נעזוב את תהליך הפרדת המשתנים. בעיה זו מטופלת בלימודי משוואות דיפרנציאליות חלקיות ואנו נחזור לבעיות שפה של משוואות דיפרנציאליות רגילות. □

בעיית השפה (5.25) מזכירה את הגדרת הערכים והוקטורים העצמיים של מטריצות על ידי $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $\vec{v} \in R^n$. ובאמת, אפשר לרשום את (5.25) כ־

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right) X = \lambda X$$

כאשר האופרטור הלינארי $-d^2/dx^2$ פועל על המרחב הלינארי

$$\Big\{X(x) \in C^2[0,L],\ X(0) = X(L) = 0\Big\}.$$

אנו נטפל בבעיות שפה של משוואות דיפרנציאליות מסדר שני מהצורה

$$(P(x)y')' + (\lambda Q(x) + R(x))y = 0 \tag{5.26}$$

בה $P(x), Q(x) > 0$ ושני תנאי השפה

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{5.27}$$

יחד עם זאת נעיר כי באופן דומה אפשר לטפל בבעיות שפה כלליות יותר כגון

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \qquad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0.$$

הגדרה 5.7 ערכים של λ שעבורם יש לבעיית השפה (5.26)–(5.27) פתרון לא טרוויאלי נקראים ערכים עצמיים)ע"ע(. פתרון של המשוואה הדיפרנציאלית המתאים לערך עצמי נקרא פונקציה עצמית של בעיית השפה.

ראשית נוכיח את קיומם של ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות.

משפט 5.8 נניח כי מקדמי המשוואה (5.26) מקיימים $P(x), Q(x) > 0$, $P(x) \in C^1[a,b]$, $Q(x), R(x) \in C[a,b]$. לבעיה (5.26)–(5.27) יש סדרה אינסופית של ערכים עצמיים

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

והם מקיימים $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. לפונקציה העצמית המתאימה לע"ע λ_n יש בדיוק $n-1$ אפסים פשוטים בקטע (a,b).

בסעיף 5.4 בהמשך פרק זה נוכיח כי לבעיה (5.26)–(5.27) לא ייתכנו ערכים עצמיים מרוכבים ולכן אלה המוזכרים במשפט הם כל הערכים העצמיים של הבעיה.

הוכחה. נחפש את ערכי λ כך שפתרון מסוים $y(x,\lambda)$ של המשוואה (5.26) יתאפס בנקודות הקצה a, b. הודות להומוגניות התנאים, אם פתרון מסוים היא פונקציה עצמית אז גם כל כפולה שלה בקבוע היא כזו. לכן אפשר לחפש פתרון המקיים $y(a) = 0,\ y'(a) = 1$. כאמור למעלה, בלי הגבלת הכלליות אפשר להניח כי פונקציית Prüfer המתאימה $\theta(x,\lambda)$ מקיימת $\theta(a,\lambda) = 0$. כדי שהפתרון יתאפס גם בקצה b, עלינו לדאוג כי $\theta(b,\lambda)$ יהיה כפולה שלמה של π.

על פי משפט (5.5) כאשר $\lambda > \tilde{\lambda}$, גם $\theta(x,\lambda) > \theta(x,\tilde{\lambda})$, כלומר $\theta(x,\lambda)$ פונקציה מונוטונית עולה של λ.

כזכור, $y(x,\lambda)$ מתאפס כאשר ערך $\theta(x,\lambda)$ הוא כפולה שלמה של λ. כאשר $\theta(x,\lambda)$ עולה עם גידול λ, נקודת החתוך של הגרף של $\theta(x,\lambda)$ עם הישר בגובה $k\pi$ זזה שמאלה, כלומר כל אפס של $y(x,\lambda)$ הוא מונוטוני יורד עם λ.

נוכיח שתי תכונות: לכל c, $a < c \le b$,

1. $\lim_{\lambda\to+\infty} \theta(c,\lambda) = +\infty$

2. $\lim_{\lambda\to-\infty}\theta(c,\lambda)=0$

מכאן נסיק כי כאשר λ גדל, $\theta(x,\lambda)$ חותך יותר כפולות של π.

הוכחת טענה 1. נקח קבועים P,Q,R כך ש־

$$0<\frac{1}{P}<\frac{1}{P(x)},\qquad 0<Q<Q(x),\qquad R<R(x).$$

נסמן ב־$\theta(x,\lambda)$ את משתנה Prüfer המתאים לפתרון

$$(P(x)y')'+(\lambda Q(x)+R(x))y=0,\qquad y(a)=0,\ y'(a)=1,$$

ו־$\tilde\theta(x,\lambda)$ זה המתאים ל־

$$(Pz')'+(\lambda Q+R))z=0,\qquad z(a)=0,\ z'(a)=1.$$

הודות לאי־השוויונות בין המקדמים ומשפט (5.5), קיים $\theta(x,\lambda)>\tilde\theta(x,\lambda)$. אבל המשוואה השניה היא בדיוק

$$z''+\frac{\lambda Q+R}{P}\,z=0,$$

לה פתרון $z(x)=\sin\Big(\sqrt{\frac{\lambda Q+R}{P}}\,(x-a)\Big)$, ומספר אפסי פתרון זה בקטע $[a,c]$ הוא החלק השלם של $\sqrt{\frac{\lambda Q+R}{P}}\,\frac{c-a}{\pi}$. גודל זה שואף לאינסוף כאשר $\lambda\to+\infty$, לכן עבור ערכי λ די גדולים הגרף של $\tilde\theta(x,\lambda)$ חותך מספר כפולות שלמות של π גדול כרצוננו. מכאן נובע כי

$$\theta(c,\lambda)>\tilde\theta(c,\lambda)\to+\infty.$$

הוכחת טענה 2. הפעם נעזר במשוואה הדיפרנציאלית

$$\theta'(x,\lambda)=\frac{1}{P(x)}\cos^2\theta+\big(\lambda Q(x)+R(x)\big)\sin^2\theta,$$

כדי להוכיח ש־$0\le\theta(x,\lambda)\le\varepsilon$ עבור ערכי λ די שליליים. מכיון ש־$\theta(a,\lambda)=0$, עלינו להוכיח כי $\theta(x,\lambda)$ אינו חותך את הקו האפקי בגובה ε.

הפעם נבחר קבועים אחרים כך ש־

$$0<\frac{1}{P(x)}<\frac{1}{P^*},\qquad 0<Q^*<Q(x),\qquad R(x)<R^*.$$

אז בגובה $\theta=\varepsilon$ ועבור λ שלילי,

$$\theta'(x,\lambda)\le\frac{1}{P^*}-|\lambda|Q^*\sin^2\varepsilon+R^*.$$

עבור ε הנתון נבחר $\lambda=-|\lambda|$ די שלילי כך שאגף ימין יהיה שלילי. במצב זה הגרף של $\theta(x,\lambda)$ אינו יכול לחצות את הישר $\theta=\varepsilon$ מלמטה למעלה ולכן הגרף חייב להשאר בתוך הרצועה $0\le\theta<\varepsilon$, כנדרש.

משתי הטענות שלמעלה נובע כי כאשר λ גדל מ־$(-\infty)$ אל $+\infty$, ערכי $\theta(b,\lambda)$ עולים מאפס אל $+\infty$. לפי משפט (3.19), $\theta(b,\lambda)$ גם תלוי באופן רציף במשתנה λ. לכן קיים $\lambda = \lambda_1$ יחיד כך ש־$\theta(b,\lambda_1) = \pi$ ו־$0 < \theta(x,\lambda_1) < \pi$ עבור $a < x < b$. לפיכך λ_1 הוא הערך העצמי הראשון של בעיית השפה ו־$y(x,\lambda_1)$ היא הפונקציה העצמית המתאימה ואין היא מתאפסת בקטע (a,b).

באופן דומה אנו מגיעים למסקנה כי קיים $\lambda_2 > \lambda_1$ יחיד כך ש־$\theta(b,\lambda_2) = 2\pi$. עבור λ_2 זה, הגרף של $\theta(x,\lambda_2)$ חותך את הישר $\theta = \pi$ בדיוק פעם אחת עבור $a < x < b$ ולכן הפונקציה העצמית המתאימה $y(x,\lambda_2)$ מתאפסת בדיוק פעם אחת בקטע (a,b).

לבסוף, צעד אחר צעד, מראים קיום $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ כך של־$y(x,\lambda_n)$ יש בדיוק $n-1$ אפסים ב־(a,b). סדרת הערכים העצמיים λ_n אינה יכולה להיות חסומה כי אחרת סדרת הנגזרות $\theta'(x,\lambda_n)$ היתה בעלת חסם קבוע משותף לכל x ו־$\theta(b,\lambda_n)$ היה חסום, בניגוד לתכונה 1. $\square$

דוגמא 5.10 נחשב את הערכים העצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה (5.25),

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X(0) = X(L) = 0.$$

עבור $\lambda < 0$, הפתרון הכללי של המשוואה הוא $X(x) = c_1 \exp(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \exp(-\sqrt{\lambda}x)$ ועבור $\lambda = 0$ הוא $X(x) = c_1 + c_2 x$. בשני המקרים הצבה וחישוב ישירים מראים כי אף פונקציה)לא טרוויאלית(מצורות אלה אינה יכולה להתאפס בשתי נקודות.

עבור $\lambda > 0$, הפתרון הכללי של המשוואה הוא $X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$. מתנאי השפה $X(0) = 0$ נובע כי $c_1 = 0$ ואילו התנאי השני, $X(L) = 0$, גורר כי $c_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$ כלומר $\sqrt{\lambda} = n\pi/L$. לכן סדרת הערכים העצמיים והפונקציות העצמיות של בעיה (5.25) הם

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad \square$$

5.4 תכונות של ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות

לאחר שהוכחנו את קיומם של ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות, נראה מספר תכונות שלהם. לשם הנוחות נתרכז רק במשוואה דיפרנציאלית פשוטה.

משפט 5.9 נתונה בעיית השפה

$$y'' + \lambda p(x) y = 0, \qquad y(a) = y(b) = 0. \tag{5.28}$$

1. אם $p(x) > 0$ ב־$[a,b]$ אז לבעיית השפה (5.28) אין אף ערך עצמי $\lambda \le 0$.
2. לכל ערך עצמי מתאימה פונקציה עצמית יחידה עד כדי כפל בקבוע.

3. אם $\lambda_1 \neq \lambda_2$ שני ערכים עצמיים ו־$y_1(x), y_2(x)$ הפונקציות העצמיות המתאימות להם, אז

$$\int_a^b p(x)y_1(x)y_2(x)\,dx = 0.$$

תכונה זו נקראת אורתוגונליות לפי משקל $p(x)$.

4. אם $p(x) > 0$ אז לבעיה (5.28) אין ערכים עצמיים לא ממשיים.

הוכחה. 1. אם $\lambda p(x) \leq 0$ אז על פי דוגמא 5.2 לא ייתכנו שני אפסים לפתרון המשוואה. דרך אחרת היא לכפול את את המשוואה הדיפרנציאלית ב־y ולבצע אינטגרציה:

$$\int_a^b yy''\,dx + \lambda \int_a^b p(x)y^2\,dx = 0.$$

בעזרת אינטגרציה לחלקים ותנאי השפה מקבלים

$$\int_a^b yy''\,dx = yy'\big|_a^b - \int_a^b y'^2\,dx = -\int_a^b y'^2\,dx$$

ולכן

$$\lambda = \int_a^b y'^2\,dx \Big/ \int_a^b p(x)y^2\,dx > 0.$$

2. אם לאותו ערך עצמי מתאימות שתי פונקציות עצמיות $y_1(x), y_2(x)$ אז שתיהן פתרונות של אותה משוואה דיפרנציאלית. לפי תנאי השפה $y_1(a) = y_2(a) = 0$, הוורונסקיאן שלהן מקיים $W(y_1, y_2)(a) = 0$. לכן שתי פונקציות עצמיות אלה תלויות לינארית, כלומר $y_2(x) = cy_1(x)$.

3. נניח כי שתי הפונקציות העצמיות y_1, y_2 מקימות בהתאמה את המשוואות הדיפרנציאליות

$$y_1'' + \lambda_1 p(x)y_1 = 0,$$

$$y_2'' + \lambda_2 p(x)y_2 = 0,$$

ואת תנאי השפה המוזכרים למעלה. בדומה להוכחת משפט 5.2, נכפול את הממשוואה הראשונה ב־y_2, את המשוואה השניה ב־y_1, נחסיר ונבצע אינטגרציה:

$$\int_a^b (y_2y_1'' - y_1y_2'')\,dx + (\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b p(x)y_1(x)y_2(x)\,dx = 0.$$

אך כזכור $y_2y_1'' - y_1y_2'' = (y_2y_1' - y_1y_2')'$, לכן בעזרת תנאי השפה

$$\int_a^b (y_2y_1'' - y_1y_2'')\,dx = (y_2y_1' - y_1y_2')\Big|_a^b = 0.$$

לכן

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b p(x)y_1(x)y_2(x)\,dx = 0.$$

מכיון ש־$\lambda_1 \neq \lambda_2$, טענה 3 נובעת.

4. נניח כי λ הוא ערך עצמי מרוכב ו־$y(x)$ היא הפונקציה העצמית המתאימה, אף היא מרוכבת מן הסתם. נרשום את המשוואה הדיפרנציאלית ואת הצמוד המרוכב שלה,

$$y'' + \lambda p(x) y = 0,$$

$$\overline{y}'' + \overline{\lambda} p(x) \overline{y} = 0.$$

שים לב כי $p(x)$ ממשי. כמו למעלה נקבל כי

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b p(x) y(x) \overline{y(x)}\, dx = 0.$$

אם λ אינו ממשי אז $\lambda - \overline{\lambda} \neq 0$ ו־$\int_a^b p(x)|y(x)|^2\, dx > 0$, סתירה. □

מרשימת התכונות שלמעלה אנו מסיקים כי הערכים העצמיים שאת קיומם הוכחנו במשפט 5.8 הם כל הערכים העצמיים האפשריים ואין עוד מבלעדיהם.

5.5 הוכחה נוספת לקיום ערכים עצמיים

בסעיף זה נביא הוכחה נוספת למשפט 5.8 בדבר קיומם של ערכים עצמיים מבלי להשתמש בטרנספורמצית Prüfer. לשם הפשטות ננסח הוכחה זו רק עבור בעיית השפה (5.28) ולא עבור הבעיה (5.26)־(5.27).

הוכחה. הוכחה זו מבוססת על שיטת Shooting method הנהוגה באנליזה נומרית. נסתכל בפתרון $y_\lambda(x)$ של בעיית ההתחלה

$$y'' + \lambda p(x) y = 0, \qquad y(a) = 0, \quad y'(a) = 1, \tag{5.29}$$

ונעקוב אחרי שינוי אפסיו עם שינוי λ. מטרתנו היא להוכיח כי עבור λ די קטן ל־$y_\lambda(x)$ יש אפס ראשון מימין ל־b ועבור λ די גדול האפס הראשון נמצא משמאל ל־b. כמו כן נראה כי האפס הראשון יורד באופן רציף עם גידול λ ולכן עבור ערך מסוים הוא בדיוק פוגש ב־b ונכנס לקטע (a, b). ערך זה של λ יהיה הערך העצמי הראשון. באופן דומה נאתר את אינסוף הערכים העצמיים הבאים.

לשם נוחיות הקריאה נחלק את ההוכחה לשלבים אחדים.

שלב 1. נרחיב את הגדרת הפונקציה $p(x)$ מהקטע $[a, b]$ לקרן $[a, \infty)$ על ידי הבחירה $p(x) = p(b)$ לכל $x > b$. ללא חשש ובלי הגבלת הכלליות נמשיך לכנות את הפונקציה החדשה באותו שם, $p(x)$. נעיר כי אם הפונקציה המקורית רציפה ב־$[a, b]$ ומקיימת שם $0 < m \leq p(x) \leq M$, כך תקיים גם הפונקציה החדשה על $[a, \infty)$.

שלב 2. לפתרון $y_\lambda(x)$ של (5.29) יש אפס ב־$[a, \infty)$.

כי אם נבחר c די גדול כך ש־

$$\left(\frac{\pi}{c-a}\right)^2 < \lambda m \le \lambda p(x),$$

אז מדוגמא 5.4 נובע כי לפתרון $y_\lambda(x)$ יש לפחות אפס אחד ב־(a,c). את האפס הראשון של $y_\lambda(x)$ מימין ל־a נסמן ב־$x_1(\lambda)$.

שלב 3. $x_1(\lambda)$ היא פונקציה מונוטונית יורדת ממש של λ.

כי אם $\lambda_2 > \lambda_1$ אז נ שווה את הפתרון $y_{\lambda_1}(x)$ של $y'' + \lambda_1 p(x) y = 0$ עם הפתרון $y_{\lambda_2}(x)$ של $y'' + \lambda_2 p(x) y = 0$. מכיון ש־$\lambda_1 p(x) < \lambda_2 p(x)$, ומכיון ש־$y_{\lambda_1}(x)$ מתאפס בשתי הנקודות $x = a,\ x_1(\lambda_1)$, לפי משפט ההשוואה של שטורם $y_{\lambda_2}(x)$ מתאפס בקטע $(a, x_1(\lambda_1))$, כלומר $a < x_1(\lambda_2) < x_1(\lambda_1)$, והפונקציה $x_1(\lambda)$ יורדת כנדרש.

שלב 4. קיים λ די גדול כך ש־$b > x_1(\lambda)$ וקיים λ די קטן כך ש־$b < x_1(\lambda)$.

ובאמת, אם נבחר $\lambda = L_1^+$ די גדול כך ש־

$$\left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2 < L_1^+ m \le L_1^+ p(x).$$

אז כמו בשלב 2, נקבל כי $x_1(\lambda) < b$. ואם נבחר $\lambda = L_1^- > 0$ די קטן כך ש־

$$L_1^- p(x) \le L_1^- M \le \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2,$$

אז לפי דוגמא 5.4 כל פתרון של המשוואה $y'' + L_1^- p(x) y = 0$ מתאפס לכל היותר פעם אחת בקטע $[a,b]$. בפרט, הפתרון $y(x,\lambda)$ עם $\lambda = L_1^-$ מתאפס ב־ $x = a$ לכן אין לו אף אפס נוסף ב־$(a,b]$ והאפס הראשון שלו שקיומו הובטח בסעיף 2, חייב להמצא מימין ל־b, כלומר $b < x_1(\lambda)$.

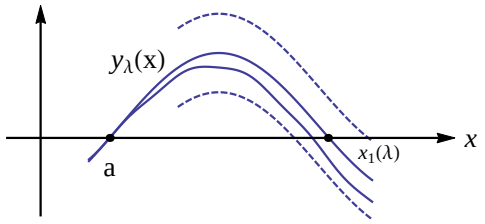
שלב 5. נקודת האפס $x_1(\lambda)$ היא פונקציה רציפה של λ.

נתרגם את המשוואה שלנו למערכת שתי משוואות ממעלה ראשונה עם תנאי התחלה. על פי משפט 3.19 הזוג $(y_\lambda(x), y'_\lambda(x))$ תלוי באופן רציף בפרמטר λ בכל קטע סופי $a \le x \le c$. לפיכך אם μ קרוב ל־λ אז בכל קטע סופי הגרף של $y_\mu(x)$ קרוב לגרף של $y_\lambda(x)$ ושיפועיהם קרובים זה לזה. ראה איור 5.4.

כזכור $x_1(\lambda)$ הוא נקודת אפס של הפתרון $y_\lambda(x)$ ומכיוון שמדובר במשוואה לינארית, הומוגנית מסדר שני, זהו אפס פשוט:

$$y_\lambda(x_1(\lambda)) = 0, \qquad y'_\lambda(x_1(\lambda)) \ne 0.$$

הודות לכך, הפתרון $y_\lambda(x)$ מחליף את סימנו במעבר דרך הנקודה $x_1(\lambda)$. מכיוון ש־$y_\mu(x)$ קרוב ל־$y_\lambda(x)$ ושיפועיהם קרובים, גם $y_\mu(x)$ חייב להחליף את סימנו בקרבת מקום. בפרט יש לו אפס, שייקרא $x_1(\mu)$ בקרבת $x_1(\lambda)$. זה מאשר את רציפות $x_1(\lambda)$ כפונקציה של λ.



איור 5.4: תלות רציפה של $y_\lambda(x)$ בפרמטר λ

שלב 6. לפי שלב 4, $x_1(\lambda) > b$ עבור $\lambda = L_1^- > 0$ די קטן, ו־$b < x_1(\lambda)$ עבור $\lambda = L_1^+$ די גדול, ומכיוון ש־$x_1(\lambda)$ פונקציה רציפה ומונוטונית של λ, קיים בדיוק ערך יחיד $\lambda = \lambda_1$, כך ש־$x_1(\lambda_1) = b$, כלומר $y_{\lambda_1}(x)$ מתאפס בדיוק בנקודה b.

פתרון זה מתאפס לפי הגדרתו גם ב־$x = a$ ומקיים את תנאי השפה הנתונים. λ_1 הוא הערך הקטן ביותר בעל תכונות אלה, לכן הוא הערך העצמי הקטן ביותר של בעיית השפה (5.28). מכיוון ש־$x_1(\lambda)$ הוא האפס הראשון של $y_\lambda(x)$ מימין ל־a, הפונקציה העצמית המתאימה $y_{\lambda_1}(x)$ אינה מתאפסת ב־(a, b).

שלב 7. עתה נראה באופן דומה את קיומו של ערך עצמי שני לבעיית השפה. אם נבחר c די גדול כך ש־

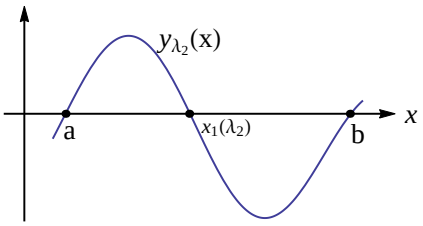
$$\left(\frac{2\pi}{c-a}\right)^2 < \lambda m \le \lambda p(x),$$

אז ל־$y_\lambda(x)$ יש לפחות שני אפסים ב־(a, c). את האפס השני מימין ל־a נסמן ב־$x_2(\lambda)$. כמובן ש־$a < x_1(\lambda) < x_2(\lambda)$.

נבחר $L_2^+ > L_2^- > L_1^- > 0$ כך ש־

$$L_2^-\, p(x) \le L_2^- M \le \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2 < L_2^+ m \le L_2^+\, p(x).$$

אז כמו בשלב 4, נקבל כי $b < x_2(L_2^-)$ ו־ $x_2(L_2^+) < b$ וקיים בדיוק ערך יחיד $L_2^- < \lambda_2 < L_2^+$, כך ש־$x_2(\lambda_2) = b$. λ_2 זה הוא הערך העצמי השני והפונקציה העצמית המתאימה $y_{\lambda_2}(x)$ מתאפסת פעם אחת ב־(a, b), בנקודה $x_1(\lambda_2)$. ראה איור 5.5.



איור 5.5: הפונקציה העצמית השניה y_{λ_2}

שלב 8. באופן דומה נוכיח את קיום סדרת ערכים עצמיים $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ והפונקציות העצמיות המתאימות, כך שלפונקציה ה־n־ית, $y_{\lambda_n}(x)$, יש בדיוק $n-1$ אפסים ב־(a,b). נותר להוכיח כי $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

נניח להפך כי $\lambda_n \nearrow A < \infty$ ובפרט $\lambda_n < A$ ונשווה את המשוואות

$$y'' + \lambda_n p(x) y = 0,$$
$$z'' + A\, p(x) z = 0.$$

לפתרון $y_{\lambda_n}(x)$ של המשוואה הראשונה יש בדיוק $n+1$ אפסים ב־$[a,b]$, לכן על פי משפט ההשוואה של שטורם לכל פתרון $z(x)$ של המשוואה השניה יש לפחות n אפסים ב־(a,b). אך זה נכון לכל n, לכן לכל פתרון $z(x)$ יהיו אינסוף אפסים בקטע (a,b).

אך זה בלתי אפשרי: נניח להפך כי ל־$z(x)$ יש אינסוף אפסים $c_1 < c_2 < \dots$ ב־$[a,b]$ ולהם נקודת הצטברות $\lim_{n\to\infty} c_n = \gamma$. בין כל שני אפסים $c_i < c_{i+1}$ של $z(x)$ יש אפס d_i של $z'(x)$,

$$a < c_1 < d_1 < c_2 < d_2 < c_3 < \dots$$

ברור שגם $\lim_{n\to\infty} d_n = \gamma$. הודות לרציפות $z(x), z'(x)$, קיים

$$0 = \lim_{n\to\infty} z(c_n) = z(\gamma), \qquad 0 = \lim_{n\to\infty} z'(d_n) = z'(\gamma),$$

לכן $z(\gamma) = z'(\gamma) = 0$. אבל למשוואה לינארית, הומוגנית מסדר שני רק הפתרון הטרוויאלי מקיים תנאי התחלה אלה, סתירה. אי לכך, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. $\square$

5.6 טרנספורמציות שונות

בסעיפים קודמים פגשנו בהחלפות משתנים המביאים משוואות לינאריות ממעלה שניה לצורות אחרות, לעיתים נוחות יותר לשימוש. נרכז כאן דוגמאות אחדות. למשל, בדוגמא 5.8 ראינו כי המשוואה בעלת שלושה אברים

$$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0 \tag{5.30}$$

הופכת על ידי החלפת המשתנים $y(x) = e^{-\frac{1}{2}\int p_1(x)} z(x)$ למשוואה בת שני אברים

$$z'' + \left(p_2 - \frac{1}{2} {p_1}' - \frac{1}{4} {p_1}^2\right) z = 0. \tag{5.31}$$

בסעיף 5.2 ראינו כיצד מביאים את המשוואה הדיפרנציאלית (5.30) לצורה צמודה לעצמה (self adjoint). המשוואה $y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0$ הופכת על ידי כפל ב־$e^{\int p_1} > 0$ ל־

$$\big(P(x) y'\big)' + Q(x) y = 0, \tag{5.32}$$

כאשר $P(x) = e^{\int p_1},\ Q(x) = p_2(x) e^{\int p_1}$.

נרכז כאן טרנספורמציות אחדות של המשוואה הצמודה לעצמה.

תרגיל 5.11 הראה כי אם y מקיים $\big(P(x)y'\big)' + Q(x)y = 0$, $P(x) > 0$, ו־ $z(x) = P(x)y'(x)$ אז

$$\left(\frac{1}{P(x)}\,z'\right)' + \frac{1}{Q(x)}\,z = 0.$$

דוגמא 5.12 אם y מקיים $L[y] \equiv \big(P(x)y'\big)' + Q(x)y = 0$, אז $y = \mu(x)z$ מקיים

$$\big(\mu^2 P z'\big)' + \mu L[\mu]z = 0.$$

הוכחה. נציב $y = \mu z$, $y' = \mu z' + \mu' z$, נכפול ב־μp ונגזור:

$$(\mu P y')' = (\mu^2 P z')' + (P\mu' \cdot \mu z)'.$$

מצד שני, הודות ל־$\big(Py'\big)' = -Qy$,

$$(\mu P y')' = \mu(Py')' + \mu'(Py') = -\mu Q y + P\mu' \cdot y' = -\mu^2 Q z + P\mu'(\mu z)'.$$

נשווה את שני הביטויים ל־$(\mu P y')'$:

$$(\mu^2 P z')' + \Big((P\mu')'(\mu z) + (P\mu')(\mu z)'\Big) = -\mu^2 Q z + P\mu'(\mu z)'.$$

נסדר ונקבל

$$(\mu^2 P z')' + \mu\Big[(P\mu')' + \mu Q\Big]z = 0,$$

כנדרש. אגב, במקרה ש־$\mu(x)$ הוא בדיוק פתרון המשוואה, $L[\mu] = 0$, אז זו שיטת הורדת הסדר בה פגשנו בדוגמא 4.9. $\square$

בדוגמא הבאה נחליף את המשתנה החפשי.

דוגמא 5.13 אם y פתרון $\big(P(x)y'\big)' + Q(x)y = 0$, $P(x) > 0$, $' = d/dx$, ונגדיר משתנה חפשי חדש $t = \displaystyle\int_0^x \frac{ds}{P(s)}$, אז $z(t) = y\big(x(t)\big)$ מקיים

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + P\big(x(t)\big)\,Q\big(x(t)\big)\,z(t) = 0.$$

הוכחה. אם $y(x) = z(t)$ אז

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{P(x)}\frac{dz}{dt},$$

$$\frac{d}{dx}\left(P\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{P(x)}\frac{d^2 z}{dt^2}$$

לכן המשוואה הנתונה הופכת ל־$\frac{1}{P(x)}\frac{d^2z}{dt^2}+Q(x)z(t)=0$. $\square$

תרגיל 5.14 הוכח כי המשוואה $\left(P(x)y'\right)'+Q(x)y=0$ הופכת על ידי ההצבה $y(x)=z(t)\ ,t=\int_0^x\sqrt{Q(s)/P(s)}\,ds$ ל־

$$\frac{d}{dt}\left(R(t)\frac{dz}{dt}\right)+R(t)z(t)=0,\qquad R(t)=\sqrt{P(x)Q(x)}\ .$$

תרגיל 5.15 הוכח כי האופרטור $L[y]\equiv\left(P(x)y'\right)'+Q(x)y$ הופך על ידי ההצבה $y=\mu(x)z,\ t=\int_0^x\lambda(s)\,ds$ ל־

$$L[y]=\lambda\mu^{-1}\frac{d}{dt}\left(P(t)\mu^2\lambda\frac{dz}{dt}\right)+L[\mu]z(t)\ .$$

פרק 6

מערכות של משוואות לינאריות

6.1 תכונות יסוד של מערכות לינאריות

בפרק זה נדון במקרה בו כל המשוואות במערכת

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n),\\ &\vdots\\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n)\end{aligned}$$

הן לינאריות ב־n הנעלמים $y_1, \ldots, y_n$, כלומר מערכת המשוואות היא מהצורה

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= p_{11}(x)y_1 + \cdots + p_{1n}(x)y_n + q_1(x),\\ &\vdots\\ \frac{dy_n}{dx} &= p_{n1}(x)y_1 + \cdots + p_{nn}(x)y_n + q_n(x),\end{aligned} \tag{6.1}$$

כאשר $p_{ij}(x), q_i(x)$ הן פונקציות נתונות. תנאי ההתחלה המתאימים יהיו, כמקובל, מהצורה $y_i(x_0) = y_{0,i}$, $i = 1, \ldots, n$. למען נוחיות הכתיבה נסמן כמו בפרק 3

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x)\\ \vdots\\ y_n(x)\end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} p_{11}(x), & \cdots, & p_{1n}(x)\\ & \vdots & \\ p_{n1}(x), & \cdots, & p_{nn}(x)\end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}(x) = \begin{pmatrix} q_1(x)\\ \vdots\\ q_n(x)\end{pmatrix},$$

ונרשום את המערכת ואת תנאי ההתחלה בכתיב וקטורי כ־

$$\mathbf{y}'(x) = P(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{q}(x), \qquad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0}. \tag{6.2}$$

זו מערכת משוואות לינאריות, לא הומוגניות.

דוגמא 6.1 משוואה לינארית מסדר n

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ \cdots \ + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x)$$

הופכת על ידי ההצבה $v_1(x) = y(x),\ \ v_2(x) = y'(x),\ \ldots,\ v_n(x) = y^{(n-1)}(x)$ הנזכרת בסעיף 3.6, למערכת של n משוואות לינאריות מסדר ראשון ב־$v_1, \ldots, v_n$,

$$\begin{aligned} v_1' &= \qquad\qquad v_2, \\ v_2' &= \qquad\qquad\quad v_3, \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \\ v_{n-1}' &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad v_n, \\ v_n' &= -p_n(x)v_1 - p_{n-1}(x)v_2 - \cdots - p_1(x)v_n \ + \ q(x). \end{aligned} \tag{6.3}$$

בכתיב וקטורי תרשם מערכת זו בצורה

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -p_n & -p_{n-1} & \cdots & & -p_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(x) \end{pmatrix}. \qquad \square$$

n תנאי ההתחלה $y(x_0) = \alpha_0,\ y'(x_0) = \alpha_1,\ \ldots\ ,\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$ מתורגמים ל־

$$v_1(x_0) = \alpha_0, \quad v_2(x_0) = \alpha_1,\ \ldots\ ,\ v_n(x_0) = \alpha_{n-1}.$$

עבור מערכות לינאריות משפטי קיום ויחידות תקפים בהנחות נוחות מאד.

משפט 6.1 נתונה מערכת המשוואות ותנאי ההתחלה (6.2). אם הפונקציות $p_{ij}(x), q_i(x)$ רציפות בקטע הסגור $a \le x \le b$ ו־ $a \le x_0 \le b$, אז לבעיית ההתחלה (6.2) קיים פתרון $\mathbf{y}(x)$ בעל נגזרת רציפה אשר מוגדר בכל הקטע $a \le x \le b$ ופתרון זה הוא יחיד.

הוכחה. עלינו לאמת כי תנאי משפט 3.11 בדבר קיום גלובלי של פתרון (וכמובן גם תנאי משפט 3.9) מתקיימים.

ברור כי המשוואות באגף ימין רציפות ב־ $n+1$ המשתנים $x, y_1, \ldots, y_n$. עבור תנאי ליפשיץ נשתמש, כמו בפרק 3, בנורמת המקסימום $||\mathbf{y}|| = \max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}$. אזי לכל $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ ולכל $a \le x \le b$ מתקיים

$$\begin{aligned} ||\mathbf{f}(x,\mathbf{y}) - \mathbf{f}(x,\mathbf{z})|| = ||P\mathbf{y} - P\mathbf{z}|| &= \max|\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x)\big(y_j(x) - z_j(x)\big)| \\ &\le n\ \max|p_{ij}(x)|\ \max|y_j(x) - z_j(x)| \le L||\mathbf{y} - \mathbf{z}|| \end{aligned}$$

(max עבור ערכי i, j, x מתאימים) והמסקנה נובעת. $\square$

כמו במשפט 3.12 מתקבל גם כאן כי אם מקדמי המערכת הן פונקציות רציפות בקטע פתוח, אף קיום הפתרון מובטח לפחות באותו קטע פתוח.

6.2 מערכת לינארית הומוגנית ומבנה פתרונותיה

תחילה נעסוק במערכת לינארית הומוגנית

$$(H) \qquad \mathbf{y}'(x) = P(x)\mathbf{y}(x), \tag{6.4}$$

כלומר מערכת (6.2) בה $\mathbf{q}(x) \equiv \mathbf{0}$.

תכונות מערכות לינאריות דומות לתכונות משוואות לינאריות מסדר גבוה. חלק מההוכחות הבאות מקבילות להוכחות עבור משוואות לינאריות ממעלה n עם שינויים מתבקשים קטנים.

מכיון שעלינו לטפל בעת ובעונה אחת ביותר מאשר פתרון אחד, נמספר את וקטורי הפתרון כ־$\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \ldots$. בכתיב של רכיבים אלה יהיו

$$\mathbf{y}_1(x) = \begin{pmatrix} y_{1,1}(x) \\ y_{1,2}(x) \\ \vdots \\ y_{1,n}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2(x) = \begin{pmatrix} y_{2,1}(x) \\ y_{2,2}(x) \\ \vdots \\ y_{2,n}(x) \end{pmatrix}, \ \ldots \ \ \mathbf{y}_k(x) = \begin{pmatrix} y_{k,1}(x) \\ y_{k,2}(x) \\ \vdots \\ y_{k,n}(x) \end{pmatrix}.$$

כאן $y_{k,j}$ מסמן את הרכיב מספר j בפתרון ה־k־י, $\mathbf{y}_k(x)$

משפט 6.2 אוסף כל הפתרונות של המערכת ההומוגנית (6.4) מהוה מרחב לינארי.

הוכחה. יש להראות כי אם $\mathbf{y}_1(x),\ \mathbf{y}_2(x)$ הם שני פתרונות של המערכת הדיפרנציאלית ההומוגנית (H), אז כל צרוף לינארי שלהם עם מקדמים קבועים $c_1\mathbf{y}_1(x) + c_2\mathbf{y}_2(x)$, הוא פתרון של אותה מערכת. ובאמת

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2\right] &= c_1\frac{d}{dx}\mathbf{y}_1 + c_2\frac{d}{dx}\mathbf{y}_2 \\ &= c_1P(x)\mathbf{y}_1 + c_2P(x)\mathbf{y}_2 \\ &= P(x)\left[c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2\right]. \end{aligned}$$

כאן המקום להעיר כי פונקציית וקטור האפס

$$\mathbf{y}(x) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

היא פתרון לכל מערכת דיפרנציאלית לינארית הומוגנית ונקראת הפתרון הטריוויאלי. □

כדי לתאר מבנה של מרחב לינארי של פונקציות וקטוריות, עלינו להגדיר את המושג "תלות לינארית" עבור אלמנטים שהם וקטורים ופונקציות גם יחד.

הגדרה 6.3 קבוצת m פונקציות וקטוריות ב־R^n

$$\mathbf{v}_1(x) = \begin{pmatrix} v_{1,1}(x) \\ v_{1,2}(x) \\ \vdots \\ v_{1,n}(x) \end{pmatrix}, \ \dots \ , \ \mathbf{v}_m(x) = \begin{pmatrix} v_{m,1}(x) \\ v_{m,2}(x) \\ \vdots \\ v_{m,n}(x) \end{pmatrix}$$

נקראות תלויות לינארית בקטע I אם קיימים m קבועים $c_1, c_2, \dots, c_m$, לא כולם 0, כך ש־

$$c_1\mathbf{v}_1(x) + c_2\mathbf{v}_2(x) + \cdots + c_m\mathbf{v}_m(x) \equiv \mathbf{0}$$

לכל ערכי x בקטע I. אם אין קבועים $(c_1, \dots, c_m) \neq (0, \dots, 0)$ כאלה, אז הפונקציות נקראות בלתי תלויות לינארית בקטע I.

חשוב להדגיש כי $c_1, c_2, \dots, c_m$ חייבים להיות קבועים, בלתי תלויים במשתנה x.

מכיון שתנאי ההתחלה $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ מכיל n פרמטרים סקלריים שרירותיים, אפשר לשער כי מרחב הפתרונות של המערכת (6.4) הוא n־ממדי. כדי להוכיח זאת עלינו להוכיח כי קיימים n פתרונות וקטוריים בלתי תלויים לינארית אשר פורשים את כל מרחב הפתרונות. בנוסף גם נאפיין פתרונות אלה.

נתחיל בהגדרת הוורונסקיאן ושאלת התלות הלינארית. כזכור מאלגברה לינארית, על מנת לבדוק האם n וקטורים קבועים $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in R^n$ תלויים לינארית, בודקים האם הדטרמיננט

$$\det\Big(\mathbf{v}_1 \,\vdots\, \mathbf{v}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{v}_n\Big)$$

הבנוי מוקטורים אלה כעמודותיו מתאפס או לא. על פי מודל זה אנו מגדירים:

הגדרה 6.4 לכל n פונקציות וקטוריות $\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)$, הדטרמיננט של המטריצה $n \times n$ המורכבת מעמודותיהן,

$$\begin{vmatrix} y_{1,1}(x) & y_{2,1}(x) & \cdots & y_{n,1}(x) \\ \vdots & & & \\ y_{1,n}(x) & y_{2,n}(x) & \cdots & y_{n,n}(x) \end{vmatrix}, \tag{6.5}$$

נקרא ה־*Wronskian* של $\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)$ ומסומן ב־

$$W(x) = W\big(\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)\big).$$

לעיתים נעדיף מטעמים של נוחיות הכתיבה והדגשת תפקיד x לרשום את הוורונסקיאן דווקא בצורה $W(x) = W\big(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\big)(x)$.

שים לב להקבלה בין הגדרת הוורונסקיאן עבור משוואה לינארית מסדר n ועבור מערכת של n משוואות לינאריות מסדר ראשון. בעוד שעבור משוואה מסדר גבוה הופיעו בכל עמודה של הוורונסקיאן פתרון ונגזרותיו, הרי עבור מערכת מופיע באותו מקום פתרון על כל רכיביו.

משפט 6.5 (פתרונות תלויים) אם המערכת ההומוגנית (6.4), $\mathbf{y}' = P(x)\mathbf{y}$, מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות בקטע I אז n פתרונות שלה $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ תלויות לינארית בקטע I אם ורק אם הוורונסקיאן שלהם מתאפס בנקודה אחת כלשהי $x_0 \in I$,

$$W\big(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\big)(x_0) = 0$$

יתר על כן, בהנחות שלמעלה, אם הורונסקיאן $W\big(\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)\big)$ מתאפס בנקודה אחת $x_0 \in I$ אז הוא מתאפס זהותית בכל הקטע I.

הוכחה. א. הכיוון הראשון של ההוכחה אינו קשור כלל למשוואות דיפרנציאליות אלא הוא מסקנה אלגברית. אם הפונקציות הוקטוריות $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ (שאינן דווקא פתרונות של מערכת משוואות דיפרנציאליות כלשהי) תלויות לינארית בקטע מסוים אז על פי ההגדרה קיימים קבועים $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$ כך ש־

$$c_1 \begin{pmatrix} y_{1,1}(x) \\ \vdots \\ y_{1,n}(x) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} y_{2,1}(x) \\ \vdots \\ y_{2,n}(x) \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} y_{n,1}(x) \\ \vdots \\ y_{n,n}(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

לכל x בקטע. שוויון זה זהה ל־

$$\begin{pmatrix} y_{1,1}^{(}x) & y_{2,1}(x) & \cdots & y_{n,1}(x) \\ \vdots & & & \\ y_{n,n}(x) & y_{2,n}(x) & \cdots & y_{n,n}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

זו מערכת של n משוואות אלגבריות לינאריות הומוגניות ב־n נעלמים $c_1, \ldots, c_n$ ונתון כי יש לה פתרון לא טריויאלי $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$. כזכור מאלגברה לינארית, זה יתכן רק אם דטרמיננט המערכת הוא 0. במקרה שלנו הדטרמיננט הוא בדיוק הוורונסקיאן ובזה הראינו כי הוא מתאפס לכל x בקטע.

ב. עתה נניח בכיוון ההפוך כי $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ הם פתרונות המערכת (6.4), ובנקודה אחת x_0 של הקטע מתקיים

$$W\big(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\big)(x_0) = 0$$

נסתכל במערכת n המשוואות האלגבריות, לינאריות, הומוגניות ב־n נעלמים $c_1, \ldots, c_n$

$$\begin{aligned} c_1 y_{1,1}(x_0) + \cdots + c_n y_{n,1}(x_0) &= 0, \\ &\vdots \\ c_1 y_{1,n}(x_0) + \cdots + c_n y_{n,n}(x_0) &= 0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

דטרמיננט מערכת זו הוא בדיוק $W\big(\mathbf{y}_1(x_0), \ldots, \mathbf{y}_n(x_0)\big) = 0$ לכן למערכת יש פתרון לא טריויאלי $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$. עבור n קבועים אלה $c_1, \ldots, c_n$ נגדיר פונקציה וקטורית

$$\mathbf{U}(x) := c_1 \mathbf{y}_1(x) + \cdots + c_n \mathbf{y}_n(x).$$

בהיותו צרוף לינארי של פתרונות, גם $\mathbf{U}(x)$ הוא פתרון של אותה המערכת (6.4). יתר על כן, על פי בחירת $c_1, \ldots, c_n$ הפתרון $\mathbf{U}(x)$ מקיים בנקודה x_0 את n תנאי ההתחלה

$$\mathbf{U}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

מצד שני נסתכל בפונקציה הוקטורית הזהותית אפס,

$$\mathbf{V}(x) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

גם פונקציה זו היא כמובן פתרון של המערכת ההומוגנית (6.4) ואף היא מקיימת בנקודה x_0 את תנאי ההתחלה

$$\mathbf{V}(x_0) = \mathbf{0}.$$

מתברר לפיכך כי $\mathbf{U}(x), \mathbf{V}(x)$ הם שני פתרונות של אותה מערכת דיפרנציאלית אשר מקימים את אותם תנאי ההתחלה. לפי משפט הקיום והיחידות הם זהים בקטע הנדון:

$$\mathbf{U}(x) \equiv \mathbf{V}(x), \qquad x \in I.$$

במילים אחרות

$$c_1\mathbf{y}_1(x) + \cdots + c_n\mathbf{y}_n(x) \equiv \mathbf{0}, \qquad x \in I.$$

בזה הוכחנו את התלות הלינארית של הפתרונות $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ ב־I.

נעיר כי בעוד שכיוון א' נכון לפונקציות וקטוריות כלשהן, הרי בסעיף ב' הכרחי להניח כי הפונקציות הן פתרונות של מערכת המקיימת משפט קיום ויחידות. למשל עבור שתי הפונקציות הוקטוריות

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מתקבל $W\big(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\big) \equiv 0$ אך פונקציות אלה בלתי תלויות לינארית בכל קטע כי אין קבועים $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ כך ש־ $c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 \equiv 0$ בקטע כלשהו.

שני כווני ההוכחה שלמעלה מובילים יחדיו למסקנה חשובה. לפי חלק ב', התאפסות הורונסקיאן בנקודה אחת מבטיחה תלות לינארית של הפתרונות בכל הקטע הנדון, ועל פי חלק א', התלות הלינארית מבטיחה את התאפסות הורונסקיאן בכל הקטע I. מכאן נובעת הטענה כי בהנחות המשפט, אם ורונסקיאן הפתרונות $W\big(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\big)(x)$ של מערכת (6.4), מתאפס בנקודה אחת $x_0 \in I$ אז הוא מתאפס זהותית בכל הקטע I. $\square$

בזה סיימנו לאפיין את התלות הלינארית של פתרונות מערכת הומוגנית. אנו כמובן מתענינים במצב ההפוך, של פתרונות שהם בלתי תלויים לינארית.

עכשיו נעבור לשאלת הפרישה של מרחב הפתרונות.

משפט 6.6 (פתרונות פורשים) נתונה המערכת ההומוגנית (6.4) המקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות בקטע I ולה n פתרונות וקטוריים $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$. אם

$$W\big(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\big)(x_0) \neq 0$$

בנקודה אחת כלשהי $x_0 \in I$ אז $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ פורשים את מרחב הפתרונות של (6.4).

הוכחה. קבוצת פתרונות $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ פורשת את כל מרחב הפתרונות אם פתרון $\mathbf{u}(x)$ שנבחר באופן שרירותי ניתן להכתב בקטע $a \leq x \leq b$ כצרוף לינארי מהצורה

$$\mathbf{u}(x) \equiv c_1\mathbf{y}_1(x) + \cdots + c_n\mathbf{y}_n(x)$$

בעזרת קבועים $c_1, c_2, \ldots, c_n$ מתאימים. עלינו להוכיח כי קבועים $c_1, c_2, \ldots, c_n$ כאלה קיימים.

נקח את הנקודה x_0 בה $W\big(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\big)(x_0) \neq 0$. בנקודה זו הפתרון הנתון $\mathbf{u}(x)$ מקבל ערכי התחלה מסוימים, נאמר

$$\mathbf{u}(x_0) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

כדי שצרוף לינארי $c_1\mathbf{y}_2(x) + \cdots + c_n\mathbf{y}_n(x)$ ישווה זהותית לפתרון הנתון $\mathbf{u}(x)$, גם צרוף זה חייב לקיים בנקודת ההתחלה x_0 את אותם תנאי ההתחלה

$$c_1\mathbf{y}_1(x_0) + \cdots + c_n\mathbf{y}_n(x_0) = \mathbf{u}(x_0),$$

או בכתיב של רכיבים,

$$\begin{aligned} c_1 y_{1,1}(x_0) + \cdots + c_n y_{n,1}(x_0) &= \beta_1, \\ &\vdots \\ c_1 y_{1,n}(x_0) + \cdots + c_n y_{n,n}(x_0) &= \beta_n, \end{aligned}$$

נתבונן במשוואות אלה כמערכת של n משוואות אלגבריות לינאריות, בלתי הומוגניות ב־n הנעלמים $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$. דטרמיננט המערכת הוא $W\big(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\big)(x_0) \neq 0$ לכן יש למערכת פתרון יחיד $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$. עבור קבועים אלה, $c_1, \ldots, c_n$, נתבונן בצרוף הלינארי $c_1\mathbf{y}_1(x) + \cdots + c_n\mathbf{y}_n(x)$, שגם הוא פתרון של המערכת הנדונה. על פי הבניה, הפתרון שבנינו והפתרון הנתון $\mathbf{u}(x)$ באמת מקבלים בנקודה $x = x_0$ את אותם תנאי התחלה, לכן לפי משפט הקיום והיחידות הם זהים בכל קטע קיומם:

$$\mathbf{u}(x) \equiv c_1\mathbf{y}_1(x) + \cdots + c_n\mathbf{y}_n(x), \qquad a \leq y \leq b.$$

הצלחנו לכתוב פתרון כלשהו $\mathbf{u}(x)$ בעזרת הפתרונות $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ ובזה הוכחנו כי $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ אכן פורשים את כל מרחב הפתרונות. $\square$

נוכחנו בחשיבות הפתרונות שהוורונסקיאן שלהם לא מתאפס בנקודה אחת. האם באמת קיימת קבוצת פתרונות שהוורונסקיאן שלהם שונה מ־0 בנקודה נתונה? התשובה לכך חיובית. נגדיר למשל n פתרונות $\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ למערכת (6.4) באמצעות n וקטורי התחלה הנתונים על ידי הבסיס הסטנדרטי $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$,

$$\mathbf{y}_1(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}_2(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots \ , \quad \mathbf{y}_n(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

קיומו של כל אחד מפתרונות אלה מובטח על ידי משפט הקיום והיחידות, גם אם אין אנו יודעים לרשום אותו במפורש. עבור n פתרונות אלה ערך הוורונסקיאן בנקודה x_0 שונה מ־0, לכן הם מקיימים את הנחות שני המשפטים האחרונים. ברור כי באופן דומה ניתן להגדיר בסיסים אחרים לאותו מרחב פתרונות.

בזה סיימנו לבנות בסיס למרחב הפתרונות. נוכל לסכם ולומר:

משפט 6.7 אם מערכת המשוואות הדיפרנציאליות הלינאריות, ההומוגניות (6.4) מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות בקטע I, (דהיינו כל המקדמים רציפים בקטע זה), אז אוסף הפתרונות של המערכת בקטע הוא מרחב לינארי n־ממדי.
n פתרונות $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ מהווים בסיס למרחב הפתרונות אם ורק אם הוורונסקיאן $W\big(\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)\big)$ שונה מ־0 בנקודה אחת x_0 של הקטע I (ובאופן שקול, שונה מ־0 בכל נקודות הקטע).

הנוסחה הבאה אנלוגית לנוסחת Abel לורונסקיאנים של משוואות סקלריות. טענה זו הוכחה על ידי ליוביל (Liouville).[1]

משפט 6.8 נתונה מערכת המשוואות הדיפרנציאליות, לינאריות, הומוגניות $\mathbf{y}'(x) = P(x)\mathbf{y}(x)$ עם מקדמים רציפים $p_{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$ בקטע I (ומקיימת על כן את תנאי משפט הקיום והיחידות) ונתונה נקודה x_0 בקטע. אם $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ הם n פתרונות כלשהם של המערכת, אז הוורונסקיאן שלהם מקיים

$$W(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)(x) = W(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^{x} \operatorname{trace}(P(t))\ dt\right).$$

כאן $\operatorname{trace}(P(x)) = p_{11}(x) + \cdots + p_{nn}(x)$ הוא העקבה של המטריצה $P(x)$.

[1] Joseph Liouville, 1809-1882

הוכחה. נתחיל עם הנוסחה לנגזרת של דטרמיננט במשפט 4.9,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\det\left(a_{ij}(x)\right) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1,\sigma_1}\cdot a_{2,\sigma_2}\cdots a'_{k,\sigma_k}\cdots a_{n,\sigma_n}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a'_{k,1} & a'_{k,2} & \dots & a'_{k,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

בגזירת הוורונסקיאן $W(x)=\begin{vmatrix} y_{1,1} & y_{2,1} & \cdots & y_{n,1}\\ \vdots & & & \vdots\\ y_{1,n} & y_{2,n} & \cdots & y_{n,n}\end{vmatrix}$ נקבל

$$\frac{d}{dx}W(x)=\begin{vmatrix} \frac{d}{dx}y_{1,1} & \frac{d}{dx}y_{2,1} & \cdots & \frac{d}{dx}y_{n,1}\\ y_{1,2} & y_{2,2} & \cdots & y_{n,2}\\ \vdots & & & \vdots\\ y_{1,n} & y_{2,n} & \cdots & y_{n,n}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_{1,1} & y_{2,1} & \cdots & y_{n,1}\\ \frac{d}{dx}y_{1,2} & \frac{d}{dx}y_{2,2} & \cdots & \frac{d}{dx}y_{n,2}\\ \vdots & & & \vdots\\ y_{1,n} & y_{2,n} & \cdots & y_{n,n}\end{vmatrix}$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix} y_{1,1} & y_{2,1} & \cdots & y_{n,1}\\ y_{1,2} & y_{2,2} & \cdots & y_{n,2}\\ \vdots & & & \vdots\\ \frac{d}{dx}y_{1,n} & \frac{d}{dx}y_{2,n} & \cdots & \frac{d}{dx}y_{n,n}\end{vmatrix}.$$

נתחיל לטפל במחובר הראשון בסכום שבאגף ימין. על פי המשוואה הראשונה במערכת (6.4) הרכיב הראשון של הפתרון $\mathbf{y}_k$ מקיים

$$\frac{d}{dx}y_{k,1}=\sum_{j=1}^{n}p_{1j}\,y_{k,j}=p_{11}\,y_{k,1}+\sum_{j=2}^{n}p_{1j}\,y_{k,j}.$$

נציב זאת בשורה הראשונה של הדטרמיננט הראשון עבור $k=1,\dots,n$ ונקבל

$$\begin{vmatrix} p_{11}\,y_{1,1}+\sum_{j=2}^{n}p_{1j}\,y_{1,j} & p_{11}\,y_{2,1}+\sum_{j=2}^{n}p_{1j}\,y_{2,j} & \cdots & p_{11}\,y_{n,1}+\sum_{j=2}^{n}p_{1j}\,y_{n,j}\\ y_{1,2} & y_{2,2} & \cdots & y_{n,2}\\ \vdots & & & \vdots\\ y_{1,n} & y_{2,n} & \cdots & y_{n,n}\end{vmatrix}$$

ערך דטרמיננט זה נשמר כאשר מהשורה הראשונה מחסירים p_{12} פעמים את השורה השניה, p_{13} פעמים את השורה השלישית, וכך הלאה. לאחר פעולות אלה יישאר רק

$$\begin{vmatrix} p_{11}\,y_{1,1} & p_{11}\,y_{2,1} & \cdots & p_{11}\,y_{n,1} \\ y_{1,2} & y_{2,2} & \cdots & y_{n,2} \\ \vdots & & & \vdots \\ y_{1,n} & y_{2,n} & \cdots & y_{n,n} \end{vmatrix}$$

אך זהו בדיוק $p_{11}W(x)$. באופן דומה נקבל כי המחוברים הבאים באגף ימין של הנגזרת הם $p_{22}W(x),\ldots,p_{nn}W(x)$ בהתאמה ו־

$$\frac{d}{dx}W(x) = (p_{11}+p_{22}+\cdots+p_{nn})W(x) = \mathrm{trace}(P(x))W(x).$$

זו משוואה מסדר ראשון עבור $W(x)$ ואינטגרציה של $W'/W = \mathrm{trace}(P)$ מ־x_0 עד x מובילה לנוסחה המבוקשת.

נציין כי הנוסחה תקפה (אך טריוויאלית) גם עבור פתרונות תלויים לינארית. □

6.3 מערכת מטריצית ומטריצה יסודית

יהיו $\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n$ פתרונות וקטוריים כלשהם של המערכת ההומוגנית (6.4) בקטע מסוים:

$$\mathbf{y}_k{}' = P(x)\mathbf{y}_k, \qquad k=1,\ldots,n.$$

נרשום את n וקטורי עמוד אלה זה לצד זה ונגדיר מטריצה $n\times n$

$$Y(x) = \Big(\mathbf{y}_1(x) \,\vdots\, \mathbf{y}_2(x) \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{y}_n(x)\Big)$$

נגזור מטריצה זו:

$$\begin{aligned} Y'(x) &= \Big(\mathbf{y}_1{}' \,\vdots\, \mathbf{y}_2{}' \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{y}_n{}'\Big) \\ &= \Big(P(x)\mathbf{y}_1 \,\vdots\, P(x)\mathbf{y}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, P(x)\mathbf{y}_n\Big) \\ &= P(x)\Big(\mathbf{y}_1 \,\vdots\, \mathbf{y}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{y}_n\Big) = P(x)Y(x). \end{aligned}$$

קבלנו משוואה דיפרנציאלית מטריצית

$$Y'(x) = P(x)Y(x) \tag{6.7}$$

נמנה כאן אחדות מתכונותיו:

א. אם מערכת המשוואות הדיפרנציאליות הוקטוריות (6.4) מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות בקטע I, אז גם לבעיית ההתחלה המטריצית

$$Y'(x) = P(x)Y(x), \qquad Y(x_0) = Y_0, \tag{6.8}$$

יש פתרון המוגדר בקטע I והוא יחיד. כי בעיית ההתחלה המטריצית מורכבת מ־n בעיות התחלה וקטוריות.

ב. הדטרמיננט של פתרון מטריצי $Y(x)$ הוא בדיוק הורונסקיאן של עמודותיו,

$$\det Y(x) = \det\Big(\mathbf{y}_1 \vdots\ \mathbf{y}_2 \vdots\ \cdots\ \vdots\ \mathbf{y}_n\Big) = W\big(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2,\ \cdots,\ \mathbf{y}_n\big).$$

ג. מתכונות הוורונסקיאן נובע כי אם הפתרון $Y(x)$ היא מטריצה הפיכה עבור $x = x_0$ מסוים, אז היא הפיכה לכל x בקטע הנדון.

ד. נוסחת ליוביל (משפט 6.8) הופכת כאן ל־

$$\det Y(x) = \det Y(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^{x} \operatorname{trace}\left(P(t)\right)\, dt\right). \tag{6.9}$$

הגדרה 6.9 פתרון של המשוואה הדיפרנציאלית המטריצית (6.7) נקרא **מטריצה יסודית** (fundamental matrix) (או פתרון יסודי) אם הוא מטריצה הפיכה לכל x, או באופן שקול, אם עמודותיו הן n פתרונות בלתי תלויים של המערכת (6.4) בקטע המתאים.

משפט 6.10 אם $Y(x)$ היא מטריצה יסודית, אז ניתן להציג כל פתרון של (6.7) בצורה $Y(x)C$, כאשר C מטריצה קבועה מתאימה.

הפתרון של (6.7) המקיים את תנאי ההתחלה $V(x_0) = C$ הוא $V(x) = Y(x)Y^{-1}(x_0)C$.

הוכחה. אם $Y(x)$ מקיים $Y' = P(x)Y$ אז

$$(Y(x)C)' = Y'(x)C = (P(x)Y)C = P(x)(YC)$$

כלומר גם $Y(x)C$ פתרון של (6.7).

ולהפך, נראה כי כל פתרון נתון $V(x)$ של (6.7) אפשר לכתוב בצורה $V(x) = Y(x)C$ בעזרת C מתאים. כדי לאמת ששני פתרונות $V(x)$ לבין $V(x) = Y(x)C$ שווים מספיק להראות, הודות למשפט קיום והיחידות, כי שניהם מקיימים את אותם תנאי התחלה בנקודה מסוימת x_0, ז"א, $V(x_0) = Y(x_0)C$. זה קורה כשבוחרים $C = Y^{-1}(x_0)V(x_0)$ ואזי

$$V(x) = Y(x)C = Y(x)Y^{-1}(x_0)V(x_0). \qquad \square$$

מטריצה יסודית יעילה להצגת הפתרון הכללי ופתרון בעיות התחלה של המשוואה הוקטורית (6.4). כזכור, כל פתרון וקטורי ניתן להכתב כקומבינציה של n פתרונות בלתי תלויים, לכן

$$\mathbf{y}(x) = c_1\mathbf{y}_1(x) + \cdots + c_n\mathbf{y}_n(x) = \Big(\mathbf{y}_1 \vdots\ \mathbf{y}_2 \vdots\ \ldots\ \vdots\ \mathbf{y}_n\Big)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = Y(x)\mathbf{c}.$$

זה ייצוג של פתרון של מערכת לינארית בעזרת מטריצה יסודית.

בפרט, פתרון שערכו ההתחלי הוא $\mathbf{y}(x_0)$ חייב לקיים $\mathbf{y}(x_0) = Y(x_0)\mathbf{c}$, דהיינו $\mathbf{c} = Y^{-1}(x_0)\,\mathbf{y}(x_0)$. לכן

$$\mathbf{y}(x) = Y(x)Y^{-1}(x_0)\,\mathbf{y}(x_0). \tag{6.10}$$

נסמן

$$\Phi(x, x_0) \stackrel{\text{def}}{\equiv} Y(x)Y^{-1}(x_0).$$

$\Phi(x, x_0)$ היא המטריצה היסודית המקיימת את תנאי התחלה $\Phi(x_0, x_0) = I$. היא בלתי תלויה בבחירת $Y(x)$ ואינה משתנה כשמחליפים את $Y(x)$ ב־$Y(x)C$. נוסחה (6.10) מתארת את השתנות הפתרון מנקודת ההתחלה x_0 והערך ההתחלי $\mathbf{y}(x_0)$ אל הנקודה x. בגלל תכונה זו $\Phi(x, x_0)$ נקראת **מטריצת מעבר** (transfer matrix, transition matrix).

משפט 6.11 מטריצת המעבר $\Phi(x, t) = Y(x)Y^{-1}(t)$ מקיימת לכל $t, s \in I$,

$$\Phi(x, t) = \Phi(x, s)\Phi(s, t).$$

הוכחה. כפונקציה של x אגף ימין היא מטריצה מהצורה $\Phi(x, s)C$ ולפי משפט 6.10 מכפלה זו היא פתרון של (6.7), כמו גם אגף שמאל של אותה משוואה. מספיק להראות כי עבור הנקודה $x = s$ ערכיהם שוים. ובאמת, אגף ימין יהיה $\Phi(s, s)\Phi(s, t) = \Phi(s, t)$ כי $\Phi(s, s) = I$, וזה גם ערכו של אגף שמאל. לכן שני האגפים זהים לכל $x \in I$. □

תרגיל 6.2 הוכח כי $\big(\Phi(x, t)\big)^{-1} = \Phi(t, x)$.

דוגמא 6.3 תהי $Y(x)$ מטריצה יסודית למערכת $Y' = P(x)Y$. איזו משוואה דיפרנציאלית מקיימת המטריצה ההפוכה $Y^{-1}(x)$?

נגזור את המכפלה $Y^{-1}(x)Y(x) \equiv I$ ונקבל $\big(Y^{-1}\big)'Y + Y^{-1}Y' = 0$. מכאן

$$\big(Y^{-1}\big)' = -Y^{-1}Y'\,Y^{-1} = -Y^{-1}P(x).$$

לאחר שחלוף שורות בעמודות (transposed) מתקבל

$$\Big(\big(Y^T\big)^{-1}\Big)' = -P^T(x)\,\big(Y^T\big)^{-1}.$$

כשהמערכת הדיפרנציאלית מרוכבת, נהוג לעבור למטריצה משוחלפת צמודה (conjugate transposed) (בה $A = (a_{ij})$ מוחלף ב־$A^* = (\overline{a_{ji}})$) ומקבלים

$$\Big(\big(Y^*\big)^{-1}\Big)' = -P^*(x)\,\big(Y^*\big)^{-1}.$$

לפיכך $\big(Y^*\big)^{-1}$ היא מטריצה יסודית למערכת

$$Z' = -P^*(x)\,Z. \tag{6.11}$$

מערכת זו נקראת המערכת הצמודה (adjoint) למערכת $Y' = P(x)Y$. □

דוגמא 6.4 לפי ההגדרה $\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,t) = P(x)\Phi(x,t)$. ומהי הנגזרת לפי t, $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t)$?

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\big(\Phi(t,x)\big)^{-1} = -\big(\Phi(t,x)\big)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,x)\big(\Phi(t,x)\big)^{-1}\\ &= -\Phi(x,t)\cdot P(t)\Phi(t,x)\cdot\big(\Phi(t,x)\big)^{-1} = -\Phi(x,t)P(t)\end{aligned}$$

תרגיל 6.5 אם $z(x)$, $y(x)$ הם בהתאמה פתרונות של המערכת $y' = P(x)y$ ושל המערכת הצמודה $z' = -P^*(x)\,z$, אז $y^*(x)z(x) \equiv \text{const}$.

בפרקים הבאים נפגוש בשימושים רבים של מטריצה יסודית.

6.4 מערכות עם מקדמים קבועים

יש מעט מערכות שאותם אנו יודעים לפתור באופן מפורש. בסעיף זה נדון במערכות עם מקדמים קבועים, שצורתן

$$\mathbf{y}'(x) = A\mathbf{y}(x), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{6.12}$$

כאשר $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ היא מטריצה $n\times n$ של קבועים. מטרתנו היא למצוא את כל פתרונות המערכת.

למשוואה לינארית מסדר כלשהו עם מקדמים קבועים חפשנו פתרונות מהצורה $e^{\lambda x}$ בה λ מספר קבוע בלתי ידוע, וצורת הפתרון כללי היא, בדרך כלל, $\sum c_i e^{\lambda_i x}$. גם כאן נעשה נסיון דומה, אך הפעם עם קבועים שהם וקטורים. נחפש למערכת (6.12) פתרונות מהצורה

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{v}e^{\lambda x}$$

כאשר $\mathbf{v}, \lambda$ בלתי ידועים בינתיים ו־$\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. נגזור פתרון משוער זה, נציב אותו במערכת (6.12) ונקבל

$$\mathbf{v}\lambda e^{\lambda x} = A\mathbf{v}e^{\lambda x}.$$

צמצום בסקלר $e^{\lambda x} \neq 0$ מוביל לשוויון $A\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ אשר שקול ל־

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

זו בדיוק הגדרת ערך עצמי ווקטור עצמי, לכן $\mathbf{y}(x) = \mathbf{v}e^{\lambda x}$ הוא פתרון כאשר λ הוא ערך עצמי של המטריצה A ו־$\mathbf{v}$ הוא וקטור עצמי המתאים לו. יש לזכור כי כל כפולה של וקטור עצמי גם היא וקטור עצמי.

תרגיל 6.6 לפי דוגמא 6.1, משוואה לינארית עם מקדמים קבועים

$$y^{(n)} + c_1 y^{(n-1)} + \ \cdots\ + c_{n-1}y' + c_n y = 0$$

הופכת על ידי ההצבה $v_1 = y,\ v_2 = y',\ \ldots,\ v_n = y^{(n-1)}$ למערכת $\mathbf{v}\,' = A\mathbf{v}$ עם

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -p_n & -p_{n-1} & \cdots & & -p_1 \end{pmatrix}.$$

הראה כי הפולינום האופייני $P(r) = r^n + c_1 r^{n-1} + \cdots + c_{n-1} r + c_n$ של המשוואה מסדר n והפולינום האופייני $\det(A - rI)$ של המטריצה A זהים. $\square$

למטריצה A יש n ערכים עצמיים $\lambda_1,\ \ldots\ ,\ \lambda_n$ שונים או מתלכדים, ממשיים או מרוכבים. האם ובאיזה תנאים קיים בסיס של n פתרונות מהצורה

$$\mathbf{y}_1(x) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 x},\quad \ldots\ ,\quad \mathbf{y}_n(x) = \mathbf{v}_n e^{\lambda_n x}\ ?$$

המשפט הבא עונה על שאלה זו ומראה כי התשובה תלויה בקיומם של n וקטורים עצמיים בלתי תלויים.

משפט 6.12 למערכת דיפרנציאלית (6.12) עם מקדמים קבועים יש בסיס של n פתרונות מהצורה

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 x},\ \ldots\ ,\ \mathbf{v}_n e^{\lambda_n x} \tag{6.13}$$

אם ורק אם למטריצת המקדמים A יש n וקטורים עצמיים בלתי תלויים $\mathbf{v}_1,\ \ldots\ ,\ \mathbf{v}_n$.

הוכחה. נניח כי לערכים העצמיים $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ של A מתאימים n וקטורים עצמיים $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. כדי לבדוק האם

$$\mathbf{y}_1(x) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 x},\ \ldots\ ,\ \mathbf{y}_n(t) = \mathbf{v}_n e^{\lambda_n x}$$

הם פתרונות וקטוריים בלתי תלויים לינארית, נחשב את הוורונסקיאן שלהם

$$W(\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)) = \det\left(e^{\lambda_1 x}\mathbf{v}_1 \,\vdots\, e^{\lambda_2 x}\mathbf{v}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, e^{\lambda_n x}\mathbf{v}_n \right),$$

בה כל עמודה מורכבת מאחד הפתרונות הוקטוריים. נוציא מכל עמודה ועמודה את הגורמים המשותפים $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ בהתאמה ונקבל

$$= e^{(\lambda_1 + \cdots \lambda_n)x} \det\left(\mathbf{v}_1 \,\vdots\, \mathbf{v}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{v}_n \right).$$

שוויון זה הוא מקרה פרטי של נוסחת Abel, $W(x) = W(0)\exp\left(\int_0^x \operatorname{trace}(A)\,dt\right)$, כי כידוע, $\operatorname{trace}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

ברור כי $e^{(\lambda_1+\cdots\lambda_n)x} \neq 0$. קבלנו אם כן כי הורונסקיאן $W(\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n)$ שונה מאפס בדיוק כאשר הדטרמיננט המורכב מ־n הוקטורים העצמיים שונה מאפס, זאת אומרת אם ורק אם אלה n וקטורים עצמיים בלתי תלויים.

המקרה בו ל־A יש פחות מ־n וקטורים עצמיים בלתי תלויים יטופל בהמשך בצורה אחרת.
□

דוגמא 6.7 למערכת $\mathbf{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{y}$ יש ערכים עצמיים $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1$ ולהם הוקטורים העצמיים $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ בהתאמה. לכן הפתרון הכללי הוא

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-x}$$

והמטריצה היסודית המתאימה היא

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 2e^{3x} & -2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

כדי לפתור בעיית התחלה, כגון $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, נדרוש $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ונפתור את מערכת שתי משוואות אלה עבור הנעלמים c_1, c_2. □

דוגמא 6.8 (משוואת Bateman) בסעיף 1.2 הצגנו את ההתפרקות של חומר רדיואקטיבי על ידי המשוואה הדיפרנציאלית $y'(t) = -ky$. זהו רק צעד ראשון, כי בטבע מתרחשת בדרך כלל שרשרת של התפרקויות עוקבות בו יסוד אחד מתפרק לשני, השני לשלישי וכולי,

$$X_1 \to X_2 \to \ \cdots \ \to X_i \to \ \cdots \ \to X_n.$$

לשם פשטות נסתכל רק בשרשרת ללא התפצלויות. אם $x_i(t)$ מייצג את כמות היסוד מספר i בזמן t ו־k_i הוא קבוע הפרוק שלו, אז שרשרת הפרוק והיצירה מתוארת על ידי המשוואות הדיפרנציאליות

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -k_1 x_1, \\ x_2'(t) &= \quad k_1 x_1 \ - \ k_2 x_2, \\ &\ \ \vdots \\ x_n'(t) &= \quad k_{n-1} x_{n-1} \ - \ k_n x_n. \end{aligned} \tag{6.14}$$

אם השרשרת מסתימת ביסוד יציב שאינו מתפרק יותר, כגון שרשרת האורניום המסתימת בעופרת, אפשר להוסיף עוד משוואה דיפרנציאלית אחרונה

$$x_{n+1}'(t) = k_n x_n.$$

בכתיב מטריצי המערכת (6.14) נכתבת כ־

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & k_2 & -k_3 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n-1} & -k_n \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

בהתאם למציאות בטבע ניתן להניח שקבועי הפרוק k_i שונים זה מזה ולכן הערכים העצמיים של המטריצה שונים זה מזה. $\square$

דוגמא 6.9 כאשר למטריצה A יש ערכים עצמיים מרוכבים, המצב אינו שונה באופן מהותי אך החשוב הטכני מסובך יותר. נניח כי למטריצה A יש ערך עצמי מרוכב λ ומתאים לו וקטור עצמי (מרוכב, כמובן) $\mathbf{v}$, כך ש־$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. מכיון ש־$A$ ממשית, הצמוד המרוכב של ביטוי זה הוא

$$A\overline{\mathbf{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{v}}.$$

(כאן $\overline{}$ מסמן צמוד מרוכב). לכן גם $\overline{\lambda}$ הוא ערך עצמי ומתאים לו וקטור עצמי מרוכב $\overline{\mathbf{v}}$. בזה קבלנו למערכת הדיפרנציאלית שני פתרונות וקטוריים מרוכבים צמודים

$$e^{\lambda x}\mathbf{v}, \quad e^{\overline{\lambda} x}\,\overline{\mathbf{v}}$$

ומהם אפשר לקבל שני פתרונות ממשיים

$$\frac{1}{2}\left(e^{\lambda x}\mathbf{v} + e^{\overline{\lambda} x}\,\overline{\mathbf{v}}\right) = \mathrm{Re}\left\{e^{\lambda x}\mathbf{v}\right\}, \qquad \frac{1}{2i}\left(e^{\lambda x}\mathbf{v} - e^{\overline{\lambda} x}\,\overline{\mathbf{v}}\right) = \mathrm{Im}\left\{e^{\lambda x}\mathbf{v}\right\}.$$

למשל, למערכת $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{y}$ ערכים עצמיים $1 \pm 2i$. נחפש וקטור עצמי המתאים ל־$\lambda_1 = 1 + 2i$:

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 - (1+2i) & -2 \\ 4 & -1 - (1+2i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

כלומר

$$\begin{aligned} (2-2i)\alpha - 2\beta &= 0, \\ 4\alpha - (2+2i)\beta &= 0. \end{aligned}$$

לפי הגדרת ערכים עצמיים ברור כי משוואות אלה תלויות, אף כי אין זה בולט לעין. למעשה המשוואה השניה מתקבלת מהמשוואה הראשונה על ידי כפל ב־$(1+i)$. נבחר למשל $\alpha = 1,\ \beta = 1 - i$ ונקבל פתרון מרוכב

$$\begin{aligned} e^{(1+2i)x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} &= e^x(\cos 2x + i\sin 2x)\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} \\ &= e^x\left[\begin{pmatrix} \cos 2x \\ \cos 2x + \sin 2x \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin 2x \\ -\cos 2x + \sin 2x \end{pmatrix}\right]. \end{aligned}$$

גם הצמוד המרוכב של פתרון זה הוא פתרון נוסף לאותה מערכת דיפרנציאלית. על ידי חבור וחסור שלהם נקבל שני פתרונות ממשיים

$$\mathbf{y}^{(1)}(x) = e^x \begin{pmatrix} \cos 2x \\ \cos 2x + \sin 2x \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}^{(2)}(x) = e^x \begin{pmatrix} \sin 2x \\ \sin 2x - \cos 2x \end{pmatrix}.$$

בחירה אחרת של הפרמטרים, למשל $\alpha = 1 + i, \beta = 2$, תביא אותנו לזוג פתרונות אחר שהקשר בינם לבין הפתרונות שלמעלה אינו שקוף ממבט ראשון. □

עד כאן טיפלנו במקרים בהם למטריצה יש אוסף מלא של וקטורים עצמיים בלתי תלויים. נזכיר מתי זה קורה. כידוע, לערכים עצמיים שונים מתאימים וקטורים עצמיים בלתי תלויים. אולם כאשר ערכים עצמיים מתלכדים (הם בעלי ריבוי אלגברי גדול מ־1), מספר הוקטורים העצמיים הבלתי תלויים המתאימים (הריבוי הגיאומטרי) עשוי להיות קטן מהריבוי האלגברי. אז יתכן כי ל־n הערכים העצמיים יתאימו פחות מ־n וקטורים עצמיים בלתי תלויים. לכן מצאנו למעלה את צורת פתרונות הבסיס למערכת דיפרנציאלית רק במקרה בו למטריצה הקבועה A יש n וקטורים עצמיים בלתי תלויים.

לשם השלמות נצטט תוצאה ידועה מאלגברה לינארית.

משפט 6.13 תהי A מטריצה $n \times n$. התנאים הבאים שקולים זה לזה:

א. למטריצה A יש n וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית.

ב. הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגיאומטרי שלו.

ג. המטריצה A ניתנת ללכסון, $T^{-1}AT = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n\}$.

נעיר כי עמודות המטריצה המלכסנת T הן בדיוק n הוקטורים העצמיים הבלתי תלויים של A.

6.5 אקספוננציאל של מטריצה

כדי למצוא פתרון מפורש לכל מערכת וקטורית $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, גם מערכת לה אין די וקטורים עצמיים בלתי תלויים, נעזר במערכת מטריצית מתאימה)פרק 6.3(. למציאת מטריצה יסודית נשתמש בשקול האינטואיטיבי הבא: למשוואה הסקלרית $y' = ay$, בה a קבוע, יש פתרון $y(x) = \exp(ax)$. לכן ננסה למצוא גם למשוואה המטריצית $Y' = AY$, בה A מטריצה קבועה, "פתרון דומה" $Y(x) = \exp(xA)$, כאשר אקספוננציאל של מטריצה יוגדר בעזרת טור חזקות באופן אנלוגי לפונקציה הסקלרית.

משפט 6.14 טור המטריצות האינסופי

$$U(x) = I + xA + \frac{x^2}{2!}A^2 + \ \cdots \ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}A^k \tag{6.15}$$

מתכנס לכל x והוא פתרון של בעיית ההתחלה

$$Y'(x) = AY, \qquad Y(0) = I.$$

סכום טור זה הוא מטריצה יסודית של המערכת (6.12) והוא ייקרא בשם $\exp(xA)$.

הוכחה. טור המטריצות שרשמנו אינו אלה אוסף של n^2 טורים סקלריים של אברי המטריצות

$$\Big(U(x)\Big)_{i,j} = I_{i,j} + xA_{i,j} + \frac{x^2}{2!}\Big(A^2\Big)_{i,j} + \cdots, \qquad i,j = 1,\ldots,n\ . \tag{6.16}$$

עלינו להוכיח את התכנסות טורים סקלריים אלה. לשם כך נגדיר:

הגדרה 6.15 פונקציה $||\ .\ ||: R^{n\times n} \to R^+$ נקראת נורמה מטריצית אם היא מקיימת

1. $||A|| \geq 0$ ושוויון אך ורק כאשר $A \equiv 0$.
2. $||\alpha A|| = |\alpha|\,||A||$ לכל סקלר α.
3. $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$.
4. $||AB|| \leq ||A||\cdot||B||$.

אפשר להוכיח כי לכל נורמה וקטורית $||\ ||$ מתאימה נורמה מטריצית המוגדרת על ידי $||A|| = \sup_{\mathbf{v}\neq\mathbf{0}} ||A\mathbf{v}||/||\mathbf{v}||$. נורמה כזו נקראת נורמה פושרית. נזכיר שתי נורמות מוכרות:

$$||A||_1 := \max_{1\leq\ell\leq n}\sum_{k=1}^{n}|a_{k,\ell}|, \qquad ||A||_\infty := \max_{1\leq k\leq n}\sum_{\ell=1}^{n}|a_{k,\ell}|,$$

אך אנו נסתפק בנורמה מטריצית פשוטה מאד,

$$||A|| = \sum_{i,j}|a_{ij}|.$$

ברור כי תכונות 2,1 ו־3 מתקיימות ונותר לאמת רק את תכונה 4. ובאמת

$$||AB|| = \sum_{i,j}\big|(AB)_{ij}\big| = \sum_{i,j}\left|\sum_k A_{ik}B_{kj}\right| \leq \sum_{i,j,k}\big|A_{ik}B_{kj}\big|$$

בסכום האחרון יש n^3 מחוברים חיוביים והוא קטן בברור מהמכפלה

$$||A||\cdot||B|| = \big(\sum_{i,j}|A_{ik}|\big)\cdot\big(\sum_{\ell,j}|B_{\ell j}|\big)$$

בה יש n^4 מחוברים חיוביים, לכן תכונה 4 מתקיימת. נשים לב כי עבור הנורמה שלנו $||A|| \geq |a_{\ell k}|$ לכל ℓ, k. נעיר גם כי $||I|| = n$, לכן אין זו נורמה מושרית.

נעריך מחובר אופייני של הטור (6.16): אם x מוגבל לקטע $|x| \leq R$ אז

$$\left|\frac{x^k}{k!}\Big(A^k\Big)_{i,j}\right| \ \leq\ \frac{R^k}{k!}||A^k|| \ \leq\ \frac{R^k||A||^k}{k!}$$

לכן לכל אחד מ־ n^2 מטורי החזקות $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\Big(A^k\Big)_{i,j}$ יש טור מיורנטי של קבועים $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R^k||A||^k}{k!}$. זהו טור מתכנס (טור אקספוננציאלי) לכן לפי משפט ויירשטראס כל אחד

מטורי החזקות ב־ (6.16) מתכנס במידה שווה בקטע $[-R,R]$ לכל R. בזה הוכחנו כי טור החזקות המטריצי (6.15) מתכנס לכל x. טור חזקות מתכנס אפשר לגזור אבר־אבר לכן

$$\frac{d}{dx}U(x)=\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}A^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1}=A\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{x^\ell}{\ell!}A^\ell=AU.$$

כמו כן, $U(0)=I$. לכן זו מטריצה יסודית של המערכת (6.12) והיא מטריצה הפיכה לכל ערך של x. מכאן ואילך נסמן

$$\exp(xA)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}A^k. \qquad \square$$

גישה אחרת המובילה אותנו באופן טבעי להגדרת אקספוננציאל של מטריצה היא שיטת האיטרציות העוקבות, המשמשת להוכחת משפט הקיום והיחידות. כדי לפתור את בעיית ההתחלה $\mathbf{y}'=A\mathbf{y},\ \ \mathbf{y}(0)=\mathbf{y_0}$ נגדיר את הקרוב הראשון $\mathbf{y_0}(x)\equiv\mathbf{y_0}$ ואחריו סדרת איטרציות

$$\mathbf{y}_k(x)=\mathbf{y}_0+\int_0^x A\mathbf{y}_{k-1}(s)\,ds,\quad k=1,2,\ldots.$$

נקבל

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_1(x)&=\mathbf{y}_0+\int_0^x A\mathbf{y}_0\,ds=(I+Ax)\,\mathbf{y}_0,\\ \mathbf{y}_2(x)&=\mathbf{y}_0+\int_0^x A(I+As)\mathbf{y}_0\,ds=\left(I+Ax+A^2\,\frac{x^2}{2}\right)\mathbf{y}_0,\end{aligned}$$

ולאחר k איטרציות,

$$\mathbf{y}_k(x)=\left(I+Ax+A^2\,\frac{x^2}{2}+\cdots+A^k\,\frac{x^k}{k!}\right)\mathbf{y}_0.$$

(הוכח!) כאשר $k\to\infty$, טור המטריצות מתכנס ואנו מקבלים את $\mathbf{y}(x)=\exp(xA)\mathbf{y}_0$ כפתרון בעיית ההתחלה.

משפט 6.16 האקספוננציאל המטריצי מקיים את התכונות הבאות:

1. $\exp(x_1A)\exp(x_2A)=\exp((x_1+x_2)A)$.
2. $(\exp(xA))^{-1}=\exp(-xA)$.
3. בדרך כלל $\exp(x(A+B))\neq\exp(xA)\exp(xB)$, אלא אם כן $AB=BA$.
4. למערכת $\mathbf{y}'=A\mathbf{y}$ יש מטריצת העתקה $\Phi(x,t)=\exp((x-t)A)$.
5. פתרון בעיית ההתחלה המטריצית $Y'=AY$, $Y(0)=C$, הוא $Y(x)=\exp(xA)C$.
   פתרון בעיית ההתחלה הוקטורית $\mathbf{y}'=A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0)=\mathbf{c}$, הוא $\mathbf{y}(x)=\exp(xA)\mathbf{c}$.

הוכחה. להוכחת סעיף 1 נתבונן בבעיית ההתחלה

$$Y' = AY, \qquad Y(0) = \exp(x_2 A).$$

הביטוי $U(x) = \exp(xA)\exp(x_2 A)$ הוא פתרון בעיית ההתחלה, כי הוא בנוי ממטריצה יסודית הכפולה מימין במטריצה קבועה ומקיים את תנאי ההתחלה עבור $x = 0$. מצד שני נסתכל גם בביטוי $V(x) = \exp((x + x_2)A)$. גזירה ישירה מראה כי גם $V(x)$ פתרון של אותה מערכת וכמובן שהוא מקיים את אותו תנאי ההתחלה. הודות למשפט הקיום והיחידות שני פתרונות אלה זהים, כדרוש. דרך אחרת להוכחת סעיף 1 היא על ידי כפל ישיר של שני טורי החזקות. סעיף 2 מתקבל על ידי בחירת $x_1 = x,\ x_2 = -x$.

סעיף 3 נובע מפיתוח טורי החזקות. באגף שמאל

$$\begin{aligned}\exp(x(A+B)) &= I + x(A+B) + x^2(A+B)^2/2 + \cdots \\ &= I + x(A+B) + x^2(A^2 + AB + BA + B^2)/2 + \cdots\end{aligned}$$

לעומת זאת באברי המכפלה $\exp(xA)\exp(xB)$ שבאגף ימין חזקות המטריצה A מופיעות תמיד משמאל לחזקות B.

סעיפים 5,4 נובעים מתכונות של אקספוננציאל של מטריצות. □

תרגיל 6.10 הראה כי פתרון בעיית ההתחלה המטריצית $Y' = YB$, $Y(0) = C$, הוא $Y(x) = C\exp(xB)$, ופתרון בעיית ההתחלה $Y' = AY + YB$, $Y(0) = C$, הוא $Y(x) = \exp(xA)C\exp(xB)$. מדוע יש לכל אחת מהבעיות פתרון יחיד?

תרגיל 6.11 חשב את $\exp(\pi i I)$. הוכח כי $\exp(xA + 2\pi i I) = \exp(xA)$.

דוגמא 6.12 נדגים את חישוב האקספוננציאל $\exp\left(x\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)$ בעזרת טור אינסופי. כאן

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = -I,$$

ואחריהם $A^3 = A^2 A = -A$, $A^4 = A^2 A^2 = I$ וכולי. הטור החזקות המעריכי המתקבל הוא

$$\begin{aligned}\exp(xA) &= I + xA + \frac{x^2}{2!}(-I) + \frac{x^3}{3!}(-A) + \frac{x^4}{4!}I + \cdots \\ &= I\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \cdots\right) + A\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots\right) \\ &= I\cos x + A\sin x = \begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix}. \qquad \square\end{aligned}$$

דוגמא 6.13 דרך אחרת לחישוב אקספוננציאל של מטריצה היא בעזרת פתרון מערכת דיפרנציאלית מתאימה. כזכור, $\exp(xA)$ הוא פתרון בעיית ההתחלה המטריצית $Y' = AY$, $Y(0) = I$. אם למערכת יש מטריצה יסודית כלשהי $U(x)$ אזי $\exp(xA) = U(x)U^{-1}(0)$. למשל, על פי דוגמא 6.7,

$$\exp\left(x\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}e^{3x} & e^{-x}\\ 2e^{3x} & -2e^{-x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}^{-1}. \qquad \square$$

תרגיל 6.14 הוכח כי אם למטריצה A יש ערך עצמי λ ומתאים לו וקטור עצמי $\mathbf{v}_0$ אז ל־$\exp(xA)$ ערך עצמי $\exp(\lambda x)$ ואותו וקטור עצמי.

הדוגמא הבאה מציעה שיטה לחישוב האקספוננציאל של מטריצה.

דוגמא 6.15 (נוסחת Putzer) תהי A מטריצה $n \times n$ ולה ערכים עצמיים $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ רשומים בסדר כלשהו. אז

$$\begin{aligned}\exp(xA) = r_1(x)I + r_2(x)(A-\lambda_1 I) + r_3(x)(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I) + \cdots\\ + r_n(x)(A-\lambda_1 I)\cdots(A-\lambda_{n-1}I),\end{aligned}$$

כאשר $r_1(x), \ldots, r_n(x)$ פתרונות

$$\begin{aligned} r_1{}' &= \lambda_1 r_1, & r_1(0) &= 1,\\ r_2{}' &= \lambda_2 r_2 + r_1, & r_2(0) &= 0,\\ &\vdots\\ r_n{}' &= \lambda_n r_n + r_{n-1}, & r_n(0) &= 0.\end{aligned} \tag{6.17}$$

הוכחה. נסמן $M_0 = I$, $M_k = \prod_{i=1}^{k}(A-\lambda_i I)$, $\Phi(x) = \sum_{k=1}^{n} r_k(x)M_{k-1}$. להוכחת הטענה מספיק לאמת כי מתקיים $\Phi' = A\Phi$, $\Phi(0) = I$. נחשב:

$$\Phi' - A\Phi = \sum_{k=1}^{n} r_k{}' M_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} r_k A M_{k-1}$$

המטריצות A, M_i מתחלפות ו־$M_{k-1}(A-\lambda_k I) = M_k$, לכן

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{n} r_k{}' M_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} r_k M_{k-1}\big[(A-\lambda_k I) + \lambda_k I\big]\\ &= \sum_{k=1}^{n} r_k{}' M_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} r_k M_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k r_k M_{k-1}\\ &= (r_1{}' - \lambda_1 r_1)M_0 + \sum_{k=2}^{n}(r_k{}' - \lambda_k r_k - r_{k-1})M_{k-1}\end{aligned}$$

כי $M_n = \prod_{i=1}^{n}(A-\lambda_i I) \equiv 0_{n\times n}$ לפי משפט Cayley-Hamilton. בחירת r_i על פי (6.17) מבטיחה כי $\Phi' - A\Phi = 0$ ותנאי ההתחלה דואגים ל־$\Phi(0) = I$. $\square$

תרגיל 6.16 הראה כי אם A מטריצה 2×2 ולה ערכים עצמיים λ_1, λ_2, אז

$$\exp(xA) = \begin{cases} e^{\lambda_1 x} I + \dfrac{e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}(A - \lambda_1 I), & \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ e^{\lambda_1 x} I + x e^{\lambda_1 x}(A - \lambda_1 I), & \lambda_1 = \lambda_2, \\ e^{ax}\cos(bx) I + \dfrac{1}{b} e^{ax}\sin(bx)(A - aI), & \lambda_1 = \overline{\lambda}_2 = a + ib. \end{cases}$$

6.6 צורת ז'ורדן

דרך חשובה לחישוב $\exp(xA)$ ולפתרון המערכת הוקטורית (6.12) היא על ידי הבאת המטריצה A לצורה קנונית פשוטה ככל האפשר. ההצבה $\mathbf{y} = T\mathbf{z}$, בה T מטריצה קבועה, מביאה את המערכת $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ לצורה $T\mathbf{z}' = AT\mathbf{z}$, כלומר

$$\mathbf{z}' = \left(T^{-1}AT\right)\mathbf{z}.$$

לכן נתענין במבנה של $T^{-1}AT$ ובאקספוננציאל שלו $\exp\left(x(T^{-1}AT)\right)$. הודות ל־

$$(T^{-1}AT)^k = \underbrace{(T^{-1}AT)\,(T^{-1}AT)\ \cdots\ (T^{-1}AT)}_{k \text{ פעמים}} = T^{-1}A^kT,$$

אקספוננציאלים של מטריצות דומות קשורים על ידי הזהות

$$\exp\left(x(T^{-1}AT)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}(T^{-1}AT)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}T^{-1}A^kT = T^{-1}\exp(xA)T. \quad (6.18)$$

דוגמא 6.17 המקרה הפשוט ביותר הוא כאשר מטריצה ניתנת ללכסון. במקרה זה המטריצה המלכסנת T בנויה מ־n הוקטורים העצמיים רשומים זה לצד זה כעמודות

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda, \qquad T = \left(\mathbf{v}_1 \vdots\ \mathbf{v}_2 \vdots\ \ldots \vdots\ \mathbf{v}_n\right).$$

$$\exp\left(x(T^{-1}AT)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\Lambda^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}$$

ולפי (6.18)

$$\exp(xA) = T\exp\left(x(T^{-1}AT)\right)T^{-1} = T\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n x}\end{pmatrix}T^{-1}.$$

אזי הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית (6.4), הוא

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} = \exp(xA)\mathbf{c} &= T\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n x}\end{pmatrix}T^{-1}\mathbf{c} \\
&= \left(\mathbf{v}_1 \vdots \mathbf{v}_2 \vdots \ldots \vdots \mathbf{v}_n\right)\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n x}\end{pmatrix}\mathbf{d} \\
&= \left(e^{\lambda_1 x}\mathbf{v}_1 \vdots e^{\lambda_2 x}\mathbf{v}_2 \vdots \ldots \vdots e^{\lambda_n x}\mathbf{v}_n\right)\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n\end{pmatrix} \\
&= d_1 e^{\lambda_1 x}\mathbf{v}_1 + \cdots + d_n e^{\lambda_n x}\mathbf{v}_n
\end{aligned}$$

כפי שכבר נקבע במשפט 6.12 . □

המקרה המעניין יותר הוא כמובן כאשר למטריצה אין n וקטורים עצמיים בלתי תלויים. במקרה זה המטריצה אינה ניתנת ללכסון אך ניתן להביא אותה לצורה קנונית הנקראת צורת ז'ורדן. נסכם כאן מספר תכונות שלה ללא הוכחה.

משפט 6.17 כל מטריצה A ניתן להביא על ידי דמיון (מעל שדה המספרים המרוכבים) לצורת ז'ורדן [2] *(Jordan canonical form)* העשויה בלוקים,

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_r}\end{pmatrix},$$

בה כל בלוק הוא מהצורה

$$J_\ell = \begin{pmatrix} \lambda_\ell & 1 & & & \\ & \lambda_\ell & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_\ell & 1 \\ & & & & \lambda_\ell\end{pmatrix}$$

[2] Camille Jordan, 1838-1922

וכל האברים שאינם רשומים הם אפסים.
מספר הבלוקים האלכסוניים בהם מופיע ערך עצמי מסוים λ הוא הריבוי הגיאומטרי שלו (מספר הוקטורים העצמיים הבלתי תלויים המתאימים לו).
סכום הממדים של כל הבלוקים המכילים ערך עצמי λ הוא הריבוי האלגברי של ערך עצמי זה.

שתי התכונות שלמעלה אינן מספיקות כדי לקבוע את ממדי הבלוקים בצורה הקנונית. אם למשל לערך עצמי ריבוי אלגברי 5 וריבוי גיאומטרי 3, אז באופן עקרוני ייתכן כי לצורת ז'ורדן בלוקים מסדר $3+1+1$ או מסדר $2+2+1$. כדי לקבוע את ממדי הבלוקים יש צורך במושג מחלקים אלמנטריים הנלמד באלגברה לינארית והוא לא יפורט פה.

תרגיל 6.18 הוכח כי לבלוק ז'ורדן J מתאים בדיוק וקטור עצמי אחד וחשב אותו.

תרגיל 6.19 בחירת הקבוע 1 באלכסון המשני של צורת ז'ורדן היא שרירותית וניתן להחליף אותו במספר כלשהו $\varepsilon \neq 0$. בדוק כי אם $Q = \operatorname{diag}\{1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{r-1}\}$, אז

$$Q^{-1}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & \varepsilon \\ & & & \lambda \end{pmatrix}. \qquad \square$$

נניח אם כן כי למטריצה A צורת ז'ורדן $T^{-1}AT = J$ וכי הטרנספורציה $\mathbf{y} = T\mathbf{z}$ הביאה את המערכת $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ לצורה $\mathbf{z}' = J\mathbf{z}$. כדי לפתור את המערכת החדשה עלינו לחשב את $\exp(xJ)$.

מכיון ש־

$$J^k = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & \\ & \boxed{J_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \boxed{{J_1}^k} & & \\ & \boxed{{J_2}^k} & \\ & & \ddots \end{pmatrix},$$

נובע כי

$$\exp(xJ) = \begin{pmatrix} \boxed{\exp(xJ_1)} & & \\ & \boxed{\exp(xJ_2)} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \tag{6.19}$$

ולכן מספיק לחשב את $\exp(xJ_i)$ עבור בלוק יחיד. נרשום את הבלוק כ־

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i I + N, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \tag{6.20}$$

כאשר J_i, N בעלי ממד $r \times r$. מכיון ש־I מתחלף עם כל מטריצה, בפרט עם N,

$$\exp(xJ_i) = \exp(x(\lambda_i I + N)) = \exp(x\lambda_i I)\exp(xN).$$

הגורם הראשון הוא

$$\exp(x\lambda_i I) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i x)^k}{k!} I^k = I\exp(x\lambda_i).$$

המטריצה N מממד $r \times r$ היא נילפוטנטית כי

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad N^{r-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

ולבסוף $N^r = 0$. לכן

$$\exp(xN) = I + xN + \frac{x^2}{2!}N^2 + \cdots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}N^{r-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2! & \cdots & & x^{r-1}/(r-1)! \\ & 1 & x & x^2/2! & & \vdots \\ & & 1 & x & & \\ & & & 1 & \ddots & x^2/2! \\ & & & & \ddots & x \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ולאחר כפל ב־$\exp(x\lambda_i I)$, מתקבל אקספוננציאל של בלוק מממד $r \times r$

$$\exp(xJ_i) = e^{\lambda_i x} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2! & \cdots & x^{r-1}/(r-1)! \\ & 1 & x & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{6.21}$$

לפי (6.19), $\exp(xJ)$ בנוי מאלכסון של בלוקים כאלה.

הפתרון הכללי של $\mathbf{z}\,' = J\mathbf{z}$ הוא כזכור $\mathbf{z} = \exp(xJ)\mathbf{c}$ ופתרון המערכת המקורית (6.12) הוא לפיכך $\mathbf{y} = T\mathbf{z} = T\exp(xJ)\mathbf{c}$, כלומר קומבינציה לינארית של עמודות $T\exp(xJ)$. אם נסמן את וקטורי העמוד של המטריצה T ב־ $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ... , $\mathbf{v}_n$ (לא וקטורים עצמיים!), אז

$$T\exp(xJ) = \Big(\mathbf{v}_1 \,\vdots\, \mathbf{v}_2 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \mathbf{v}_n\Big) \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} e^{\lambda_1 x} & x\,e^{\lambda_1 x} & \frac{x^2}{2!}\,e^{\lambda_1 x} & \cdots \\ & e^{\lambda_1 x} & xe^{\lambda_1 x} & \\ & & e^{\lambda_1 x} & \\ & & & \ddots \end{matrix}} & \\ & \ddots \end{pmatrix}$$

פתרונות (6.12) שמתאימים לבלוק $r \times r$ הם

$$\mathbf{y}_1 = e^{\lambda_1 x}\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{y}_2 = e^{\lambda_1 x}\big(x\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\big), \quad \mathbf{y}_3 = e^{\lambda_1 x}\left(\frac{x^2}{2!}\,\mathbf{v}_1 + x\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\right), \ \ldots$$

עד

$$\mathbf{y}_r = e^{\lambda_1 x}\left(\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\,\mathbf{v}_1 + \cdots + x\,\mathbf{v}_{r-1} + \mathbf{v}_r\right)$$

המתאימים לבלוק הראשון ואחריהם הפתרונות הגזורים מהבלוקים הבאים.

חישוב מבנה הבלוקים של צורת ז'ורדן דורש עבודה רבה. מכיון שגודל כל בלוק המתאים לערך עצמי הוא לכל היותר הכפילות האלגברית שלו, ננסח אפיון חלקי של מבנה הפתרונות המחייב רק חישוב הכפילות האלגברית של הערכים העצמיים.

מסקנה 6.18 אם λ הוא ערך עצמי של המטריצה A וכפילותו האלגברית היא k, אז למערכת (6.12) יש k פתרונות בלתי תלויים לינארית מהצורה

$$\begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} e^{\lambda x},$$

כאשר $p_i(x)$ פולינומים ממעלה $k-1$ לכל היותר. כמובן שהחסם המדויק קטן ב־1 מגודל בלוק ז'ורדן המתאים הגדול ביותר. $\square$

ננסה לאפיין את הוקטורים $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$, שהם עמודות המטריצה T. נציב את הפתרון $\mathbf{y}^{(r)}$, (או את אחד הפתרונות $\mathbf{y}^{(i)}$, $1 \le i \le r$), לתוך המערכת $\mathbf{y}\,' = A\mathbf{y}$:

$$\lambda_1 e^{\lambda_1 x}\left(\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\,\mathbf{v}_1 + \cdots + x\,\mathbf{v}_{r-1} + \mathbf{v}_r\right) + e^{\lambda_1 x}\left(\frac{x^{r-2}}{(r-2)!}\,\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_{r-1}\right)$$
$$= e^{\lambda_1 x}\left(\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\,A\mathbf{v}_1 + \cdots + x\,A\mathbf{v}_{r-1} + A\mathbf{v}_r\right)$$

נצמצם ב־ $e^{\lambda_1 x}$ ונשווה חזקות:

$$\begin{aligned}
\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}: &\qquad \lambda_1\mathbf{v}_1 = A\mathbf{v}_1,\\
\frac{x^{r-2}}{(r-2)!}: &\qquad \lambda_1\mathbf{v}_2 \ + \ \mathbf{v}_1 = A\mathbf{v}_2,\\
\vdots \qquad &\qquad \vdots\\
x \ : &\qquad \lambda_1\mathbf{v}_{r-1} + \mathbf{v}_{r-2} = A\mathbf{v}_{r-1},\\
1 \ : &\qquad \lambda_1\,\mathbf{v}_r \ + \ \mathbf{v}_{r-1} = A\,\mathbf{v}_r,
\end{aligned}$$

דהיינו

$$\begin{aligned}
(A-\lambda_1 I)\mathbf{v}_1 \ &= \ \mathbf{0},\\
(A-\lambda_1 I)\mathbf{v}_2 \ &= \ \mathbf{v}_1,\\
&\vdots\\
(A-\lambda_1 I)\mathbf{v}_{r-1} &= \mathbf{v}_{r-2},\\
(A-\lambda_1 I)\mathbf{v}_r \ &= \ \mathbf{v}_{r-1}.
\end{aligned} \tag{6.22}$$

סדרת הוקטורים $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r$ נקראת שרשרת ז'ורדן (Jordan chain) המתאימה לבלוק J_1. $\mathbf{v}_1$ הוא וקטור עצמי, האחרים מכונים בשם "וקטורים עצמיים מוכללים" ומתקיים

$$\begin{aligned}
&(A-\lambda_1 I)^i\,\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_{r-i}, \qquad i=2,\ldots,r-1,\\
&(A-\lambda_1 I)^r\,\mathbf{v}_r = \mathbf{0},
\end{aligned}$$

6.7 דוגמאות לפתרון מערכות עם מקדמים קבועים

בסעיף זה נביא מספר דוגמאות לפתרון מערכות.

דוגמא 6.20 למערכת $\mathbf{y}\,' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{y}$ מתאים פולינום אופייני $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2$ וערך עצמי מרבוי אלגברי 2, $\lambda_1=\lambda_2=1$. וקטור עצמי $\mathbf{v}_1$ מתקבל מ־

$$(A-\lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3-1 & -4 \\ 1 & -1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

משוואות אלה כמובן תלויות לינארית ולהן פתרון יחיד $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, עד כדי כפל בקבוע. לכן הריבוי הגיאומטרי הוא 1 ופתרון אחד של המערכת הדיפרנציאלית הוא

$$\mathbf{y}_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^x.$$

פתרון שני מהצורה $\mathbf{y}_2(x) = e^x\big(x\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\big)$ נקבע בעזרת שרשרת ז'ורדן המוגדרת ב־(6.22). את $\mathbf{v}_1$ כבר חישבנו למעלה, והוקטור $\mathbf{v}_2$ נקבע על ידי $(A - 1\cdot I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. נעיר כאן כי למערכת הבלתי הומוגנית $(A-\lambda_1 I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ יש דטרמיננט $|A-\lambda_1 I| = 0$ והתנאי לקיום פתרון הוא $\operatorname{rank}(A-\lambda_1 I) = \operatorname{rank}(A-\lambda_1 I \,\vdots\, \mathbf{v}_1)$.

במקרה שלנו המערכת היא

$$\begin{pmatrix} 3-1 & -4 \\ 1 & -1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

ולה משפחה חד־פרמטרית של פתרונות $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+2\delta\\ \delta\end{pmatrix}$. הפתרון המתאים של המערכת הדיפרנציאלית הוא

$$e^x\big(x\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\big) = e^x\left[x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1+2\delta\\ \delta\end{pmatrix}\right].$$

הגודל $e^x\begin{pmatrix}2\delta\\ \delta\end{pmatrix}$ הוא כפולה של הפתרון $\mathbf{y}_1(x)$, לכן נבחר $\delta = 0$ ונקבל פתרון שני

$$\mathbf{y}_2(x) = e^x\left[x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}2x+1\\ x\end{pmatrix}e^x. \qquad \square$$

נציג בעיה עם ערך עצמי בעל ריבוי אלגברי שלש וריבויו הגיאומטרי הוא שניים.

דוגמא 6.21

$$\mathbf{y}\,' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\mathbf{y}.$$

כאן $|A-\lambda I| = (\lambda-1)^3$ ושרשיו $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. וקטורים עצמיים עבור $\lambda = 1$ מתקבלים מ־

$$(A-\lambda I)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

שפתרונו הכללי הוא

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

כאשר α,β כלשהם. לכן הריבוי הגיאומטרי הוא שניים, בצורת ז'ורדן יש שני בלוקים, אך זה עדיין לא קובע איזה מהוקטורים העצמיים שייך לשרשרת ז'ורדן.

עד כאן מצאנו למערכת הדיפרנציאלית שני פתרונות

$$\mathbf{y}_1(x) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^x, \qquad \mathbf{y}_2(x) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}e^x.$$

פתרון שלישי מהצורה $e^x(x\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)$ נמצא בעזרת (6.22). המשוואה $(A-1\cdot I)\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1$ היא

$$\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\\\delta\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix},$$

ובכתיב של רכיבים $2\eta=\alpha,\ \eta=\beta$. תנאי הכרחי ומספיק לקיום פתרון למשוואות הוא $\alpha=2\beta$ ואז הוקטור $\mathbf{v}_2$ המתקבל הוא

$$\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}\gamma\\\delta\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\beta\end{pmatrix},$$

כאשר c_1,c_2 כלשהם. לסכום, קבלנו פתרון שלישי

$$e^x(x\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=e^x\Big[x\begin{pmatrix}2\beta\\\beta\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\beta\end{pmatrix}\Big]=\beta e^x\begin{pmatrix}2x\\x\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\0\end{pmatrix}e^x.$$

המחובר האחרון אינו אלא הצרוף הלינארי $c_1\mathbf{y}_1(x)+c_2\mathbf{y}_2(x)$ של שני הפתרונות הראשונים המוכרים לנו כבר. לכן כפתרון שלישי אפשר לבחור את

$$\mathbf{y}_3(x)=\begin{pmatrix}2x\\x\\1\end{pmatrix}e^x. \qquad \square$$

גישה אפשרית אחרת למציאת הפתרונות היא לנצל את המידע על הצורה הכללית של הפתרונות במסקנה 6.18. אם λ ערך עצמי של המערכת (6.12) עם כפילות אלגברית k, נחפש k פתרונות בלתי תלויים לינארית מהצורה

$$\begin{pmatrix}p_1(x)\\\vdots\\p_n(x)\end{pmatrix}e^{\lambda x},$$

כאשר $p_i(x)$ פולינומים ממעלה $k-1$ לכל היותר. את מקדמי הפולינומים נמצא על ידי הצבת הפתרון המשוער למשוואה הדיפרנציאלית והשוואת מקדמים.

תרגיל 6.22 למערכת בדוגמא 6.20 יש ערך עצמי $\lambda=1$ מכפילות אלגברית 2. חפש ומצא את פתרונות המערכת בצורה $\mathbf{y}(x)=\begin{pmatrix}ax+b\\cx+d\end{pmatrix}e^x$. $\square$

כאשר למטריצה A יש ערכים עצמיים מרוכבים, המצב אינו שונה באופן מהותי. נניח כי ל־A יש ערך עצמי λ ווקטור עצמי $\mathbf{v}$ מרוכבים, $A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$. כשהמטריצה A ממשית, הצמוד המרוכב של ביטוי זה הוא $A\overline{\mathbf{v}}=\overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{v}}$. (כאן $\overline{}$ מסמן צמוד מרוכב). לכן גם $\overline{\lambda}$ הוא ערך עצמי ומתאים לו וקטור עצמי מרוכב $\overline{\mathbf{v}}$. בזה קבלנו למערכת הדיפרנציאלית שני פתרונות וקטוריים מרוכבים צמודים $e^{\lambda t}\mathbf{v},\ e^{\overline{\lambda}t}\overline{\mathbf{v}}$ ומהם נקבל שני פתרונות ממשיים

$$\frac{1}{2}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v}+e^{\overline{\lambda}t}\overline{\mathbf{v}}\right)=\mathrm{Re}\left\{e^{\lambda t}\mathbf{v}\right\},\qquad \frac{1}{2i}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v}-e^{\overline{\lambda}t}\overline{\mathbf{v}}\right)=\mathrm{Im}\left\{e^{\lambda t}\mathbf{v}\right\}.$$

6.8 מערכות מחזוריות ומשפט Floquet

לאחר שמצאנו דרך לפתור מערכות לינאריות עם מקדמים קבועים, נעבור לבעיה הבאה בתור מבחינת רמת הקושי, והן מערכות עם מקדמים מחזוריים.

כמוטיבציה נתבונן במשוואה סקלרית לינארית עם מקדם מחזורי,

$$y'(x) = p(x)y(x), \qquad p(x+\omega) = p(x). \tag{6.23}$$

פתרונות משוואה זו הם, כזכור, $y(x) = ce^{\int_0^x p(s)\,ds}$. נסמן $a = \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^\omega p(s)\,ds$, ערכו הממוצע של $p(x)$ ונרשום את הפתרונות בצורה

$$y(x) = ce^{\int_0^x [p(s)-a]\,ds}e^{ax}. \tag{6.24}$$

כאשר $p(x)$ מחזורי, גם $I(x) = \int_0^x [p(s)-a]\,ds$, מחזורי, כי

$$\begin{aligned} I(x+\omega) = \int_0^{x+\omega} [p(s)-a]\,ds &= \int_0^x [p(s)-a]\,ds + \int_x^{x+\omega} [p(s)-a]\,ds \\ &= I(x) + \int_0^\omega [p(s)-a]\,ds \\ &= I(x) + \int_0^\omega p(s)\,ds - a\omega = I(x). \end{aligned} \tag{6.25}$$

לכן הפתרון (6.24) הוא מהצורה $y(x) = z(x)e^{ax}$, $z(x) = ce^{I(x)}$, $z(x)$ פונקציה מחזורית, $z(x+\omega) = z(x)$.

מטרתנו היא להכליל דוגמא זו למערכות מטריציות בעלות מקדמים מחזוריים.

משפט 6.19 (Floquet)[3] נתונה המערכת הדיפרנציאלית

$$\mathbf{y}'(x) = P(x)\mathbf{y}(x), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{6.26}$$

בה $P(x)$ פונקציה מטריצית מחזורית עם מחזור ממשי ω, כלומר $P(x+\omega) = P(x)$. אז כל מטריצה יסודית $Y(x)$ המתאימה למערכת זו ניתן להציג בצורה

$$Y(x) = K(x)\exp(xR)$$

בה $K(x)$ פונקציה מחזורית בעלת מחזור ω ו־R מטריצה קבועה.

הוכחה. נשוב ונזכיר כי מטריצה יסודית של (6.26) היא פתרון מטריצי הפיך של המערכת. אם $Y(x)$ מטריצה יסודית של (6.26) אז גם $Y(x+\omega)$ היא מטריצה יסודית של אותה מערכת, כי

$$Y'(x+\omega) = P(x+\omega)Y(x+\omega) = P(x)Y(x+\omega).$$

[3] Gaston Floquet, 1847-1920

לכן לפי משפט 6.10 בסעיף 6.3, קיימת מטריצה קבועה, הפיכה C כך ש־

$$Y(x+\omega) = Y(x)C. \tag{6.27}$$

על ידי בחירת $x = 0$ מקבלים כי למעשה $C = Y^{-1}(0)Y(\omega)$. בהמשך נראה כי עבור מטריצה הפיכה C קיימת מטריצה R כך ש־

$$C = \exp(\omega R). \tag{6.28}$$

כלומר ωR הוא "לוגריתם" של המטריצה C. לאחר שזה יוכח, (6.27) ייכתב כ־

$$Y(x+\omega) = Y(x)\exp(\omega R). \tag{6.29}$$

המטריצה $C = \exp(\omega R)$ נקראת מטריצת המונודרומיה (monodromy) והיא מתארת כיצד משתנה הפתרון $Y(x)$ עם התקדמות x במחזור שלם ω.

נגדיר עכשיו $K(x) = Y(x)\exp(-xR)$ ונראה כי $K(x)$ שהגדרנו הוא מחזורי בעל מחזור ω. ואכן, על ידי שימוש ב־(6.29),

$$\begin{aligned} K(x+\omega) &= Y(x+\omega)\exp(-(x+\omega)R) \\ &= \big[Y(x+\omega)\exp(-\omega R)\big]\exp(-xR) \\ &= Y(x)\exp(-xR) = K(x). \end{aligned}$$

בזה הוכחה מחזוריות $K(x)$, כפי שנטען במשפט.

נותר רק לבנות את המטריצה R שתקיים את הדרישה (6.28). על פי (6.18), השוויון $C = \exp(\omega R)$ שקול לשוויון $Q^{-1}CQ = \exp(\omega\, Q^{-1}RQ)$ ולכן אפשר להניח כי C כתוב בצורת ז'ורדן. למעשה מספיק להתיחס לכל בלוק ז'ורדן בנפרד ולטפל, בדומה ל־(6.20), רק ב־C מהצורה $C = \lambda I + N$ עם $\lambda \neq 0$.

מכיון ש־ $\exp(\omega R) = C = \lambda I + N = \lambda I\left(I + \frac{1}{\lambda}N\right)$ ננסה להגדיר את ωR על ידי

$$\omega R = \log C = \log\lambda \cdot I + \log\left(I + \frac{1}{\lambda}N\right),$$

כאשר את הגדרת $\log\left(I + \frac{1}{\lambda}N\right)$ נציע ונצדיק על פי טורי טילור. כידוע

$$\log(1+t) = t - t^2/2 + t^3/3 - + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i}t^i, \qquad |t| < 1,$$

והשוויון $\exp\big(\log(1+t)\big) = 1+t$ פרושו

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\,t^i\right) \equiv 1+t, \qquad |t| < 1. \tag{6.30}$$

משמעות זהות זו היא כי בתחום ההתכנסות מותר לסדר מחדש את אברי הטור ולאחר ארגון מחדש החזקות בשני האגפים מופיעות עם אותם מקדמים. למשל מקדמי החזקות הראשונות בטור הם

$$1+\frac{1}{1!}\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\cdots\right)^2+\frac{1}{3!}\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\cdots\right)^3+\cdots$$

הם

$$t^1:\quad 1,\qquad t^2:\quad -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0,\qquad t^3:\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{2!\big(-1\big)}+\frac{1}{3!}=0,\ldots$$

וכולי. נגדיר לפיכך

$$\log\left(I+\frac{1}{\lambda}N\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\frac{1}{\lambda^i}N^i.$$

מכיון ש־N מטריצה נילפוטנטית, טור זה הוא למעשה סכום סופי ושאלת התכנסות לא מתעוררת כלל. כשנחליף בטור (6.30) באופן פורמלי את הסמל t במטריצה $\frac{1}{\lambda}N$, אותם חשבונות על המקדמים נשארים בתוקף ואנו מקבלים בדומה ל־ (6.30), את הזהות המטריצית

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\frac{1}{\lambda^i}\,N^i\right)=I+\frac{1}{\lambda}N.$$

לכן

$$\exp(\omega R)=\exp\left(\log\lambda\cdot I+\log\big(I+\frac{1}{\lambda}N\big)\right)=\lambda I\left(I+\frac{1}{\lambda}N\right)=C,$$

כפי שרצינו. □

הערה. המטריצה R אינה נקבעת באופן יחיד אלא רק עד כדי דמיון. כי עבור מטריצה יסודית אחרת, $\hat{Y}(x)$, נקבל כמו ב־ (6.27) ש־

$$\hat{Y}(x+\omega)=\hat{Y}(x)\hat{C}$$

עם $\hat{C}$ מתאים. אך לפי לפי משפט 6.10, כל פתרון מטריצי ניתן להכתב בצורה $Y(x)Q$ עבור איזה Q קבוע, בפרט $\hat{Y}(x)=Y(x)Q$. לכן

$$Y(x+\omega)Q=\big(Y(x)Q\big)\hat{C}.$$

על ידי השוואה עם (6.27) נובע כי $\hat{C}=Q^{-1}CQ$ ומכאן מתקבל כי גם $\hat{R}=Q^{-1}RQ$. לפיכך קיבלנו שתי מטריצות $\hat{R},R$ דומות, אך בעלות ערכים עצמיים שוים. ערכים עצמיים אלה נקראים המעריכים העצמיים (characteristic exponents). גם מטריצת המונודרומיה

$$C=Y^{-1}(0)Y(\omega)=\exp(\omega R). \tag{6.31}$$

נקבעת עד כדי דמיון אך הערכים העצמיים שלה נקבעים באופן יחיד ונקראים כופלים אופייניים (characteristic multipliers) או כופלי Floquet.

מסקנה. כאמור ניתן להניח כי R רשום בצורת ז'ורדן, $\exp(xR)$ בנוי בלוקים כמו ב־(6.19) ו־$\exp(xJ_i)$ כרשום ב־(6.21). לכן עמודי $Y(x) = K(x)\exp(xR)$, שהם n פתרונות בלתי תלויים של המערכת (6.26), הם מהצורה

$$\mathbf{y}_1(x) = e^{\lambda_1 x}\mathbf{z}_1(x), \quad \mathbf{y}_2(x) = e^{\lambda_1 x}\big(x\mathbf{z}_1(x) + \mathbf{z}_2(x)\big), \ldots$$

וכולי. כאן λ_i הם הערכים העצמיים של R, $\mathbf{z}_i(x)$ מחזוריים בעלי מחזור ω.

תרגיל 6.23 הראה כי בסימוני משפט Floquet ההצבה $\mathbf{y}(x) = K(x)\mathbf{w}(x)$ הופכת את המערכת המחזורית (6.26) למערכת עם מקדמים קבועים $\mathbf{w}\,' = R\mathbf{w}$.

כזכור, לפי הוכחת משפט Floquet, $K(x) = Y(x)\exp(-xR)$. לכן

$$\begin{aligned} K'(x) &= Y'(x)\exp(-xR) - Y(x)\exp(-xR)R \\ &= P(x)Y(x)\exp(-xR) - Y(x)\exp(-xR)R \\ &= P(x)K(x) - K(x)R \end{aligned}$$

(R ו־$\exp(-xR)$ מתחלפים). אם נציב $\mathbf{y} = K(x)\mathbf{w}$, אז

$$\begin{aligned} \mathbf{y}\,' &= K'\mathbf{w} + K\mathbf{w}\,' = (P(x)K(x) - K(x)R)\mathbf{w} + K\mathbf{w}\,' \\ &= P(x)\mathbf{y} + K(x)(\mathbf{w}\,' - R\mathbf{w}), \end{aligned}$$

דהיינו $\mathbf{y}\,' - P(x)\mathbf{y} = K(x)(\mathbf{w}\,' - R\mathbf{w})$. מכיוון ש־$K$ מטריצה הפיכה, $\mathbf{y}(x)$ פתרון של (6.26) אם ורק אם $\mathbf{w}(x)$ פתרון של $\mathbf{w}\,' = R\mathbf{w}$. □

6.9 מערכות בלתי הומוגניות

בסעיף זה נטפל במערכת משוואות לינאריות, לא הומוגניות

$$(NH) \qquad \mathbf{u}\,' = P(x)\mathbf{u} + \mathbf{q}(x). \tag{6.32}$$

יהיו $\mathbf{u}_1(x),\ \mathbf{u}_2(x)$ שני פתרונות של המערכת (NH). נחסיר אותם זה מזה:

$$\big(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\big)' = \big(P(x)\mathbf{u}_2 + \mathbf{q}(x)\big) - \big(P(x)\mathbf{u}_1 + \mathbf{q}(x)\big) = P(x)\big(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\big).$$

לפיכך $\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה (6.4) שסומנה ב־(H), וייקרא $\mathbf{y}_H$. מכאן ואילך נקבע את $\mathbf{u}_1$ כפתרון פרטי מסוים של (NH) ונסמנו ב־$\mathbf{u}_p$ (p: פרטי, particular) ואל $\mathbf{u}_2$ נתיחס כפתרון כלשהו של (NH) ונסמן אותו ב־$\mathbf{u}_{NH}(x)$. אז

$$\mathbf{u}_{NH}(x) - \mathbf{u}_p(x) = \mathbf{y}_H.$$

אך מבנה מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית (H) ידוע: כל פתרון נפרש על ידי צרוף לינארי של אברי בסיס $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$.

מסקנה 6.20 כל פתרונות מערכת לא הומוגנית (NH) ניתנות להכתב בעזרת פתרון פרטי אחד של (NH) בתוספת אוסף כל הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה (H),

$$\mathbf{u}_{NH}(x) = \mathbf{u}_p(x) + c_1\mathbf{y}_1(x) + \cdots + c_n\mathbf{y}_n(x).$$

בהנחה שאנו מכירים את פתרונות המערכת ההומוגנית (H), פתרון המערכת הלא הומוגנית (NH) מצטמצם למעשה לבעיה אחת: למצוא פתרון פרטי אחד של (NH). נפתור בעיה זו בשיטת וריאציה של הפרמטרים (המכונה גם בשם וריאציה של הקבועים).

כזכור, כל פתרון של המערכת ההומוגנית (6.4) ניתן להכתב כקומבינציה של n פתרונות בלתי תלויים כ־

$$\mathbf{y}(x) = c_1\mathbf{y}_1(x) + \cdots + c_n\mathbf{y}_2(x) = \Big(\mathbf{y}_1 \vdots\ \mathbf{y}_2 \vdots\ \ldots \vdots\ \mathbf{y}_n\Big)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = Y(x)\mathbf{c},$$

כאשר $Y(x)$ היא מטריצה יסודית מתאימה ו־$c_1, \ldots, c_n$ הם n קבועים. בשיטת וריאצית הפרמטרים נחפש פתרון למערכת הבלתי הומוגנית (6.32) מהצורה

$$\mathbf{u}(x) = c_1(x)\,\mathbf{y}_1(x) + \cdots + c_n(x)\,\mathbf{y}_1(x) = Y(x)\,\mathbf{c}(x),$$

כאשר $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ הן n פונקציות בלתי ידועות. נציב זאת למערכת (NH):

$$Y'(x)\mathbf{c}(x) + Y(x)\mathbf{c}\,'(x) = P(x)\big(Y(x)\,\mathbf{c}(x)\big) + \mathbf{q}(x).$$

אך $Y'(x) = P(x)Y(x)$, לכן נשאר $Y(x)\mathbf{c}\,'(x) = \mathbf{q}(x)$, כלומר $\mathbf{c}\,'(x) = Y^{-1}(x)\,\mathbf{q}(x)$. לאחר אינטגרציה מתקבל

$$\mathbf{c}(x) = \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(s)\,\mathbf{q}(s)\,ds + \mathbf{k}$$

שבו הגבול התחתון x_0 נבחר באופן שרירותי לנוחיותנו ו־$\mathbf{k}$ מסמן קבוע אינטגרציה כלשהו. כך קיבלנו למערכת הבלתי הומוגנית פתרון כללי

$$\mathbf{u}(x) = Y(x)\,\mathbf{c}(x) = Y(x)\int_{x_0}^{x} Y^{-1}(s)\,\mathbf{q}(s)\,ds + Y(x)\mathbf{k}. \tag{6.33}$$

המחובר הימני $Y(x)\mathbf{k}$ הוא פתרון כללי למשוואה ההומוגנית והמחובר השמאלי מייצג פתרון פרטי אחד של המערכת הבלתי הומוגנית, זה המתאפס ב־x_0:

$$\mathbf{u}_p(x) = Y(x)\int_{x_0}^{x} Y^{-1}(s)\,\mathbf{q}(s)\,ds = \int_{x_0}^{x} Y(x)Y^{-1}(s)\,\mathbf{q}(s)\,ds.$$

בביטוי מהצורה $Y(x)Y^{-1}(s)$ כבר פגשנו במשפט 6.10 ובהגדרת מטריצת מעבר.

נוסחת הפתרון (6.33) נוחה גם לפתרון בעיית ההתחלה $\mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0$:

$$\mathbf{u}(x) = Y(x)\int_{x_0}^{x} Y^{-1}(s)\,\mathbf{q}(s)\,ds + Y(x)Y^{-1}(x_0)\mathbf{u}_0. \tag{6.34}$$

דוגמא 6.24 נפתור את המערכת

$$\mathbf{u}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u} + \begin{pmatrix} e^{5x} \\ e^{7x} \end{pmatrix}$$

בדוגמא 6.7 ראינו כי למערכת ההומוגנית המתאימה יש מטריצה יסודית

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 2e^{3x} & -2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

בעזרת נוסחת ההיפוך $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ מתקבל כי

$$Y^{-1}(x) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2e^{-3x} & e^{-3x} \\ 2e^{x} & -e^{x} \end{pmatrix}.$$

מכאן נוכל לרשום פתרון פרטי

$$u_p(x) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 2e^{3x} & -2e^{-x} \end{pmatrix} \int^x \begin{pmatrix} 2e^{-3s} & e^{-3s} \\ 2e^{s} & -e^{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5s} \\ e^{7s} \end{pmatrix} ds,$$

ונותר לבצע את החישובים. □

דוגמא 6.25 עבור מערכת $\mathbf{u}\,' = A\mathbf{u} + \mathbf{q}(x)$ עם מטריצת מקדמים קבועה A נוח לבחור כפתרון יסודי את $Y(x) = \exp(xA)$. ולנצל את הזהות

$$Y(x)Y^{-1}(s) = \exp(xA)\,(\exp(sA))^{-1} = \exp\big((x-s)A\big).$$

בעזרתו מתקבל לבעית התחלה הפתרון

$$\mathbf{u}(x) = \int_{x_0}^{x} \exp\big((x-s)A\big)\,\mathbf{q}(s)\,ds + \exp\big((x-x_0)A\big)\mathbf{u}(x_0). \tag{6.35}$$

נעיר כי אינטגרלים מהצורה $\int f(x-s)g(s)\,ds$ נקראים בשם קונוולוציה (convolution).
□

פרק 7

פתרון בעזרת טורי חזקות

7.1 טורי חזקות ושני משפטי קיום ויחידות

בפרקים קודמים הזכרנו כי לרוב המשוואות הדיפרנציאליות אין באפשרותנו למצוא פתרונות מפורשים בעזרת פונקציות אלמנטריות מוכרות. במקרים מסוימים הרע במעוטו הוא לנסות להציג פתרונות בעזרת טורי חזקות (טורי טילור).

עסקנו עד כאן בפונקציות ממשיות של משתנה ממשי, אולם אין זו הגישה הטבעית לטפל בפיתוח פונקציות לטורי חזקות. למשל, קיום כל הנגזרות של פונקציה ממשית בנקודה הוא תנאי הכרחי לקיום טור חזקות מתכנס אך אינו תנאי מספיק. להלן נראה כי טבעי לדון בפיתוח לטורי חזקות דווקא במסגרת של פונקציות של משתנה מרוכב. מכיון שאין זה ספר לימוד לפונקציות של משתנה מרוכב, נביא כאן רק מספר הגדרות ותכונות אחדות אשר הכרחיות להמשך הדיון.

פונקציה $f(z)$ של משתנה מרוכב נקראת גזירה בנקודה z_0 אם הגבול

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

קיים ואינו תלוי כיצד h שואף ל־0. למרות הדמיון החיצוני, הגדרה זו שונה מגזירות של פונקציה של משתנה ממשי. כי h ממשי די כי ישאף ל־0 מימין או משמאל; אך h מרוכב יכול לשאוף ל־0 באינסוף דרכים שונות.

פונקציה חד ערכית בתחום)קבוצה פתוחה וקשירה(במישור המרוכב וגזירה בכל נקודה של התחום נקראת אנליטית שם. נצטט)ללא הוכחה(כמה תכונות של פונקציה אנליטית החשובות לענינו:

- אם פונקציה אנליטית בתחום, נגזרותיה מכל סדר קיימות ואנליטיות באותו תחום.
- פונקציה $f(z)$ אנליטית בעגול $|z-z_0|<R$ אם ורק אם היא מיוצגת על ידי טור חזקות $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ המתכנס בעגול זה.

- הרכבה של שתי פונקציות אנליטיות אף היא אנליטית.

- אם $f_1(z), f_2(z), \ldots$ הן סדרת פונקציות אנליטיות המתכנסות במידה שווה בתחום משותף, אז גם גבול הסדרה היא פונקציה אנליטית באותו תחום.

תכונות אלה הן מן הטענות היסודיות המוכחות בתורת הפונקציות. הודות להן רצוי לערוך את הדיון בפתרון משוואות על ידי טורי חזקות במסגרת של פונקציות אנליטיות. לשם הפשטות ננסח את טענותינו תחילה עבור בעיית ההתחלה של נעלם יחיד,

$$w'(z) = f(z,w), \qquad w(z_0) = w_0. \tag{7.1}$$

פונקציה $f(z,w)$ נקראת אנליטית בסביבת (z_0,w_0) אם אפשר לייצג אותה על ידי טור

$$f(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{j,k}(z-z_0)^j(w-w_0)^k \tag{7.2}$$

המתכנס עבור $|z-z_0|<a,\ |w-w_0|<b$.

נביא כאן שתי הוכחות של משפט קיום ויחידות מתאים.

משפט 7.1 (משפט קיום בשיטת הקרובים העוקבים) אם הפונקציה $f(z,w)$ אנליטית עבור $|z-z_0|<a,\ |w-w_0|<b$, אז לבעיית ההתחלה (7.1) קיים פתרון יחיד והוא מוגדר בסביבה מסוימת של $z=z_0$ ואנליטי שם.

הוכחה. ההוכחה דומה מאד לזו של משפט הקיום הממשי)משפט 3.9), בשינויים קטנים. נבחר $0<a'<a,\ 0<b'<b$. הפונקציות האנליטיות $f(z,w)$, $\partial f/\partial w(z,w)$ חסומות בקבוצה $B'=\{|z-z_0|\le a',\ |w-w_0|\le b'\}$:

$$M = \sup_{B'}|f(z,w)|, \qquad L = \sup_{B'}\left|\frac{\partial f}{\partial w}(z,w)\right|.$$

L הוא קבוע ליפשיץ עבור f. נסמן $h=\min\left\{a',\dfrac{b'}{M}\right\}$ ובעגול $|z-z_0|<h$ נגדיר סדרת קרובים עוקבים

$$w_0(z)\equiv w_0, \qquad w_{k+1}(z) = w_0 + \int_{z_0}^{z} f(s,w_k(s))\,ds, \quad k=0,1,2,\ldots, \tag{7.3}$$

כאשר האינטגרציה במישור המרוכב מבוצעת לאורך הקטע הישר מ־z_0 אל z.

כמו בהוכחת משפט 3.9 מתקבל כי כל הקרובים $w_k(z)$ מקיימים $|w_k(z)-w_0|<b'$ בעגול $|z-z_0|<h$. מכיון ש־$f(z,w)$ אנליטי, אנו מסיקים בעזרת אינדוקציה כי כל הקרובים $w_k(z)$ גם אנליטיים בעגול $|z-z_0|<h$. כמו בהוכחת המשפט הממשי אנו מקבלים כי סדרת הקרובים מתכנסת במידה שווה ולכן גם הגבול שלה אנליטי בעגול הנדון. בזה הושלמה ההוכחה עבור בעיית ההתחלה (7.1). □

באופן דומה נטפל במערכת של n משוואות דיפרנציאליות

$$\begin{aligned} {w_1}' &= f_1(z, w_1, \ldots, w_n), \\ &\vdots \\ {w_n}' &= f_n(z, w_1, \ldots, w_n) \end{aligned}$$

ו־n תנאי התחלה $w_i(z_0) = w_{0,i}$, $i = 1, \ldots, n$, או בכתיב וקטורי

$$\mathbf{w}'(z) = \mathbf{f}(z, \mathbf{w}), \qquad \mathbf{w}(z_0) = \mathbf{w_0}.$$

נניח כי כל רכיב אנליטי והטור

$$f_j(z, w_1, \ldots, w_m) = \sum_{k_0=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} c_{j,k_0,\ldots,k_m} (z - z_0)^{k_0} \ldots (w - w_{0,m})^{k_m}$$

מתכנס עבור $|z - z_0| < a,\ ||\mathbf{w} - \mathbf{w}_0|| < b$. במקרה זה נגדיר

$$M = \sup_{B'} ||\mathbf{f}(z, \mathbf{w})||, \qquad L = \sup_{B'} \left|\left| \left(\frac{\partial f_j}{\partial w_\ell}(z, \mathbf{w}) \right) \right|\right|.$$

יתר שלבי הוכחת הקיום והיחידות דומים. □

ההוכחה השניה לאותו משפט קיום היא בשיטת המיורנט של Cauchy.

משפט 7.2 (משפט קיום בשיטת המיורנט של Cauchy)[1] אם הפונקציה $f(z, w)$ אנליטית בסביבת הנקודה (z_0, w_0), אז לבעיית ההתחלה (7.1) קיים פתרון יחיד והוא מוגדר בסביבה מסוימת של $z = z_0$ ואנליטי שם.

הוכחה. בשלב הראשון ננסה למצוא פתרון המיוצג על ידי טור חזקות אשר מקיים באופן פורמלי את דרישות המשוואה הדיפרנציאלית ותנאי ההתחלה, מבלי להתיחס לשאלת ההתכנסות. נניח כי $f(z, w)$ נתון על ידי טור החזקות (7.2) ולבעיית ההתחלה יש פתרון $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. נגזור את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$\begin{aligned} w'(z) &= f(z, w), \\ w''(z) &= f_z + f_w w'(z), \\ w'''(z) &= (f_{zz} + f_{zw} w'(z)) + (f_{wz} + f_{ww} w'(z)) w'(z) + f_w w''(z) \\ &= f_{zz} + 2 f_{zw} w'(z) + f_{ww} {w'}^2(z) + f_w w''(z), \end{aligned}$$

וכולי. נציב ב־$w(z)$ ובנגזרותיו $w(z_0) = w_0$, $z = z_0$ וננצל את העובדות כי

$$a_n = \frac{1}{n!} w^{(n)}(z_0), \qquad c_{j,k} = \frac{1}{j!\,k!} \frac{\partial^{j+k} f}{\partial^j z\, \partial^k w}(z_0, w_0).$$

[1] קושי כינה את השיטה בשם calcul des limites

מתקבל

$$\begin{aligned} a_0 &= w_0, \\ a_1 &= c_{0,0}, \\ 2a_2 &= c_{1,0} + c_{0,1}a_1, \\ 3!\,a_3 &= c_{2,0} + 2c_{1,1}a_1 + c_{0,2}{a_1}^2 + c_{0,1}2a_2, \end{aligned} \tag{7.4}$$

וכך הלאה. מתקבלת נוסחא בה כל מקדם a_n מבוטא באופן פולינומי בעזרת המקדמים הקודמים $a_0, \ldots, a_{n-1}$ ומקדמי הטור של f. נוסחה כזו נקראת נוסחת נסיגה או נוסחת רקורסיה.

נותר להוכיח כי טור החזקות שהתקבל כך עבור הפתרון אכן מתכנס בסביבה מסוימת של נקודת ההתחלה. זה יצדיק את הפעולות שבצענו על הטורים ויקבע את הפתרון באופן אחד ויחיד. נניח כי טור החזקות (7.2) של $f(z,w)$ מתכנס בהחלט עבור $|z-z_0| \le a$, $|w-w_0| \le b$, ו־

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |c_{j,k}|\, a^j b^k = M.$$

בפרט $|c_{j,k}| \le M/a^j b^k$ לכל j,k. במקביל לפונקציה $f(z,w)$ נגדיר את הפונקציה

$$\begin{aligned} F(z,w) &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{a^j b^k}(z-z_0)^j (w-w_0)^k \\ &= \frac{M}{\left(1-\frac{z-z_0}{a}\right)\left(1-\frac{w-w_0}{b}\right)}\ , \end{aligned}$$

שמקדמיה $C_{j,k} = M/a^j b^k$ חיוביים וגדולים יותר ממקדמי $f(z,w)$,

$$|c_{j,k}| \le C_{j,k}.$$

פונקציה זו נקראת מיורנטית לפונקציה $f(z,w)$. נשווה את בעיית ההתחלה

$$W'(z) = F(z,W), \qquad W(z_0) = w_0, \tag{7.5}$$

לבעיה (7.1). אם ל־(7.5) יש פתרון אנליטי $W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-z_0)^n$ אז מקדמיו A_n נקבעים על ידי נוסחאות נסיגה דומות ל־(7.4),

$$\begin{aligned} A_0 &= w_0, \\ A_1 &= C_{0,0}, \\ 2A_2 &= C_{1,0} + c_{0,1}A_1, \\ 3!\,A_3 &= C_{2,0} + 2C_{1,1}A_1 + C_{0,2}{A_1}^2 + C_{0,1}2A_2, \quad \ldots \end{aligned} \tag{7.6}$$

בשתי מערכות נוסחאות הנסיגה (7.4), (7.6) כל a_i, A_i נקבע על ידי ביטוי פולינומי של קודמיו, $a_0, \ldots, a_{i-1}$, $A_0, \ldots, A_{i-1}$ בהתאמה. כמו כן $a_0 = A_0 = w_0$ ו־$|c_{j,k}| \le C_{j,k}$. מכאן

נובע באינדוקציה כי $|a_n| \le A_n$ לכל n. לכן הטור המבוקש $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ מתכנס בהחלט לפחות באותו רדיוס בו מתכנס הטור $W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-z_0)^n$.

אולם את (7.5) אפשר לפתור במפורש על ידי הפרדת משתנים:

$$\int_{w_0}^{W} \left(1 - \frac{W-w_0}{b}\right) dW = M \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{1 - \frac{z-z_0}{a}}$$

שפתרונה המפורש הוא

$$W = w_0 + b\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2Ma}{b} \log\left(1 - \frac{z-z_0}{a}\right)}\right).$$

פונקציה זו אנליטית כל עוד $1 + \frac{2Ma}{b} \log\left(1 - \frac{z-z_0}{a}\right) \neq 0$ כלומר בעגול

$$|z - z_0| < a\left(1 - e^{b/2Ma}\right).$$

הטור המתאים ל־$W(z)$ מתכנס ברדיוס זה. לכן גם הטור $w(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$ שפותר באופן פורמלי את בעיית ההתחלה (7.1) מתכנס לפחות באותו רדיוס.

עבור מערכת של n משוואות אנליטיות ההוכחה מבוצעת על פי עקרון דומה. □

7.2 פתרון משוואות לינאריות בעזרת טורי חזקות

בסעיף זה נדון בבעיית התחלה למשוואות לינאריות מנורמלות מסדר שני,

$$\begin{aligned} &w''(z) + p(z)w(z)' + q(z)w(z) = 0, \\ &w(z_0) = A, \quad w'(z_0) = B \end{aligned} \tag{7.7}$$

בה $p(z), q(z)$ אנליטיות. משוואות לינאריות מסדר גבוה יותר מטופלות בשיטה דומה.

ההצבה $w_1 = w,\ w_2 = w'$ הופכת את המשוואה (7.7) למערכת של שתי משוואות מסדר ראשון,

$$\begin{aligned} &{w_1}' = w_2, \\ &{w_2}' = -q(z)w_1 - p(z)w_2. \end{aligned} \tag{7.8}$$

רכיבי אגף ימין, $f_1(z, w_1, w_2) = w_2,\ f_2(z, w_1, w_2) = -q(z)w_1 - p(z)w_2$ הם פונקציות אנליטיות לכל $|w_1|, |w_2| < \infty$ ולערכי z שעבורם $p(z), q(z)$ הם אנליטיים.

הגדרה 7.3 נקודה z_0 שבה ובסביבתה שתי הפונקציות $p(z), q(z)$ אנליטיות נקראת נקודה רגולרית *(נקודה רגילה, regular point)* של המשוואה (7.7).

המשפט הבא מבטיח קיום ויחידות פתרון סביב נקודת התחלה רגולרית.

משפט 7.4 אם הפונקציות $p(z), q(z)$ אנליטיות בעגולים $|z-z_0|<R_1,\ |z-z_0|<R_2$, בהתאמה, אז לבעיית ההתחלה (7.7) קיים פתרון יחיד, הוא מוגדר לפחות בעגול $|z-z_0|<\min\{R_1,R_2\}$ ואנליטי שם.

הוכחה. לכל $r<R_1,R_2$, למערכת לינארית מתאים קבוע ליפשיץ גלובלי

$$L=\max_{|z-z_0|\le r}\left|\left|\begin{pmatrix}0 & 1\\ -q(z) & -p(z)\end{pmatrix}\right|\right|$$

המתאים לכל $|w_1|,|w_2|<\infty$ ולעגול הסגור $|z-z_0|\le r$. כמו בהוכחת משפט 3.11, הקרובים העוקבים מתכנסים במידה שווה בכל העגול לפתרון האנליטי המבוקש. □

נדגים מציאת פתרון בעזרת טורי חזקות למשוואה דיפרנציאלית פשוטה, שפתרונה כבר ידוע מדוגמא 4.13.

דוגמא 7.1 מקדמי המשוואה

$$w''(z)+w(z)=0$$

הן הפונקציות $p(z)\equiv 0,\ q(z)\equiv 1$ והן אנליטיות בכל מישור z. למען הנוחיות ננסה לפתח את פתרונות המשוואה לטורי חזקות סביב הנקודה הרגולרית $z_0=0$. סביב נקודה זו אנו עוסקים ב"טור החזקות" $q(z)=1+0\cdot z+0\cdot z^2+\cdots$, $|z|<\infty$.

בנקודה $z_0=0$ נקבע תנאי התחלה $w(0)=A,\ w'(0)=B$. לפי משפט 7.4 לבעיית ההתחלה יש פתרון אנליטי הניתן להצגה כטור חזקות

$$w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\qquad |z|<\infty.$$

נציב את נגזרותיו $w'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot nz^{n-1},\ w''(z)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n\cdot n(n-1)z^{n-2}$ במשוואה הדיפרנציאלית הנתונה:

$$w''+w=\sum_{n=2}^{\infty}a_n\cdot n(n-1)z^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=0. \tag{7.9}$$

(הסכום השמאלי מתחיל ב־$n=2$ כי שני האינדקסים $n=0,1$ אינם תורמים דבר!). להמשך החישובים יהיה נוח כי חזקות z יכתבו באותה צורה בכל טור. מכיון ש־n מסמל אינדקס רץ ולבחירת הסימון אין כל משמעות מחוץ לסכימה, נחליף כל הופעה של n בטור $\sum_{n=2}^{\infty}a_n\cdot n(n-1)z^{n-2}$ בסימון $n+2$; תחום ערכי האינדקסים $n=2,3,4,\ldots$ הופך בזה ל־$n+2=2,3,4,\ldots$, כלומר $n=0,1,2,\ldots$. לפיכך

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n\cdot n(n-1)z^{n-2}\equiv\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}\cdot(n+2)(n+1)z^n.$$

למעשה, בשני האגפים כתובים אותאותם אברים, $2a_2 + 3\cdot 2a_3 z + 4\cdot 3a_4 z^2 + \cdots$. פעולה זו נקראת הזזת אינדקסיס ולאחריה המשוואה (7.9) הופכת למשוואה

$$w'' + w = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0,$$

כלומר

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big[a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n\Big] z^n = 0, \qquad |z| < \infty.$$

מכיון שטור חזקות של פונקציה נקבע באופן יחיד, כל מקדם באגף שמאל הוא אפס:

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

בזה קיבלנו את נוסחת הנסיגה (רקורסיה)

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.10}$$

נציב ב־(7.10) בזה אחר זה את הערכים $n = 0, 1, 2, \ldots$ ונחשב

$$a_2 = \frac{-a_0}{1\cdot 2}, \quad a_3 = \frac{-a_1}{2\cdot 3}, \quad a_4 = \frac{-a_2}{3\cdot 4} = \frac{+a_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \quad a_5 = \frac{-a_3}{4\cdot 5} = \frac{+a_1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},$$

וכך הלאה. בעזרת אינדוקציה מתקבל כי

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, a_0, \qquad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, a_1, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

שני המקדמים הראשונים של טור טילור, a_0, a_1, הם בדיוק תנאי ההתחלה

$$a_0 = w(0) = A, \qquad a_1 = w'(0) = B.$$

נציב כל זאת בטור המבוקש ונגיע לפתרון בעיית ההתחלה

$$\begin{aligned} w(z) =& A\left[1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{2k} + \cdots\right] \\ &+ B\left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1} + \cdots\right], \end{aligned}$$

שהוא כצפוי $w(z) = A\cos z + B\sin z$. אם מתיחסים אל ערכי ההתחלה A, B כאל שני פרמטרים שרירותיים, זה הפתרון הכללי של המשוואה הדיפרנציאלית. □

נוסחאות הנסיגה אינן תמיד כה פשוטות ונוחות לשימוש. למשל,

דוגמא 7.2 מקדמי המשוואה $w'' + e^z w = 0$ הם $p(z) \equiv 0,\ q(z) = e^z$, והם ניתנים לפיתוח לטור חזקות סביב כל נקודה, למשל סביב $z_0 = 0$, לכל $|z| < \infty$,

$$q(z) = e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots.$$

נחפש פתרון $w(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$:

$$\begin{aligned} w'' + e^z w &= \big(2a_2 + 3\cdot 2a_3 z + 4\cdot 3a_4 z^2 + 5\cdot 4a_5 z^3 + \cdots\big) \\ &\quad + \big(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots\big)\big(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots\big) = 0. \end{aligned}$$

מקדמי החזקות הראשונות הם

$$\begin{aligned} z^0 &: \quad 2a_2 + a_0 = 0, \\ z^1 &: \quad 3\cdot 2a_3 + a_1 + a_0 = 0, \\ z^2 &: \quad 4\cdot 3a_4 + a_2 + a_1 + \frac{1}{2}a_0 = 0, \\ z^3 &: \quad 5\cdot 4a_5 + a_3 + a_2 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0 = 0, \ \ldots \end{aligned}$$

וכולי. מכאן באופן רקורסיבי,

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2}, \\ a_3 &= -\frac{1}{6}(a_0 + a_1), \\ a_4 &= -\frac{1}{12}(a_0/2 + a_1 + a_2) = -\frac{1}{12}\,a_1, \\ a_5 &= -\frac{1}{20}(a_3 + a_2 + a_1/2 + a_0/6) = -\frac{1}{20}\big(-(a_0 + a_1)/6 - a_0/2 + a_1/2 + a_0/6\big) \\ &= \frac{a_0}{40} - \frac{a_1}{60} \end{aligned}$$

ופתרונות המשוואה לכל $|z| < \infty$ הם

$$w(z) = a_0\left(1 - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{40} + \cdots\right) + a_1\left(z - \frac{z^3}{6} - \frac{z^4}{12} - \frac{z^5}{60} + \cdots\right). \qquad \square$$

רבות מהפונקציות של האנליזה הקלסית מקורן במשוואות דיפרנציאליות מסדר שני.

דוגמא 7.3 המשוואה

$$(1 - z^2)w'' - 2zw' + k(k+1)w = 0\ , \tag{7.11}$$

בה k מספר קבוע, נקראת משוואת לז'נדר (Legendre)[2] מסדר k. כדי להשתמש במשפט 7.4, נכתוב את (7.11) בצורה מנורמלת כ־

$$w'' - \frac{2z}{1 - z^2}\,w' + \frac{k(k+1)}{1 - z^2}\,w = 0. \tag{7.12}$$

[2] Adrien-Marie Legendre, 1752–1833

המקדמים $p(z) = -2z/(1-z^2),\ q(z) = k(k+1)/(1-z^2)$ הן פונקציות רציונליות וניתנות לפיתוח לטורי חזקות סביב כל נקודה למעט $z = 1, -1$. אנו נדון בבעיה סביב $z_0 = 0$. סביב נקודה זו, אלה הפונקציות האנליטיות

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{k(k+1)}{1-z^2} = k(k+1)(1+z^2+z^4+\cdots)\ , \qquad |z|<1\ , \\ p(z) &= \frac{-2z}{1-z^2} = -2(z+z^3+z^5+\cdots)\ , \qquad |z|<1\ . \end{aligned} \tag{7.13}$$

לפי משפט 7.4 פתרונות המשוואה ניתנים לפיתוח לטורי חזקות סביב $z_0 = 0$ והם יתכנסו לפחות בתחום $|z|<1$. נחפש לפיכך פתרון $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

מטעמי נוחיות נציב טור זה ונגזרותיו במשוואה המקורית (7.11) ולא במשוואה המנורמלת (7.12), כי יותר קל לכפול בגורמים $1-z^2, -2z, 2$ המופיעים ב־(7.11) מאשר בטורים האינסופיים (7.13). בהצבה מקבלים לכל $|z|<1$,

$$\begin{aligned} &(1-z^2)y'' - 2zy' + k(k+1)y = \\ &= (1-z^2)\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)z^{n-2} - 2z\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot nz^{n-1} + k(k+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0. \end{aligned}$$

נפתח את הסוגריים $(1-z^2)$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)z^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)z^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot nz^n + k(k+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0.$$

בטור הראשון נזיז את האינדקס n ב־2, כדי לקבל z^n. בסכום השני לא נזיז אינדקסים, אך נוח להוסיף לטווח הסיכום את $n = 0, 1$ כי המחוברים המתאימים לשני ערכים אלה ממילא מתאפסים. לאחר שינויים אלה נותר

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} \cdot (n+2)(n+1)z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)z^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot nz^n + k(k+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0.$$

סכום ארבעת טורים אלה הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big[a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_n n(n-1) - 2a_n n + k(k+1)a_n\big] z^n = 0.$$

מקדמי כל z^n מתאפסים:

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_n\big[n(n-1) + 2n - k(k+1)\big] = 0,$$

או

$$a_{n+2} = \frac{(n-k)(n+k+1)}{(n+1)(n+2)}\, a_n\ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

נוסחת זו קובעת באופן רקורסיבי את המקדמים,

$$a_2 = -\frac{k(k+1)}{1\cdot 2}\,a_0\ , \qquad a_3 = -\frac{(k-1)(k+2)}{2\cdot 3}\,a_1\ ,$$

$$a_4 = -\frac{(k-2)(k+3)}{3\cdot 4}\,a_2 = \frac{k(k-2)(k+1)(k+3)}{4!}\,a_0\ ,$$

$$a_5 = -\frac{(k-3)(k+4)}{4\cdot 5}\,a_3 = \frac{(k-1)(k-3)(k+2)(k+4)}{5!}\,a_1\ ,\ \ldots$$

כך שמקדמי חזקות זוגיות הן כפולות של a_0 ומקדמי חזקות איזוגיות ־ כפולות של a_1.

אם הקבוע k הוא מספר שלם חיובי, אז $a_{k+2} = 0$ וכתוצאה מכך גם

$$a_{k+4} = a_{k+6} = \ldots = 0.$$

לפיכך אחד הפתרונות של משוואת לז'נדר מסדר k היא פולינום ממעלה k בדיוק. פולינומים אלה (עם נרמול מתאים) נקראים הפולינומים של לז'נדר ומסומנים ב־$P_k(z)$. למשל, עבור $k = 2$, הפתרון הכללי של המשוואה הדיפרנציאלית הוא

$$w(z) = a_0\left[1 - 3z^2\right] + a_1\left[z - \frac{2}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5 + \cdots\right].$$

הפתרון שהוא פולינום מוגדר לכל z. ואכן, משפט 7.4 מבטיח כי כל פתרון מתכנס לפחות ברדיוס $\min\left\{R_1, R_2\right\}$. □

תרגיל 7.4 א. פתור את משוואת Chebycheff, $(1-z^2)w'' - zw' + k^2 w = 0$ בעזרת טור חזקות סביב $z = 0$. הוכח כי כאשר הקבוע k הוא מספר שלם אי שלילי אז אחד משני הפתרונות הוא פולינום ממעלה k.

ב. פתור את משוואת Hermite, $w'' - 2zw' + kw = 0$ בעזרת טור חזקות סביב $z = 0$. הוכח כי כאשר הקבוע k הוא מספר אי שלילי זוגי $2m$, אז אחד משני הפתרונות הוא פולינום ממעלה m.

ג. פתור את המשוואה $(1+z^2)w'' - 4zw' + 6w = 0$ והראה כי שני פתרונותיה הם פולינומים.

7.3 נקודה סינגולרית רגולרית

בסעיף הקודם דנו בפתרונות סביב נקודה רגולרית z_0, כשכל מקדמי משוואה לינארית אנליטיים בנקודה ובסביבתה. בסעיף זה נניח כי z_0 נקודה סינגולרית מבודדת, כלומר כל מקדם אנליטי וחד ערכי בסביבה נקובה $0 < |z - z_0| < R$ אך לא בנקודה z_0 עצמה.

נזכיר מספר תכונות והגדרות מתורת הפונקציות האנליטיות המדגישות את ייחודיות הפתרונות סביב נקודה סינגולרית מבודדת.

א. בתחום טבעתי (שאינו פשוט קשר), פונקציה $f(z)$ יכולה להיות אנליטית בכל נקודה מבלי להיות מוגדרת באופן חד ערכי. כאשר יוצאים מנקודה $z = z_0 + re^{i\theta}$ ומגדילים את θ ב־2π, כלומר מקיפים את הנקודה z_0, ייתכן כי הפונקציה תשוב אל הנקודה $z = z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}$ עם ערך שונה. ראה למשל את z^r עם r לא שלם או $\log z$ סביב הנקודה $z = 0$.

ב. על פי משפט לורן (Laurent) אם $f(z)$ פונקציה אנליטית וחד ערכית בתחום טבעתי $r < |z - z_0| < R$, $0 \le r < R \le \infty$, אז ניתן לייצגה שם בעזרת טור לורן מתכנס

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

ג. בתוך תחום ההתכנסות, חיבור וחיסור של טורי לורן וכפל בחזקה שלמה $(z - z_0)^p$ נעשה כמו עבור טורי טילור.

ד. אם בטור לורן מופיעות מספר סופי m של חזקות שליליות,

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

הנקודה הסינגולרית z_0 נקראת קוטב מסדר m (pole of order m). אם בטור מספר אינסופי של חזקות שליליות, הנקודה נקראת סינגולריות עיקרית.

נביא תוצאה המתארת את התנהגות הפתרונות סביב נקודה סינגולרית.

דוגמא 7.5 תהי מערכת מסדר ראשון $\vec{v}\,'(z) = A(z)\vec{v}$ עם נקודה סינגולרית ב־z_0, כלומר כל אברי המטריצה $A(z)$ אנליטיים וחד ערכיים בעגול הנקוב $0 < |z - z_0| < a$ אך לא בנקודה z_0 עצמה. כאשר יוצאים מ־$z = z_0 + re^{i\theta}$, מקיפים את z_0 וחוזרים אל $z = z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}$, אז הודות לחד־ערכיות,

$$A\left(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}\right) \equiv A\left(z_0 + re^{i\theta}\right).$$

נעבור למשתנה חדש $z - z_0 = e^{\zeta}$, $\vec{v}(z) = \vec{w}(\zeta)$. במשתנים אלה

$$\frac{d\vec{w}}{d\zeta} = \frac{d\vec{v}}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta} = A(z_0 + e^{\zeta})\,\vec{w}(\zeta) \cdot e^{\zeta} = B(\zeta)\vec{w}(\zeta)$$

עם $B(\zeta) \equiv e^{\zeta} A(z_0 + e^{\zeta})$, ולפי האמור למעלה, $B(\zeta + 2\pi i) = B(\zeta)$.

מכיון שהמטריצה $B(\zeta)$ מחזורית עם מחזור $2\pi i$, לפי משפט Floquet (משפט 6.19) למערכת החדשה יש פתרון יסודי $\Phi(\zeta)$ מהצורה

$$\Phi(\zeta) = P(\zeta)e^{\zeta R}$$

בה המטריצה $P(\zeta)$ מחזורית, $P(\zeta + 2\pi i) = P(\zeta)$, ו־$R$ מטריצה קבועה. במונחי המשתנה המקורי z, הפתרון היסודי הוא

$$\tilde{\Phi}(z) = \tilde{P}(z)e^{\log(z - z_0)R}$$

כאשר $\tilde{P}\left(z_0+re^{i(\theta+2\pi)}\right) \equiv \tilde{P}\left(z_0+re^{i\theta}\right)$, כלומר $\tilde{P}(z)$ חד ערכי בעגול הנקוב $0<|z-z_0|<a$ ו־$e^{\log(z-z_0)R}$ מוגדר, כמו במשפט 6.14, על ידי הטור האקספוננציאלי

$$\exp\left(\log(z-z_0)R\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\log(z-z_0)]^n}{n!}\,R^n.$$

בגלל הדמיון לזהות הסקלרית, נוהגים לסמן טור מטריצות זה כ־$(z-z_0)^R$ ולכתוב את הפתרון היסודי כ־

$$\tilde{\Phi}(z)=\tilde{P}(z)(z-z_0)^R.$$

אם למשל $R=\mathrm{diag}\{r_1,\ldots,r_d\}$ אז $(z-z_0)^R=\mathrm{diag}\{\,(z-z_0)^{r_1},\ldots,(z-z_0)^{r_d}\}$.
□

עבור משוואות לינאריות מנורמלות

$$w^{(n)}+p_1(z)w^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(z)w'+p_n(z)w=0$$

לא נעסוק כאן בנקודות סינגולריות כלליות, אלא רק בתת־קבוצה של נקודות סינגולריות שבסביבתן אפשר לתאר את פתרונות המשוואה באופן מפורט.

הגדרה 7.5 z_0 נקראת נקודה סינגולרית רגולרית (regular singular point) עבור משוואה לינארית מנורמלת אם המשוואה היא מהצורה

$$w^{(n)}+\frac{P_1(z)}{z-z_0}\,w^{(n-1)}+\cdots+\frac{P_{n-1}(z)}{(z-z_0)^{n-1}}\,w'+\frac{P_n(z)}{(z-z_0)^n}\,w=0 \tag{7.14}$$

כאשר הפונקציות $P_k(z)$ אנליטיות ב־z_0, דהיינו למקדם $p_k(z)=\dfrac{P_k(z)}{(z-z_0)^k}$ יש קוטב מסדר k לכל היותר, $k=1,2,\ldots,n$.

תרגיל 7.6 אם z_0 נקודה סינגורית רגולרית של המשוואה (7.14) אז ניתן להביא משוואה זו למערכת מסדר ראשון מהצורה $\mathbf{v}\,'(z)=\dfrac{1}{z-z_0}\,A(z)\mathbf{v}$ בה כל אברי המטריצה $A(z)$ אנליטיים ב־z_0 ובסביבתה.

נגדיר וקטור עמוד $\mathbf{v}(z)=(v_1,\ldots,v_n)^T$ על ידי $v_k=(z-z_0)^{k-1}w^{(k-1)}$, ונגזרותיהם $v_k\,'=(k-1)(z-z_0)^{k-2}w^{(k-1)}+(z-z_0)^{k-1}w^{(k)}$, $k=1,\ldots,n$. אז

$$v_k\,'=\frac{1}{z-z_0}\Big((k-1)v_k+v_{k+1}\Big),\qquad k=1,2,\ldots,n-1,$$
$$v_n\,'=\frac{1}{z-z_0}\Big((n-1)v_n-\sum_{k=1}^{n}P_{n-k+1}(z)v_k\Big),$$

וקיבלנו את רכיבי $A(z)$ האנליטיים. □

אנו מטפלים בנקודות סינגולריות רגולריות כי משוואות רבות עם נקודות כאלה מופיעות בשימושים פיזיקליים ומתמטיים. הנסיון אף מראה כי לעיתים הנקודות הסינגולריות רגולריות הן הנקודות המענינות של המשוואה הדיפרנציאלית ודווקא התנהגות הפתרונות סביבן היא החשובה ביותר. גם כאשר למשוואה דיפרנציאלית יש נקודות רגולריות וגם נקודות סינגולריות רגולריות)לכאורה מסובכות יותר(, לפעמים עדיף לפתור את המשוואה דווקא סביב הנקודות ה"מסובכות".

דוגמא 7.7 בדוגמא 7.3, פתרנו את משוואת לז'נדר (7.11) שצורתה המנורמלת היא

$$w'' + \frac{2z}{z^2-1}\,w' - \frac{k(k+1)}{z^2-1}\,w = 0,$$

בעזרת טור חזקות סביב הנקודה הרגולרית $z = 0$. הנקודות $z = 1, -1$ הן נקודות סינגולריות רגולריות של משוואה זו. למשל בקרבת $z = 1$ נרשום

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{2z}{z^2-1} = \frac{1}{z-1}\,\frac{2z}{z+1}, \\ q(z) &= \frac{-k(k+1)}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)^2}\,\frac{-k(k+1)(z-1)}{z+1}\ . \end{aligned}$$

הגורמים $P_1(z) = \dfrac{2z}{z+1},\ P_2(z) = \dfrac{-k(k+1)(z-1)}{z+1}$ הן פונקציות רציונליות בעלות מכנים שאינם מתאפסים ב־$z = 1$, ולכן ניתנים להכתב כטורי חזקות סביב $z = 1$. □

דוגמא 7.8 למשוואות הדיפרנציאליות הבאות יש נקודות סינגולריות רגולריות.

א. משוואת Bessel – $z^2w'' + zw' + (z^2 - \alpha^2)w = 0$ סביב $z = 0$,

ב. משוואת Chebychef – $(1 - z^2)w'' - zw' + \alpha^2 w = 0$ סביב כל אחת מן הנקודות $z = 1, -1$,

ג. משוואת Laguerre – $zw'' + (1 - z)w' + \alpha w = 0$ סביב $z = 0$,

ד. המשוואה ההיפרגאומטרית – $z(1 - z)w'' + [\gamma - z(1 + \alpha + \beta)]w' - \alpha\beta w = 0$, α, β, γ קבועים, ולה שתי נקודות סינגולריות רגולריות $z = 0, 1$.

7.4 פתרון בשיטת Frobenius

למען הפשטות נסתפק בחקירת משוואות מסדר שני עם נקודה סינגולרית רגולרית. כמו כן נניח למען נוחיות הכתיבה כי הנקודה הסינגולרית רגולרית היא $z_0 = 0$. לפיכך נטפל במשוואות בצורה

$$w'' + \frac{P(z)}{z}\,w' + \frac{Q(z)}{z^2}\,w = 0 \tag{7.15}$$

שבהן $P(z), Q(z)$ פונקציות אנליטיות הניתנות לפיתוח לטורי חזקות סביב $z=0$ כ־

$$P(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots ,$$
$$Q(z) = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots .$$

שיטת הפתרון של פרובניוס (Frobenius)[3] מבוססת על חיפוש פתרון מהצורה

$$w(z) = z^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad a_0 \neq 0, \tag{7.16}$$

בו $r, a_0, a_1, \ldots$ לא ידועים בינתיים. מוטיוויציה אינטיאוטיבית לחיפוש פתרון בעל מבנה כזה נובעת ממשוואת אוילר שצורתה המנורמלת היא

$$w'' + \frac{p_0}{z}\, w' + \frac{q_0}{z^2}\, w = 0. \tag{7.17}$$

כאן $P(z) = p_0,\ Q(z) = q_0$ קבועים וניתנים להכתב באופן טרויאלי כטורי חזקות, לכן על פי ההגדרה הנקודה $z=0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית למשוואה זו. כזכור, למשוואת אוילר אנו מחפשים פתרונות בצורה $w = z^r$, לכן סביר לחפש למשוואה (7.15) פתרון מהצורה (7.16). כדי להמנע ממכנים נכפול את משוואה (7.15) ב־z^2, נסמן את האופרטור הלינארי

$$L[w] \equiv z^2 w'' + zP(z)w' + Q(z)w \tag{7.18}$$

ונציב בו $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r}$. הודות ללינאריות,

$$L\big[w(z)\big] = L\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L\left[z^{n+r}\right]$$

אך

$$L\left[z^{\lambda}\right] = \lambda(\lambda-1)z^{\lambda} + \lambda z^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k + z^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k = z^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} f_k(\lambda) z^k$$

כאשר $f_0(\lambda) = \lambda(\lambda-1) + \lambda p_0 + q_0$, $f_k(\lambda) = \lambda p_k + q_k$, לכל $k = 1, 2, \ldots$. לסיכום,

$$\begin{aligned} L\big[w(z)\big] &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n L\left[z^{n+r}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z^{n+r}\sum_{k=0}^{\infty} f_k(n+r) z^k\right) \\ &= z^r \sum_{n}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_n f_k(n+r) z^{n+k} \\ &= z^r \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{m} a_n f_{m-n}(n+r)\right) z^m. \end{aligned} \tag{7.19}$$

[3] Ferdinand Georg Frobenius, 1849-1917

הטור $w(z)$ מקיים את המשוואה (7.15) באופן פורמלי אם $L[w(z)] \equiv 0$ ומקדמי כל חזקות z מתאפסים:

$$\begin{aligned}
z^0: &\quad a_0 f_0(r) = 0,\\
z^1: &\quad a_1 f_0(r+1) + a_0 f_1(r) = 0,\\
z^2: &\quad a_2 f_0(r+2) + a_1 f_1(r+1) + a_0 f_2(r) = 0,\\
&\quad \vdots\\
z^m: &\quad a_m f_0(r+m) + a_{m-1} f_1(r+m-1) + \cdots + a_0 f_m(r) = 0, \ \ldots
\end{aligned} \tag{7.20}$$

הנחנו כי $a_0 \neq 0$, למשל $a_0 = 1$, לכן המשוואה הראשונה היא

$$f_0(r) \equiv r(r-1) + rp_0 + q_0 = 0. \tag{7.21}$$

משוואה זו נקראת המשוואה האינדיציאלית (indicial equation) ושני שרשיה r_1, r_2 הם האינדקסים של הנקודה הסינגולרית הרגולרית. נקח את אחד האינדקסים, נאמר r_1. אם $f_0(r_1+1),\ f_0(r_1+2), \ldots \neq 0$ אז המקדמים $a_1, a_2, \ldots$ נקבעים באופן רקורסיבי על ידי על ידי $a_0 = 1$,

$$a_n = -\frac{1}{f_0(r_1+n)} \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} f_k(r_1+n-k), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{7.22}$$

ומתקבל פתרון

$$w_1(z) = z^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) z^n$$

המקיים באופן פורמלי את המשוואה הדיפרנציאלית (7.18).

נברר את משמעות הדרישה כי $f_0(r_1+n) \neq 0$. $f_0(r)$ הוא פולינום ממעלה שניה ששני אפסיו היחידים הם r_1, r_2, לפיכך פרוש התנאי שהצבנו הוא כי $r_1 + n \neq r_2$, כלומר הפרש השרשים $r_2 - r_1$ אינו מספר שלם חיובי.

יהי למשל $\mathcal{R}e\{r_2\} \leq \mathcal{R}e\{r_1\}$. אז לאינדקס ה"ימני" r_1 ברור ש־ $f_0(r_1+n) \neq 0$ לכל $n = 1, 2, \ldots$ ולכן פתרון פורמלי אחד $w_1(z) = z^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) z^n$ תמיד קיים. אם ההפרש $r_1 - r_2$ אינו מספר שלם חיובי אז $f_0(r_2+n) \neq 0$ וגם לאינדקס ה"שמאלי" r_2 מתאים פתרון שני בצורה $w_2(z) = z^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2) z^n$. אך כאשר האינדקסים r_1, r_2 נבדלים במספר שלם או שווים זה לזה, השיטה שלמעלה אינה נותנת לנו פתרון שני ונצטרך למצוא אותו בדרך אחרת.

נוכיח כי הטורים הפורמליים שלמעלה אכן מתכנסים ומייצגים פתרונות אמיתיים. נניח כי הטורים $P(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$, $Q(z) = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots$ מתכנסים ברדיוסים R_1, R_2 בהתאמה. מטרתנו היא להוכיח כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ שמקדמיו מוגדרים על ידי (7.22) מתכנס לפחות ברדיוס $\min\{R_1, R_2\}$.

כזכור $f_k(\lambda) = \lambda p_k + q_k$, $f_0(\lambda) = (\lambda - r_1)(\lambda - r_2)$, לכן (7.22) ייכתב כ־

$$a_n = -\frac{1}{n(n+r_1-r_2)} \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}\Big((r_1+n-k)p_k + q_k\Big), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.23}$$

הטורים $\sum p_k z^k$, $\sum q_k z^k$ מתכנסים בהחלט עבור כל קבוע $0 < R < \min\{R_1, R_2\}$, כלומר $\sum_{n=0}^{\infty} |p_k| R^k = M_1$, $\sum_{n=0}^{\infty} |q_k| R^k = M_2$. מההערכה $|p_k|, |q_k| \le M/R^k$ נובע כי

$$|a_n| \le \frac{1}{|n(n+r_1-r_2)|} \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{R^k}\Big(|r| + n - k + 1\Big)|a_{n-k}| \ .$$

יהי N שלם חיובי כך ש־$N - 1 \le |r_1 - r_2| < N$. נגדיר סדרת מספרים חיוביים b_n על ידי

$$\begin{aligned}
&b_0 = a_0 = 1, \\
&b_n = |a_n|, \qquad\qquad n = 1, 2, \ldots, N-1 \\
&b_n = \frac{1}{|n(n+r_1-r_2)|} \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{R^k}\Big(|r| + n - k + 1\Big) b_{n-k}, \qquad n = N, N+1, \ldots \ .
\end{aligned}$$

כמובן ש־ $|a_n| \le b_n$ לכל n. לנוחיותינו נרשום גם את b_{n-1}:

$$b_{n-1} = \frac{1}{|(n-1)(n-1+r_1-r_2)|} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{M}{R^k} \ \Big(|r| + n - k\Big) b_{n-1-k}. \tag{7.24}$$

עבור $n \ge N$ נפריד את המחובר הראשון של b_n בהגדרת b_n ובעזרת (7.24) נקבל

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{M\big(|r_1| + n\big)}{|n(n+r_1-r_2)|R} b_{n-1} + \frac{1}{|n(n+r_1-r_2)|} \sum_{k=2}^{n} \frac{M}{R^k}\Big(|r_1| + n - k + 1\Big) b_{n-k} \\
&= \frac{M\big(|r_1| + n\big)}{|n(n+r_1-r_2)|R} b_{n-1} + \frac{1}{|n(n+r_1-r_2)|R} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{M}{R^k}\Big(|r_1| + n - k\Big) b_{n-1-k} \\
&= \frac{M\big(|r_1| + n\big)}{|n(n+r_1-r_2)|R} b_{n-1} + \frac{|(n-1)(n-1+r_1-r_2)|}{|n(n+r_1-r_2)|R} b_{n-1} \ .
\end{aligned}$$

מכאן מתקבל כי $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1}{R}$ ולפי מבחן המנה טור החזקות $\sum b_n z^n$ מתכנס ברדיוס R. מכיון ש־ $|a_n| \le b_n$, הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) z^n$ מתכנס לפחות ברדיוס R. אם ההפרש $r_1 - r_2$ אינו מספר שלם חיובי, חשבון דומה עם r_1 מוחלף ב־r_2 מוכיח את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2) z^n$ המתאים לפתרון השני. בזה הוכחנו כי

משפט 7.6 יהי $\mathcal{R}e\{r_2\} \le \mathcal{R}e\{r_1\}$. אז למשוואה הדיפרנציאלית (7.15) יש פתרון

$$w_1(z) = z^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) z^n$$

עם $a_0(r_1) \neq 0$, המתכנס לפחות ברדיוס $\min\{R_1, R_2\}$.
אם ההפרש $r_1 - r_2$ אינו מספר שלם חיובי או אפס, אז למשוואה קיים פתרון שני מהצורה $w_2(z) = z^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2) z^n$ וגם הוא מתכנס לפחות ברדיוס הנ"ל. □

שיטת פרובניוס מתאימה גם לטיפול בנקודה סינגולרית רגולרית של משוואה ממעלה n. במקרה זה המשוואה האינדיציאלית תהיה פולינום ממעלה n ששרשיה הם $r_1, \ldots, r_n$. כאן נצטרך להבחין בין המצבים בהם ההפרשים $r_i - r_j$ הם מספרים שלמים או לא.

הערה. שיטת פרובניוס אינה מתאימה לנקודות שאינן סינגולריות רגולריות. למשל, עבור המשוואה

$$z^2 w'' + (3z - 1)w' + w = 0,$$

הנקודה $z = 0$ אינה רגולרית ואינה סינגולרית רגולרית, אך ההצבה $w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מובילה לנוסחת הנסיגה $a_{n+1} = (n+1)a_n$. מכאן נובע כי $a_k = k!\, a_0$ ומתקבל טור פורמלי אחד,

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} k!\, z^k \ .$$

אך טור זה מתבדר עבור כל $z \neq 0$ ואינו מייצג פתרון של המשוואה.

7.5 אינדקסים הנבדלים במספר שלם

כאשר שני האינדקסים שווים או נבדלים בשלם, השיטה שלמעלה מאפשרת למצוא רק פתרון אחד אשר מתאים ל־r_1. את הפתרון השני עלינו למצוא בדרך אחרת.

נטפל תחילה במצב בו שני האינדקסים r_1, r_2 שוים. במקרה זה המשוואה האינדיציאלית היא $f_0(r) = (r - r_1)^2 = 0$. כמו למעלה נסמן $w(z, r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) z^{n+r}$ כשהפעם מתייחסים אל r כמשתנה. כמו ב־(7.19),

$$L\big[w(z,r)\big] = z^r \left[a_0 f_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{m} a_n(r) f_{m-n}(n+r) \right) z^m \right].$$

נקבע $a_0 = 1$ וכדי שמקדם z^m, $m \geq 1$, יתאפס, $a_1(r), a_2(r), \ldots$ ייבחרו כך ש־$\sum_{k=0}^{m} a_k(r) f_{m-k}(k+r) = 0$. לאחר החלפת k ב־$m-k$ נחלץ את $a_m(r)$:

$$\begin{aligned} a_m(r) &= -\frac{1}{f_0(r+m)} \sum_{k=1}^{m} a_{m-k}(r) f_k(r+m-k) \\ &= -\frac{1}{(r+m-r_1)^2} \sum_{k=1}^{m} a_{m-k}(r) \Big((r+m-k)p_k + q_k \Big), \quad m \geq 1. \end{aligned} \tag{7.25}$$

לפי בחירה זו נותר רק הביטוי

$$L\big[w(z,r)\big] = a_0 f_0(r) z^r = (r - r_1)^2 z^r \ . \tag{7.26}$$

כמו בטיפול במשוואות לינאריות עם מקדמים קבועים ופולינום אופייני עם שרשים מתלכדים (סעיף 4.5), נגזור את (7.26) לפי r. הדבר אפשרי כי לפי נוסחאות הנסיגה $a_n(r)$ הן פונקציות רציונליות של r. האופרטורים $L[\ ] = \frac{d^n}{dz^n} + \cdots$ ו־$\frac{\partial}{\partial r}$ מתחלפים, לפיכך

$$L\left[\frac{\partial}{\partial r}w(z,r)\right] = \frac{\partial}{\partial r}L\left[w(z,r)\right] = \frac{\partial}{\partial r}(r-r_1)^2 z^r = [2(r-r_1)+(r-r_1)^2\log z]z^r$$

עבור $r = r_2 = r_1$ מתקבל כי $L\left[\frac{\partial}{\partial r}w(z,r)\right]_{r=r_1} = 0$ כלומר $w_2(z) = \frac{\partial}{\partial r}w(z,r_1)$ הוא פתרון של משוואה (7.15). אך

$$w_2(z) = \frac{\partial}{\partial r}w(z,r_1) = z^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n{}'(r_1)z^n + (\log z)\, z^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)z^n.$$

הביטוי האחרון הוא הפתרון $w_1(z)$ שכבר מצאנו קודם ו־$a_0{}'(r_1) = 0$. לסיכום, במקרה ש־$r_1 = r_2$, מצאנו פתרון שני מהצורה

$$w_2(z) = z^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}'(r_1)z^n + (\log z)\, w_1(z). \tag{7.27}$$

נעבור למקרה בו שני האינדקסים נבדלים במספר שלם, נאמר $r_1 - r_2 = N$, N שלם חיובי. אם נחפש פתרון שני מהצורה $w(z,r_2) = z^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)z^n$ אז נוסחת הנסיגה היא

$$a_n(r) = -\frac{1}{(r+n-r_1)(r+n-r_2)}\sum_{k=1}^{n} a_{n-k}(r)\Big((r+n-k)p_k + q_k\Big). \tag{7.28}$$

המכנה של אבר מספר N, $a_N(r)$ מכיל את הגורם $r+N-r_1 = r-r_2$ ובבואנו לחשב את $a_N(r_2)$ אנו נתקלים בקושי כי מכנהו מתאפס. לכן אין פתרון שני בצורה הנ"ל.

כדי להתגבר על קושי זה נבחר $a_0 = r - r_2$. הנוסחאות הרקורסיביות (7.28) גורמות שכל $a_1(r), a_2(r), ..., a_{N-1}(r)$ מכילים את הגורם $r-r_2$ ולכן גם המקדם $a_N(r)$ והטור הפורמלי $w(z,r) = z^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)z^n$ מוגדרים עבור $r = r_2$. לפי בחירה זו נותר

$$L\big[w(z,r)\big] = a_0 f_0(r)z^r = (r-r_2)f_0(r)z^r\ . \tag{7.29}$$

הצבה ישירה של $r = r_2$ אינה מובילה לפתרון. במקום זאת נגזור את (7.29) לפי r. מתקבל

$$L\left[\frac{\partial}{\partial r}w(z,r)\right] = \big[f_0(r) + (r-r_2)f_0{}'(r) + (r-r_2)f_0(r)\log z\big]z^r\ .$$

עבור $r = r_2$ אגף ימין מתאפס כלומר $w_2(z) = \frac{\partial}{\partial r}w(z,r_2)$ הוא פתרון של משוואה (7.15). במפורש זהו

$$w_2(z) = \frac{\partial}{\partial r}w(z,r_2) = z^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n{}'(r_2)z^n + (\log z)\, z^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)z^n.$$

נסתכל בבבטוי הימני $z^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r_2)z^n$. כאמור למעלה $a_1(r),\ldots,a_{N-1}(r)$ מכילים את הגורם $r-r_2$ ולכן $a_1(r_2)=\ldots=a_{N-1}(r_2)=0$ ומהביטוי האחרון נותר רק $z^{r_2+N}\sum_{n=N}^{\infty}a_n(r_2)z^{n-N}$. מנוסחאות הנסיגה (7.28) נשאר

$$a_n(r_2)=-\frac{1}{(n-N)n}\sum_{k=1}^{n-N}a_{n-k}(r_2)\Big[(r_2+n-k)p_k+q_k\Big],\qquad n=N+1,N+2,\ldots$$

נסמן $\ell=n-N$, $a_n(r_2)=d_{n-N}=d_\ell$. בסימון זה הנוסחה האחרונה הופכת, הודות ל־$r_2+N=r_1$, ל־

$$\begin{aligned}
&d_0=a_N(r_2),\\
&d_\ell=-\frac{1}{\ell(\ell+N)}\sum_{k=1}^{\ell}d_{\ell-k}\Big[(r_1+\ell-k)p_k+q_k\Big],\qquad \ell=1,2,\ldots
\end{aligned}$$

אך זו בדיוק נוסחת הנסיגה (7.23) למקדמי הפתרון הראשון $w(z,r_1)$ עם אבר ראשון $a_N(r_2)$ (במקום 1). לכן הביטוי הימני הוא $a_N(r_2)w_1(z)$ והפתרון השני הוא

$$w_2(z)=z^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n{}'(r_2)z^n+a_N(r_2)\log z\ w_1(z).$$

שיטה זו ניתנת להכללה גם לנקודה סינגולרית רגולרית של משוואה ממעלה גבוהה.

עבור משוואה מסדר שני אפשר למצוא את הפתרון השני גם בשיטת הורדת הסדר כמתואר בדוגמא 4.9. נדגים גם שיטה זו. אם למשוואה

$$w''+\frac{P(z)}{z}\,w'+\frac{Q(z)}{z^2}\,w=0$$

ידוע פתרון $w_1(z)$, אז ההצבה $w(z)=v(z)w_1(z)$ מובילה ל־

$$\begin{aligned}
&\big(v''w_1+2v'w_1{}'+vw_1{}''\big)+\frac{P(z)}{z}\big(v'w_1+vw_1{}'\big)+\frac{Q(z)}{z^2}(vw_1)\\
&=w_1v''+\left(2w_1{}'+\frac{P(z)}{z}\,w_1\right)v'+\left(w_1{}''+\frac{P(z)}{z}\,w_1{}'+\frac{Q(z)}{z^2}\,w_1\right)v\\
&=w_1v''+\left(2w_1{}'+\frac{P(z)}{z}\,w_1\right)v'=0.
\end{aligned}$$

הצבה נוספת $u=v'$ מובילה למשוואה $\dfrac{u'}{u}=-2\dfrac{w_1{}'}{w_1}-\dfrac{P(z)}{z}$.

אך $w_1(z)=z^{r_1}A_1(z)$ כאשר $A_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r_1)z^n$ היא פונקציה אנליטית,

$$w_1{}'(z)=r_1z^{r_1-1}A_1(z)+z^{r_1}A_1{}'(z).$$

מכיון ש־$A_1(0)=a_0\neq 0$, גם $A_1(z)\neq 0$ בסביבת $z=0$, לכן

$$\frac{w_1{}'}{w_1}=\frac{r_1}{z}+\frac{A_1{}'(z)}{A_1(z)}.$$

נסמן $A_2(z) = A_1{}'(z)/A_1(z)$, גם הוא אנליטי. גם

$$\frac{P(z)}{z} = \frac{p_0}{z} + A_3(z)$$

כשאף $A_3(z)$ אנליטי. ביחד,

$$\frac{u'(z)}{u(z)} = \frac{-2r_1 - p_0}{z} + A_4(z).$$

r_1, r_2 הם שרשי המשוואה האינדיציאלית $r(r-1) + rp_0 + q_0 = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$, לכן $r_1 + r_2 = -p_0 + 1$ והמונה הקודם הוא

$$-2r_1 - p_0 = -2r_1 + (r_1 + r_2 - 1) = r_2 - r_1 - 1 = -N - 1,$$

מספר שלם שלילי. לאחר אינטגרציה של

$$\frac{u'(z)}{u(z)} = -\frac{N+1}{z} + A_4(z)$$

מקבלים $\log u(z) = -(N+1)\log z + A_5(z)$, כלומר

$$v'(z) = u(z) = A_6(z)/z^{N+1}$$

בו $A_6(z) = \exp(A_5(z))$ אנליטי, למשל $A_6(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots$. לפיכך

$$v'(z) = \frac{\alpha_0}{z^{N+1}} + \frac{\alpha_1}{z^N} + \cdots + \frac{\alpha_N}{z} + \alpha_{N+1} + \cdots$$

ומקדמו הראשון הוא $\alpha_0 = \exp(A_5(0)) \neq 0$.

מכאן ואילך נפריד בין המקרים $r_1 > r_2$ ו־ $r_1 = r_2$. אם $r_1 > r_2$ אז השלם N הוא חיובי ולאחר אינטגרציה

$$\begin{aligned} v(z) &= -\frac{\alpha_0/N}{z^N} + \frac{\alpha_1/(N-1)}{z^{N-1}} + \cdots + \alpha_N \log z + \alpha_{N+1} z + \cdots \\ &= z^{-N} A_7(z) + \alpha_N \log z. \end{aligned}$$

נחזור ל־$w(z) = v(z)w_1(z)$ על ידי כפל ב־$w_1(z) = z^{r_1} A(z)$. מכיוון ש־$r_1 - N = r_2$, מתקבל פתרון שני

$$w(z) = z^{r_2} A_8(z) + \alpha_N w_1(z) \log z$$

עם $A_8(0) = -\alpha_0 A(0)/N \neq 0$. לעומת זאת לא נקבע האם α_N שונה מ־0 או לא.

לעומת זאת, אם $r_1 = r_2$ אז $N = 0$, $v(z) = \alpha_0 \log z + \alpha_1 z + \cdots$ עם $\alpha_0 \neq 0$. ללא הגבלת כלליות אפשר להניח כי $\alpha_0 = 1$ והפונקציה $\log z$ בהכרח מופיעה בפתרון השני

$$w(z) = z^{r_1} A_8(z) + w_1(z) \log z, \qquad A_8(0) = 0. \qquad \square$$

זו צורת הפתרון שכבר מצאנו ב־(7.27). $\square$

נסכם את צורת הפתרונות:

משפט 7.7 יהיו r_1, r_2 שני האינדקסים המתאימים למשוואה הדיפרנציאלית (7.15).

א. אם הפרש האינדקסים r_1, r_2 אינו מספר שלם אז למשוואה שני פתרונות בלתי תלויים בצורה

$$w_1(z) = z^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)z^n, \qquad w_2(z) = z^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)z^n.$$

ב. אם $r_1 = r_2$ אז הפתרון השני הוא $w_2(z) = z^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}'(r_1)z^n + \log z\ w_1(z)$.

ג. אם $r_1 - r_2 = N$ מספר חיובי שלם אז הפתרון השני הוא מהצורה

$$w_2(z) = z^{r_2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n + c\,\log z\ w_1(z).$$

במקרה האחרון לא נקבע מראש האם הקבוע c שונה מ־0 או לא. □

תרגיל 7.9 פתור את המשוואות הדיפרנציאליות עם נקודות סינגולריות־רגולריות:

א. $3z^2w'' + w' + zw = 0$ סביב $z = 0$. הערה: $r_1 = 2/3,\ r_2 = 0$.

ב. $z^2w'' - 3zw' + (4 - 4z)w = 0$. כאן $r_1 = r_2 = 2$.

ג. $z^2w'' + zw' + (z^2 - 1)w = 0$, עם $r_1 = 1,\ r_2 = -1$. □

7.6 משוואת בסל

משוואת בסל (Bessel equation)[4] מסדר α, α מספר קבוע אי־שלילי, היא

$$z^2w'' + zw' + (z^2 - \alpha^2)w = 0, \tag{7.30}$$

או בצורה מנורמלת, $w'' + \frac{1}{z}w' + \frac{z^2-\alpha^2}{z^2}w = 0$. משוואה זו מופיעה בשימושים רבים.

$z = 0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית ונחפש פתרון $w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r}$. בהצבה

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nz^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nz^{n+r}+z^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{n+r}-\alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{n+r} = 0,$$

ולאחר צמצום ב־z^r וארגון מחדש,

$$(r^2-\alpha^2)a_0+\left[(r+1)^2-\alpha^2\right]a_1z+\sum_{n=2}^{\infty}\Big[\left((n+r)^2-\alpha^2\right)a_n+a_{n-2}\Big]z^n = 0. \tag{7.31}$$

[4] Friedrich Wilhelm Bessel, 1784-1846, אסטרונום

מהשוואת המקדמים ל־0 מתקבלות נוסחאות הנסיגה

$$\begin{aligned} n=0: &\qquad \left[r^2-\alpha^2\right]a_0=0,\\ n=1: &\qquad \left[(r+1)^2-\alpha^2\right]a_1=0,\\ n\geq 2: &\qquad \left[(n+r)^2-\alpha^2\right]a_n+a_{n-2}=0. \end{aligned} \tag{7.32}$$

הראשון בהם הוא המשוואה האינדיציאלית $f_0(r)\equiv r^2-\alpha^2=0$ ושרשיו הם האינדקסים $r_2=-\alpha,\ r_1=\alpha$.

נחשב את הפתרון המתאים לאינדקס הימני $r_1=\alpha$. עבור $n=1$ קיים $\left[(\alpha+1)^2-\alpha^2\right]a_1=0$ ולכן $a_1=0$. עבור $n\geq 2$ נוסחת הנסיגה עם $r=\alpha$ היא

$$n(n+2\alpha)a_n+a_{n-2}=0\ , \qquad n=2,3,\ldots. \tag{7.33}$$

מ־$a_1=0$ נובע כי גם $a_3=a_5=\ldots=0$ ולמקדמים הזוגיים

$$a_{2k}=-\frac{a_{2k-2}}{2^2\,k(k+\alpha)}\ , \qquad k=1,2,\ldots\ .$$

לסיכום,

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}\,k!\,(1+\alpha)(2+\alpha)\ldots(k+\alpha)}\ , \qquad k=1,2,\ldots$$

והפתרון המתאים של משוואת בסל הוא

$$w_1(z)=z^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(z/2)^{2k}}{k!\,(1+\alpha)(2+\alpha)\ldots(k+\alpha)}\ . \tag{7.34}$$

כאשר α מספר שלם, נוח להשתמש בפונקציית העצרת (factorial)

$$(1+\alpha)(2+\alpha)\ldots(k+\alpha)=\frac{(k+\alpha)!}{\alpha!} \tag{7.35}$$

לאחר חלוקה בקבוע $\alpha!\,2^\alpha$ מתקבל הפתרון המכונה פונקציית בסל מסדר α, $J_\alpha(z)$:

$$J_\alpha(z)=(z/2)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(z/2)^{2k}}{k!\,(k+\alpha)!}, \qquad \text{שלם } \alpha. \tag{7.36}$$

למשל,

$$J_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}\,(k!)^2}\,z^{2k}\ .$$

נהוג להכליל את פונקציית העצרת למספרים לא שלמים)ואפילו מרוכבים(על ידי פונקציית גמא (Gamma function), $\Gamma(z)$. עבור $z>0$)או עבור $Re\{z\}>0$(מגדירים

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

בחשבון הדיפרנציאלי מוכיחים כי אינטגרל זה מתכנס גם בסביבת $t = 0$ וגם בסביבת $t = \infty$. אינטגרציה לחלקים מוכיחה את נוסחת הנסיגה

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{7.37}$$

הזהות $\Gamma(z-1) = \Gamma(z)/(z-1)$ מאפשרת להרחיב את הגדרת פונקציית גמא מ־$z > 0$ לערכים שליליים. היא גם מחייבת כי ערכי $\Gamma(0), \Gamma(-1), \ldots$ חייבים להיות אינסופיים.

חישוב ישיר מראה כי $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$ ובעזרת נוסחת הנסיגה מתקבל כי לכל n שלם

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = (n-1)!$$

לפיכך פונקציית גמא אכן מכלילה את פונקציית העצרת. בעזרת נוסחת הנסיגה נחליף את הזהות (7.35) עבור α לא שלם ב־

$$(1+\alpha)(2+\alpha)\cdots(k+\alpha) = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{7.38}$$

ואת הגדרת פונקציית בסל (7.36) ב־

$$J_\alpha(z) = (z/2)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(z/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(k+\alpha+1)}\ . \tag{7.39}$$

דוגמא 7.10 כדי לחשב את $J_{1/2}(z)$ נשתמש בחישוב

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\,dt = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}, \qquad (t = u^2)\ .$$

מכאן

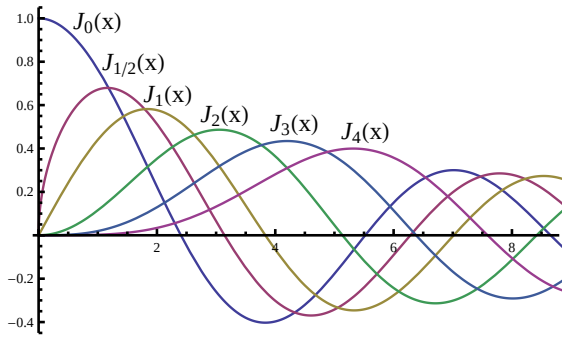
$$\begin{aligned}\Gamma(k+\frac{1}{2}+1) &= (k+\frac{1}{2})\Gamma(k+\frac{1}{2}) = \cdots = (k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})\ \cdots\ \frac{1}{2}\ \Gamma(\frac{1}{2}) \\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)(2k+1)}{2^{k+1}}\sqrt{\pi}\ ,\end{aligned}$$

$$k!\ \Gamma(k+\frac{1}{2}+1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2k-1)(2k)(2k+1)}{2^k\cdot 2^{k+1}}\sqrt{\pi} = \frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}}\sqrt{\pi}$$

ומתקבל

$$\begin{aligned}J_{1/2}(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2^{2k+1}\ (z/2)^{2k}}{(2k+1)!\,\sqrt{\pi}} \\ &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\sin z. \qquad \square\end{aligned}$$

גרפים של פונקציות בסל אחדות עבור משתנה ממשי מופיעות באיור 7.1.



איור 7.1: פונקציות בסל של משתנה ממשי

7.7 פתרון שני למשוואת בסל

מקרה א. כאשר $r_1 - r_2 = 2\alpha$ אינו מספר שלם, פתרון שני מתאים לאינדקס השמאלי $r_2 = -\alpha$. פתרון זה מתקבל מ־(7.39) על ידי החלפת α ב־$(-\alpha)$:

$$J_{-\alpha}(z) = (z/2)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, (z/2)^{2k}}{k! \, \Gamma(k-\alpha+1)} \ . \tag{7.40}$$

מקרה ב. כאשר $r_1 = r_2$, פתרון שני מתקבל בעזרת הנוסחה (7.27),

$$w_2(z) = z^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}'(r_1) z^n + (\log z) \, w_1(z).$$

עבור משוואת בסל מסדר $\alpha = 0$ האינדקסים הם $r_1 = r_2 = 0$, נוסחאות הנסיגה (7.32) קובעות כי

$$a_n(r) = -\frac{a_{n-2}(r)}{(n+r)^2} = \frac{a_{n-4}(r)}{(n+r)^2 \, (n-2+r)^2} = \dots$$

ולכן

$$a_{2k}(r) = \frac{(-1)^k a_0}{(2k+r)^2 \, (2k-2+r)^2 \, \cdots (2+r)^2}.$$

נגזור את הלוגריתם של ביטוי זה:

$$\frac{a_{2k}{}'(r)}{a_{2k}(r)} = -2 \left(\frac{1}{2k+r} + \frac{1}{2k-2+r} + \cdots + \frac{1}{2+r} \right),$$

בפרט עבור $r = 0$,

$$a_{2k}{}'(0) = -\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \cdots + 1 \right) \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} \, (k!)^2}.$$

נהוג לסמן את הסכום החלקי של טור הרמוני ב־ $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. על פי סימון זה, פתרון שני למשוואת בסל מסדר 0 הוא

$$w_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k H_k}{2^{2k}\,(k!)^2}\, z^{2k} + \log z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}\,(k!)^2}\, z^{2k} \qquad \square.$$

כזכור אם $r_1 - r_2 = N$ שלם, אז לפי (7.28) מכנה מספר N בפתרון השני מכיל גורם מתאפס והתהליך עלול להכשל. נבדיל בין שני מקרים.

מקרה ג. אם במשוואת בסל הגודל $r_1 - r_2 = 2\alpha$ הוא שלם חיובי איזוגי, נאמר $2\alpha = 2m+1$, כלומר α מהצורה $m + \frac{1}{2}$, אז מכנה מספר $2m+1$ מתאפס. אך בפתרון (7.40) כל המקדמים האיזוגיים הם זהותית אפס ואינם מופיעים כלל, והבעיה בחישוב המכנה לא מתעוררת. לכן $J_{-\alpha}(z)$ מוגדר היטב ומהווה פתרון שני. למשל, עבור $\alpha = 1/2$ מופיע במכנה

$$k!\,\Gamma(k-\alpha+1) = k!\,\Gamma(k-\frac{1}{2}+1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2k-1)(2k)}{2^k\cdot 2^k}\sqrt{\pi} = \frac{(2k)!}{2^{2k}}\sqrt{\pi}$$

ומתקבל פתרון שני

$$\begin{aligned} J_{-1/2}(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 2^{2k}\ (z/2)^{2k}}{(2k)!\,\sqrt{\pi}} \\ &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, z^{2k}}{(2k)!} = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos z. \qquad \square \end{aligned}$$

מקרה ד. נשאר לטפל במקרה בו $r_1 - r_2 = 2\alpha$ שלם חיובי זוגי, כלומר α שלם חיובי, נאמר m. הצבה ישירה של $\alpha = m$ ב־(7.40) אינה מועילה למציאת פתרון שני בלתי תלוי. כי כזכור $\Gamma(0), \Gamma(-1), \ldots$ אינסופיים, לכן בפיתוח

$$J_{-m}(z) = (z/2)^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(z/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(k-m+1)}$$

m המחוברים הראשונים מתאפסים ונשאר רק

$$\begin{aligned} &= (z/2)^{-m} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(z/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(k-m+1)} \\ &= (z/2)^{m} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+m}\,(z/2)^{2\ell}}{(\ell+m)!\,\ell!} = (-1)^m J_m(z). \end{aligned} \tag{7.41}$$

לפיכך עלינו לחפש פתרון שני מהצורה $w_2(z) = z^{-m}\sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell z^\ell + c\,\log z\, J_m(z)$.

נציב את w_2 למשוואת בסל מסדר m ונדרוש כי $L[w_2] \equiv 0$. בדומה לחישוב ב־(7.31),

$$L\left[z^{-m}\sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell z^\ell\right] = z^{-m}\Bigg[(m^2-m^2)c_0 + \big[(-m+1)^2-m^2\big]c_1 z + \sum_{\ell=2}^{\infty}\Big[\big[(-m+\ell)^2-m^2\big]c_\ell + c_{\ell-2}\Big]z^\ell\Bigg]$$

ועל ידי חישוב ישיר,

$$\begin{aligned}
L\Big[\log z\ J_m(z)\Big] &= z^2(\log z\ J_m(z))'' + z(\log z\ J_m(z))' + (z^2-m^2)(\log z\ J_m(z)) \\
&= z^2\Big(\log z\ J_m{}'' + \frac{2}{z}J_m{}' - \frac{1}{z^2}J_m\Big) + z\Big(\log z\ J_m{}' + \frac{1}{z}J_m\Big) + (z^2-m^2)\log z\, J_m \\
&= 2zJ_m{}'(z) + \log z\left(z^2 J_m{}'' + zJ_m{}' + (z^2-m^2)J_m\right) \\
&= 2zJ_m{}'(z) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(2k+m)(z/2)^{2k+m}}{k!\,(k+m)!}
\end{aligned}$$

נחבר, נכפול ב־z^m ונקבל עבור $L[w_2] \equiv 0$ כי

$$c_1(1-2m)z + \sum_{\ell=2}^{\infty}\Big[\ell(\ell-2m)c_\ell + c_{\ell-2}\Big]z^\ell = -2c\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(2k+m)}{2^{2k+m}k!\,(k+m)!}z^{2k+2m}. \tag{7.42}$$

אגף ימין של (7.42) מתחיל בחזקה $2m$ וכך חייב להיות גם באגף שמאל:

$$\begin{aligned}
&c_1 = 0\ , \\
&\ell(\ell-2m)c_\ell + c_{\ell-2} = 0\ , \qquad \ell = 2,3,\ldots,2m-1.
\end{aligned} \tag{7.43}$$

מכאן נובע כי $c_1 = c_3 = \ldots = c_{2m-1} = 0$. המקדמים הזוגיים הם

$$c_2 = \frac{c_0}{4(m-1)}, \qquad c_4 = -\frac{c_2}{4(4-2m)} = \frac{c_0}{2^4\cdot 2(m-1)(m-2)}\ ,$$

ובאופן כללי

$$c_{2j} = \frac{c_0}{2^{2j}\,j!\,(m-1)(m-2)\cdots(m-j)}\ , \qquad j = 1,2\ldots,m-1.$$

בפרט האחרון הוא

$$c_{2m-2} = \frac{c_0}{2^{2m-2}\,(m-1)!\,(m-1)!}\ .$$

מצד שני נשווה את מקדמי z^{2m} בשני אגפי (7.42):

$$c_{2m-2} = -2c\,\frac{m}{2^m\,m!}\ .$$

מהשוואת שני הביטויים עבור c_{2m-2} נקבע הערך

$$c = -\frac{c_0}{2^{m-1}(m-1)!}\ .$$

נמשיך בהשואת החזקות ב־(7.42) החל מהחזקה $2m$ ומעלה. אגף ימין של (7.42) מכיל חזקות זוגיות בלבד, וכך חייב להיות גם באגף שמאל שלו. מכאן אנו מסיקים כי

$$c_{2m+1} = c_{2m+3} = \cdots = 0.$$

המקדמים הזוגיים הבאים מקיימים את נוסחת הנסיגה

$$2k(2k+2m)c_{2k+2m}+c_{2k+2m-2} = -2c\frac{(-1)^k\,(2k+m)}{2^{2k+m}k!\,(k+m)!}, \qquad k=0,1,\ldots \tag{7.44}$$

שתי הנוסחאות (7.43) ו־(7.44) אינן קובעות את c_{2m} וניתן לבחור אותו באופן שרירותי. לאחר בחירתו, המקדמים $c_{2m+2}, c_{2m+4}, \cdots$ נקבעים על ידי (7.44).

עבור בחירות שונות של מקדם מספר $2m$, כגון $c_{2m}, \tilde{c}_{2m}$, נקבל כי הפרשי המקדמים העוקבים המתאימים $c_{2m+2}, \tilde{c}_{2m+2}, \ldots$ מקיימים

$$2k(2k+2m)(c_{2k+2m}-\tilde{c}_{2k+2m})+(c_{2k+2m-2}-\tilde{c}_{2k+2m-2})=0, \quad k=0,1,\ldots$$

אולם זו בדיוק נוסחת הנסיגה (7.33) למקדמי הפתרון הראשון $J_m(z)$ ולכן בחירת c_{2m} גורמת להוספת כפולה של הפתרון הראשון הידוע כבר. בספרות נהוגה בחירה מקובלת של c_{2m} והפתרון המתאים נקרא בשם פונקציית בסל מהסוג השני ומסומן כ־$K_m(z)$.[5]

7.8 תכונות של פונקציות בסל

הגדרה 7.8 $G(z,t)$ נקראת הפונקציה היוצרת *(generating function)* של סדרת הפונקציות $\{f_n(z)\}$ אם

$$G(z,t)=\sum_n f_n(z)t^n \ .$$

משפט 7.9 הפונקציה היוצרת לפונקציות בסל מסדר שלם היא $G(z,t)=e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$ במובן ש־

$$\exp\left(\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n, \tag{7.45}$$

כאשר $J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z)$.

הוכחה.

$$\exp\left(\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right)=e^{zt/2}e^{-z/2t}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z/2)^m}{m!}\,t^m \ \times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z/2)^k}{k!}\,t^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z/2)^{m+k}}{m!\,k!}\,t^{m-k}$$

[5] ראה Coddington, An introduction to ordinary differential equations, §4.8

החזקה t^n , $-\infty < n < \infty$, מתקבלת כאשר $n = m - k$, לכן

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m-k=n \\ m,k\geq 0}} \frac{(-1)^k (z/2)^{m+k}}{m!\,k!} \right) t^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!\,(k+n)!} \right) t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, t^n$$

כאשר, כמו ב־(7.41), $(n+k)! = \Gamma(n+k+1)$ אינסופי עבור $n+k$ שלילי והמחוברים המתאימים מתאפסים. □

תרגיל 7.11 הוכח על ידי בחירת ערכי t מתאימים ב־(7.45):

א. $\cos x = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(x)$

ב. $\sin x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(x)$

ג. $1 = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)$

מהפונקציה היוצרת (7.45) אפשר להסיק זהויות רבות הקשורות לפונקציות בסל מסדר שלם. למשל, הזהות $1 \equiv G(z,t)\,G(z,1/t)$ פירושה

$$1 \equiv \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z)\, t^m \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z)\, t^{-k} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{k+n}(z) J_k(z) \right) t^n$$

מכאן מתקבל מהשוואת חזקות

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{k+n}(z) J_k(z) \equiv 0, \qquad n \neq 0,$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} {J_k}^2(z) = {J_0}^2(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} {J_k}^2(z) \equiv 1.$$

עבור משתנה ממשי אפשר להסיק כי פונקציות בסל חסומות

$$|J_0(x)| \leq 1, \qquad |J_n(x)| \leq 1/\sqrt{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

השווה עם איור 7.1.

על ידי גזירת הפונקציה היוצרת (7.45) אפשר למצוא זהויות נוספות לפונקציות בסל מסדרים שלמים.

משפט 7.10 לכל n שלם

$$2{J_n}'(z) = J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z), \tag{7.46}$$

$$2nJ_n(z) = z\left(J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)\right), \tag{7.47}$$

$$z^n J_{n-1}(z) = \left(z^n J_n(z)\right)', \tag{7.48}$$

$$-z^{-n} J_{n+1}(z) = \left(z^{-n} J_n(z)\right)'. \tag{7.49}$$

הוכחה. נגזור את הזהות $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n = \exp\left(\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right)$ לפי המשתנה z:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n{}'(z)t^n &= \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\exp\left(\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(t-t^{-1}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^{n-1}\end{aligned}$$

ומהשוואת חזקות מתקבל (7.46).

עכשיו נגזור את (7.45) לפי המשתנה t:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)nt^{n-1} &= \frac{z}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\exp\left(\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right) = \frac{z}{2}\left(1-t^{-2}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n \\ &= \frac{z}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n - \frac{z}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^{n-2}\end{aligned}$$

ומהשוואת חזקות מתקבל (7.47).

נחלק את (7.47) ב־z, נחבר ונחסר את (7.46) ונקבל

$$J_{n-1}(z) = J_n{}'(z) + \frac{n}{z}J_n(z), \tag{7.50}$$

$$J_{n+1}(z) = -J_n{}'(z) + \frac{n}{z}J_n(z). \tag{7.51}$$

על ידי כפל ב־z^n וב־$(-z^{-n})$ בהתאמה, נקבל את הזהויות (7.48) ו־(7.49). □

הזהויות במשפט 7.10 נטענו והוכחו רק עבור פונקציות בסל מסדרים שלמים. אולם למעשה אותן זהויות קיימות לפונקציות בסל מסדרים כלשהם. נוכיח למשל את הזהות המקבילה ל־(7.51) עבור סדר α כלשהו, לאו דווקא שלם. לשם כך נגזור את הטור $J_\alpha(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(k+\alpha+1)}$:

$$\begin{aligned}J_\alpha{}'(z) &= \frac{\alpha}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(k+\alpha+1)} + \left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\, k(z/2)^{2k-1}}{k!\,\Gamma(k+\alpha+1)} \\ &= \frac{\alpha}{z}\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(k+\alpha+1)} - \left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1} (z/2)^{2k-2}}{(k-1)!\,\Gamma(k+\alpha+1)} \\ &= \frac{\alpha}{z}J_\alpha(z) - J_{\alpha+1}(z)\ ,\end{aligned}$$

כפי שטענו.

משפט 7.11 לכל α, אפסי $J_\alpha(z)$ ו־$J_{\alpha-1}(z)$ ב־$(0,\infty)$ מפרידים זה את זה.

הוכחה. במשפט 5.4 הוכחנו כי לכל פתרון של משוואת בסל מסדר כלשהו יש אינסוף אפסים. מהכללת (7.48),

$$(z^\alpha J_\alpha(z))' = z^\alpha J_{\alpha-1}(z),$$

נובע בעזרת משפט רול כי בין כל שני אפסים של $J_\alpha(z)$ נמצא לפחות אפס אחד של $J_{\alpha-1}(z)$; ולפי המקבילה ל־(7.49),

$$\left(z^{-(\alpha-1)} J_{\alpha-1}(z)\right)' = -z^{-(\alpha-1)} J_\alpha(z),$$

נובע כי בין כל שני אפסים של $J_{\alpha-1}(z)$ ב־$(0,\infty)$ יש לפחות אפס אחד של $J_\alpha(z)$. מכאן נובעת מסקנת המשפט. $\square$

מפתח

אבל, נילס הנריק, 86
אורתוגונליות, 126
אי שוויון ליאפונוב, 113
איזוקלינה, 8, 62
אסטרואיד, 27

גורם אינטגרציה, 13, 21
גידול אוכלוסיה, 2
גרונוול, הלמה של, 53
גרעין Cauchy, 102

דטרמיננט ונדרמונדה, 92

הזזת אינדקסים, 174
הפרדת משתנים, 9, 60
התפרקות רדיואקטיבית, 3

וורונסקיאן, 40, 136
וקטור עצמי, 145
וריאציה ראשונה, 59
וריאציה של פרמטרים, 14, 98, 166

ז'ורדן, קמיל, 155

טורף־נטרף, 3
טרנספורמצית Prüfer , 118

יחידות, 44

כופלים אופייניים, 164

לינאריזציה, 59

מטוטלת, 4, 76
מטריצה ניתנת ללכסון, 149
מטריצת מעבר, 144
מעטפת, 25
מערכת אוטונומית, 69
מערכת משוואות לינארית הומוגנית, 135
מערכת משוואות עם מקדמים קבועים, 145
מרחב לינארי, 135
מרחב מטרי, 50
משוואה אוטונומית, 10, 69, 72
משוואה אינדיציאלית, 182
משוואה דיפרנציאלית מטריצית, 142
משוואה היפרגיאומטרית, 180
משוואה לוגיסטית, 10, 60
משוואה מטיפוס הומוגני, 14
משוואה מנורמלת, 1, 6, 13, 77, 176
משוואה ניתנת להפרדה, 9
משוואה עם מקדמים קבועים, 91
משוואות לינאריות לא הומוגניות, 97
משוואת אוילר, 95, 181
משוואת בסל, 116, 188
משוואת הרמיט, 177
משוואת לז'נדר, 175
משוואת צ'ביצ'ף, 177, 180
משפט Floquet, 162
משפט ההפרדה של שטורם, 110
משפט קיום ויחידות, 78
משפך, 64

נוסחת אבל, 86, 140
נוסחת Putzer, 153
נורמה מטריצית, 150
נקודה קריטית, 69

נקודת שווי משקל, 69

סדרת Cauchy, 50

עקבה של מטריצה, 140, 146
עקומים אורתוגונליים, 28
ערך עצמי, 145
ערך עצמי - ריבוי גיאומטרי, 149
ערך עצמי - ריבוי אלגברי, 149

פולינום אופייני, 92
פונקציה אנליטית, 168
פונקציה יוצרת, 194
פונקציית בסל, 189
פונקציית מרחק, 50
פתרון לוקלי, 35
פתרון יסודי, 143

צורת ז'ורדן, 155
צרוף לינארי, 135

קומבינציה לינארית, 135
קרובים עוקבים, 43

שדה כיוונים, 6, 62
שדה משמר, 18

תחום הגדרה של פתרון, 35
תלות לינארית, 135
תנאי ליפשיץ, 39