משוואות דיפרנציאליות רגילות

חלק שני

אורי אליאש

הפקולטה למתמטיקה - הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל

עדכון 18 בדצמבר 2023

מותר להעתיק ולהפיץ ספר זה בתנאי שישמש למטרות לימוד והוראה
ויועתק במלואו ללא שינוי כלשהו. אין להשתמש בספר למטרות מסחריות.

הקדמה

רשימות אלה נערכו על פי הרצאות שניתנו בקורס משוואות דיפרנציאליות רגילות לתלמידי הפקולטה למתמטיקה בטכניון במשך שנים רבות.

מטרת הרשימות היא לשמש כלי עזר ללמוד עצמי. דוגמאות ותרגילים מנחים פועלים באותה מגמה.

החלק השני של הספר מוקדש לפרקים הנלמדים בקורסים מתקדמים של משוואות דיפרנציאליות רגילות. הפרקים בלתי תלויים זה בזה ואפשר ללמוד אותם בסדר כלשהו.

אורי אליאש

חיפה, תשע"ח – תשפ"ב

טעות — לעולם חוזר. אם מצאת שגיאה בספר, אנא הודע על כך למחבר בכתובת
elias@technion.ac.il

עותק מעודכן של הספר נמצא בכתובת
https://elias.net.technion.ac.il/he/ode/

.

תוכן עניינים

1 מבוא **1**

1.1 מהי משוואה דיפרנציאלית רגילה? 1

1.2 דוגמאות ומודלים 2

1.3 מטרות בלימוד משוואות דיפרנציאליות 5

2 משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון **6**

2.1 שדה כיוונים 6

2.2 משוואות ניתנות להפרדה 9

2.3 משוואות לינאריות מסדר ראשון 11

2.4 פתרון על ידי החלפת משתנים 14

2.5 משוואות מדויקות 18

2.6 גורמי אינטגרציה 21

2.7 משוואות דיפרנציאליות ומשפחות של עקומים 24

2.8 משוואות סתומות אחדות 29

3 משפטי קיום ויחידות **32**

3.1 מדוע נחוצים משפטים על קיום פתרונות 32

3.2 משפט הקיום של Cauchy-Peano 36

3.3 משפט הקיום והיחידות של Picard-Lindelöf 39

3.4 קיום של פתרון גלובלי 47

3.5 הוכחת קיום בעזרת העתקה מכווצת 49

3.6 משפט קיום למשוואות ממעלה גבוהה 52

3.7 הלמה של Gronwall 53

3.8 תלות פתרונות בפרמטר ובתנאי ההתחלה 56
3.9 שימושים ליחידות פתרון 59
3.10 חקירה איכותית של פתרונות 62
3.11 משוואות אוטונומיות מסדר ראשון 69
3.12 משוואות אוטונומיות מסדר שני 72

4 משוואות לינאריות מסדר כלשהו 77

4.1 משפט קיום ויחידות למשוואות לינאריות 77
4.2 משוואות לינאריות הומוגניות 79
4.3 הוורונסקיאן ותפקידיו 84
4.4 הורדת סדר משוואה 89
4.5 משוואות עם מקדמים קבועים 91
4.6 משוואת אוילר 95
4.7 משוואות לינאריות לא הומוגניות 97
4.8 פתרון על ידי השוואת מקדמים 105

5 משפטי שטורם וקיום ערכים עצמיים 110

5.1 משפטי Sturm 110
5.2 טרנספורמצית Prüfer 118
5.3 בעיות שפה וערכים עצמיים 121
5.4 תכונות של ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות 125
5.5 הוכחה נוספת לקיום ערכים עצמיים 127
5.6 טרנספורמציות שונות 130

6 מערכות של משוואות לינאריות 133

6.1 תכונות יסוד של מערכות לינאריות 133
6.2 מערכת לינארית הומוגנית ומבנה פתרונותיה 135
6.3 מערכת מטריצית ומטריצה יסודית 142
6.4 מערכות עם מקדמים קבועים 145
6.5 אקספוננציאל של מטריצה 149

6.6 צורת ז'ורדן 154
6.7 דוגמאות לפתרון מערכות עם מקדמים קבועים 159
6.8 מערכות מחזוריות ומשפט Floquet 162
6.9 מערכות בלתי הומוגניות 165

7 פתרון בעזרת טורי חזקות 168

7.1 טורי חזקות ושני משפטי קיום ויחידות 168
7.2 פתרון משוואות לינאריות בעזרת טורי חזקות 172
7.3 נקודה סינגולרית רגולרית 177
7.4 פתרון בשיטת Frobenius 180
7.5 אינדקסים הנבדלים במספר שלם 184
7.6 משוואת בסל 188
7.7 פתרון שני למשוואת בסל 191
7.8 תכונות של פונקציות בסל 194

חלק שני

8 בעיות שפה 198

8.1 המשוואה הדיפרנציאלית הצמודה 198
8.2 תנאי שפה צמודים 207
8.3 פונקציית גרין 212
8.4 בעיית שפה צמודה לעצמה 221
8.5 בעיית ערכים עצמיים צמודה לעצמה 223
8.6 פיתוח לטורי פונקציות אורתוגונליות 232
8.7 פונקציית גרין של $Lu - \lambda u$ 236
8.8 אפיון ערכים עצמיים על ידי מנת Rayleigh 239

9 מערכות אוטונומיות דו־ממדיות 244

9.1 מסלולים ונקודות קריטיות 244
9.2 דוגמאות למערכות אוטונויות 247

9.3 מערכות אוטונומיות לינאריות דו־ממדיות 252
9.4 לינאריזציה ליד נקודה קריטית 257
9.5 משפט Poincaré-Bendixson 267
9.6 משוואת Liénard 275
9.7 אינדקס 280
9.8 מיפוי פואנקרה 283

10 יציבות **294**

10.1 הגדרות ודוגמאות 294
10.2 יציבות מערכות ומשוואות לינאריות 296
10.3 השיטה הישירה של Lyapunov - מערכות אוטונומיות 301
10.4 עקרון האינווריאנטיות של LaSalle 307
10.5 השיטה הישירה של Lyapunov - מערכות לא אוטונומיות 310
10.6 מערכת לינארית לא־אוטונומית 316
10.7 השיטה העקיפה של Lyapunov - לינאריזציה 320

11 משפטי יחידות **324**

11.1 משפטי יחידות של ליפשיץ 324
11.2 משפט היחידות של Osgood 327
11.3 משפט היחידות של Nagumo 330
11.4 משפט היחידות של Kamke 331
11.5 פתרון מקסימלי ופתרון מינימלי 334
11.6 אי שוויונות 336

12 פתרונות אסימפטוטיים **338**

12.1 קרוב פתרונות משוואה מסדר שני – LG או WKB 338
12.2 משפט הקרוב האסימפטוטי של Levinson 341
12.3 משוואות מסדר שניים 355

מפתח **358**

פרק 8

בעיות שפה

8.1 המשוואה הדיפרנציאלית הצמודה

בדיון על פתרון משוואה לינארית לא הומוגנית מסדר ראשון, $y'+py=q$, השתמשנו בגורם אינטגרציה $\mu(x)=e^{\int p(x)\,dx}$ כך ש־ $\mu(y'+py)$ יהיה נגזרת מדויקת של ביטוי מסוים. לשם זה השתמשנו בזהות

$$\mu\Big(y'+py\Big)+y\Big(\mu'-p\mu\Big)=\frac{d}{dx}[\mu y]$$

ובחרנו $\mu(x)$ המאפס את הביטוי $\mu'-p\mu$.

אותה שאלה נשאלת עכשיו עבור האופרטור הלינארי ממעלה n,

$$L[u]:=p_0(x)u^{(n)}+p_1(x)u^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)u'+p_n(x)u. \tag{8.1}$$

נחפש גורם אינטגרציה, כלומר פונקציה $v(x)$ כך שהמכפלה $v\,Lu$ תהיה נגזרת מדויקת של ביטוי התלוי ב־ u,v ונגזרותיהם.

לכל $f,g\in C^r$ קיימת הזהות

$$fg^{(r)}=(-1)^r f^{(r)}g+\frac{d}{dx}\Big[fg^{(r-1)}-f'g^{(r-2)}+\cdots+(-1)^{r-1}f^{(r-1)}g\Big]. \tag{8.2}$$

אפשר לאמת זהות זו באופן ישיר, כי כשמבצעים את פעולת הגזירה שבאגף ימין, כל המחוברים למעט הראשון והאחרון מתבטלים באופן טלסקופי. אולם עדיף להבין את משמעות הזהות על ידי הפעלה חוזרת של הזהות המונחת בבסיס האינטגרציה לחלקים,

$$\begin{aligned}
fg^{(r)}&=\frac{d}{dx}\Big[fg^{(r-1)}\Big]-f'g^{(r-2)}\\
&=\frac{d}{dx}\Big[fg^{(r-1)}-f'g^{(r-2)}\Big]+f''g^{(r-2)}\\
&=\dots\\
&=\frac{d}{dx}\Big[fg^{(r-1)}-f'g^{(r-2)}+\cdots+(-1)^{r-1}f^{(r-1)}g\Big]+(-1)^r f^{(r)}g.
\end{aligned}$$

נניח כי $p_i \in C^{n-i}[a,b]$ ונבצע אינטגרציות בחלקים על הביטוי

$$v\,Lu = v\Big[p_0 u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}u' + p_n u\Big]$$

תוך הפעלת הזהות (8.2) לכל מחובר $(p_i v)u^{(n-i)}$, למעט האחרון. נקבל

$$\begin{aligned}
= \;& (-1)^n (p_0 v)^{(n)} u \;+\; \frac{d}{dx}\left[\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j (p_0 v)^{(j)} u^{(n-1-j)}\right] \\
& + (-1)^{n-1}(p_1 v)^{(n-1)} u + \frac{d}{dx}\left[\sum_{j=0}^{n-2}(-1)^j (p_1 v)^{(j)} u^{(n-2-j)}\right] \\
& \quad \vdots \\
& + (p_{n-1}v)'\,u + \frac{d}{dx}\Big[p_{n-1} v\, u\Big] \\
& + (p_n v)\,u \\
= u\Big[&(-1)^n (p_0 v)^{(n)} + (-1)^{n-1}(p_1 v)^{(n)} + \cdots - (p_{n-1}v)' + p_{n-1}v\Big] \\
& + \frac{d}{dx}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j (p_{n-i-1}v)^{(j)} u^{(i-j)}\right].
\end{aligned}$$

מסקנה 8.1 כל פתרון $v(x)$ של המשוואה

$$(-1)^{n-i}(p_0 v)^{(n)} + (-1)^{n-1}(p_1 v)^{(n-1)} + \cdots + p_n v = 0, \qquad p_i \in C^{n-i}$$

הוא גורם אינטגרציה לביטוי Lu. בעזרת גורם אינטגרציה זה ניתן להפוך את המשוואה $Lu = 0$ מסדר n למשוואה מסדר $n-1$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j (p_{n-i-1}v)^{(j)} u^{(i-j)} = \text{const.} \qquad \square$$

בהמשך נרצה להתיחס למשוואות דיפרנציאליות עם מקדמים ופתרונות מרוכבים ולמכפלה פנימית $(f,g) = \int_a^b f\,\overline{g}$ על קטע $[a,b]$. לכן נחליף את v בצמוד המרוכב $\overline{v}$ ונרשום

$$\begin{aligned}
\overline{v}\,Lu = u\Big[&(-1)^n (p_0 \overline{v})^{(n)} + (-1)^{n-1}(p_1 \overline{v})^{(n)} + \cdots - (p_{n-1}\overline{v})' + p_{n-1}\overline{v}\Big] \\
& + \frac{d}{dx}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j (p_{n-i-1}\overline{v})^{(j)} u^{(i-j)}\right].
\end{aligned}$$

ביטויים אלה הם ההשראה להגדרה הבאה:

הגדרה 8.2 יהי $p_i \in C^{n-i}[a,b]$, $u,v \in C^n[a,b]$. הביטוי

$$L^+[v] := (-1)^n(\overline{p}_0 v)^{(n)} + (-1)^{n-1}(\overline{p}_1 v)^{(n-1)} + \cdots + \overline{p}_n v \tag{8.3}$$

נקרא האופרטור הדיפרנציאלי הצמוד (adjoint) ל־L. המשוואה $L^+v = 0$ נקראת המשוואה הצמודה למשוואה $Lu = 0$. הסכום

$$B[u,v] := \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j(p_{n-i-1}\overline{v})^{(j)}u^{(i-j)}.$$

הוא תבנית בילינארית ב־$u, u', \ldots, u^{(n-1)}, \overline{v}, \overline{v}', \ldots, \overline{v}^{(n-1)}$. בסימונים שלמעלה מתקבלת זהות לגרנז' *(Lagrange)*

$$\overline{v}\,Lu - u\,\overline{L^+v} = \frac{d}{dx}B[u,v]\ . \tag{8.4}$$

הגירסא האינטגרלית של זהות לגרנז' היא נוסחת גרין *(Green)*

$$(Lu,\,v) - (u,\,L^+v) = \int_a^b \left(Lu\,\overline{v} - u\,\overline{L^+v}\right)dx = B\big[u,v\big]_a^b\ . \qquad \square \tag{8.5}$$

בספרים מסוימים L^+ נקרא הצמוד הפורמלי (formal adjoint) כדי להבדילו מבעיות שפה צמודות שיידונו בהמשך.

נעיר כי השוויון (2.11) שהוזכר בתחילת הספר הוא מקרה פשוט של זהות לגרנז' (8.4) והשתמשנו בו מבלי לציין את מהותו.

משפט 8.3 כל ביטוי מהצורה $\overline{v}\,Lu - u\,\overline{L^+v} = \dfrac{d}{dx}\tilde{B}[u,v]$ בו $\tilde{B}[u,v]$ ביטוי בילינארי ב־$u, u', \ldots, u^{(n-1)}, \overline{v}, \overline{v}', \ldots, \overline{v}^{(n-1)}$ קובע את האופרטור הצמוד L^+ באופן יחיד.

הוכחה. נניח כי בנוסף לזהות (8.4) קיים שוויון מהצורה $\overline{v}\,Lu - u\,\overline{L^*v} = \dfrac{d}{dx}\tilde{B}[u,v]$ כאשר L^*v אופרטור דיפרנציאלי לינארי. נחסיר אותם זה מזה

$$u\left(\overline{L^*v - L^+v}\right) = \frac{d}{dx}\left(B[u,v] - \tilde{B}[u,v]\right).$$

לפי הנחתנו $B[u,v] - \tilde{B}[u,v]$ שבאגף ימין לינארי ב־$u, u', \ldots, u^{(n-1)}$ ו־$u^{(n-1)}$ מופיע בו בצורה $P(\overline{v}, \ldots, \overline{v}^{(n-1)})u^{(n-1)}$. אך $u^{(n)}$ אינו מופיע באגף שמאל ולכן $u^{(n-1)}$ אינו יכול להופיע ב־ $B[u,v] - \tilde{B}[u,v]$. לכן $u^{(n-2)}$ היא הנגזרת הגבוהה ביותר שם. לפי הנימוק שלמעלה גם $u^{(n-2)}, u^{(n-3)}, \ldots, u$ אינם מופיעים ו־$B[u,v] - \tilde{B}[u,v]$ הלינארי חייב להיות זהותית אפס. מכאן נובע כי $L^*v \equiv L^+v$. $\square$

משפט 8.4 $(L^+)^+ = L$.

הוכחה. זהות לגרנז' עבור האופרטור L הוא $\overline{v}\,Lu - u\,\overline{L^+v} = \frac{d}{dx}B[u,v]$ והצמוד המרוכב שלו הוא

$$\overline{u}\,L^+v - v\,\overline{Lu} = -\frac{d}{dx}\overline{B[u,v]}\ . \tag{8.6}$$

מצד שני זהות לגרנז' עבור האופרטור L^+ היא

$$\overline{u}\,L^+v - v\,\overline{(L^+)^+\,u} = \frac{d}{dx}\hat{B}[u,v] \tag{8.7}$$

עם תבנית $\hat{B}[u,v]$ מסוימת. שתי התבניות $\hat{B}[u,v],\ -\overline{B[u,v]}$ בזהויות (8.6), (8.7) הן בילינאריות ב־$v, v', \ldots, v^{(n-1)}, \overline{u}, \overline{u}', \ldots, \overline{u}^{(n-1)}$ ולפי טענת היחידות במשפט 8.3 נובעת טענתנו כי $(L^+)^+ = L$. בניסוח אחר נאמר כי אם $L^+ = M$ אז $M^+ = L$. □

מסקנה 8.5

$$(L_1 + L_2)^+ = L_1^+ + L_2^+$$

$$(cL)^+ = \overline{c}L^+$$

$$(L_1L_2)^+ = L_2^+L_1^+$$

נוכיח את הטענה השלישית. יהיו L_1, L_2 אופרטורים לינאריים מסדרים m ו־n בהתאמה ו־$(L_1L_2)u = L_1(L_2u)$. זהות לגרנז' עבור האופרטור L_1L_2 היא

$$\overline{v}\cdot L_1L_2u = \overline{(L_1L_2)^+v}\cdot u + \frac{d}{dx}B_1[u,v]\ , \tag{8.8}$$

כאשר B_1 בילינארי ב־$u, \overline{v}$ ונגזרותיהם עד מעלה $n+m-1$. מצד שני גם

$$\overline{v}\cdot L_1L_2u = \overline{v}\cdot L_1(L_2u) = \overline{L_1^+v}\cdot L_2u + \frac{d}{dx}B_2[L_2u, v]. \tag{8.9}$$

אם נסמן $w = L_1^+v$ אז

$$\overline{L_1^+v}\cdot L_2u = \overline{w}\cdot L_2u = \overline{L_2^+w}\cdot u + \frac{d}{dx}B_3[u,w] = \overline{L_2^+(L_1^+v)}\cdot u + \frac{d}{dx}B_3[u, \overline{L_1^+v}]$$

ו־(8.9) הופך

$$\overline{v}\cdot L_1L_2u = \overline{L_2^+(L_1^+v)}\cdot u + \frac{d}{dx}\left(B_3[u,\overline{L_1^+v}] + B_2[L_2u, v]\right). \tag{8.10}$$

מהשוואת (8.9), (8.8) וטענת היחידות במשפט 8.3 נובעת המסקנה כי $(L_1L_2)^+$ ו־$L_2^+L_1^+$ זהים. □

דוגמא 8.1 הראה כי הצמוד ל־$Lu = \left(pu^{(r)}\right)^{(s)}$ הוא $L^+u = (-1)^{r+s}\left(\overline{p}u^{(s)}\right)^{(r)}$.

נסמן $L_1 = (d/dx)^{(s)}$, $L_2 = p(x)\,(d/dx)^{(r)}$, דהיינו $L_1 u = u^{(s)},\ L_2 v = p\,v^{(r)}$. לפי הגדרה 8.2, האופרטורים הצמודים להם הם

$$L_1^+ u = (-1)^s u^{(s)},\ L_2^+ v = (-1)^r (\overline{p}\,v)^{(r)}$$

ולפיכך $L^+ u = (L_1 L_2)^+ u = L_2^+(L_1^+ u) = (-1)^{r+s}\left(\overline{p}\,u^{(s)}\right)^{(r)}$. □

דוגמא 8.2 הראה כי האופרטור הצמוד ל־$Lu = p_2(p_1(p_0u)')'$ הוא הביטוי $L^+u = \overline{p}_0(\overline{p}_1(\overline{p}_2u)')'$.

הפעם נחשב את הצמוד על פי ההגדרה. נבצע מספר אינטגרציות בחלקים:

$$\begin{aligned}\int \overline{v}\cdot Lu &= \int \overline{v}\cdot p_2\big(p_1(p_0u)'\big)' \\ &= p_2\overline{v}\cdot p_1(p_0u)' - \int (p_2\overline{v})'\cdot p_1(p_0u)' \\ &= p_1(p_2\overline{v})\cdot(p_0u)' - p_1(p_2\overline{v})'\cdot(p_0u) + \int (p_1(p_2\overline{v})')'\cdot(p_0u)\end{aligned}$$

או בכתיב של נגזרות

$$\overline{v}\cdot p_2(p_1(p_0u)')' - p_0(p_1(p_2\overline{v})')'\cdot u = \frac{d}{dx}\Big[(p_2\overline{v})\cdot p_1(p_0u)' - p_1(p_2\overline{v})'\cdot(p_0u)\Big].$$

לפי משפט 8.3 אנו מזהים את הביטוי $p_0\big(p_1(p_2\overline{v})'\big)'$ כ־$\overline{L^+v}$ ומכאן נובעת הטענה.

ניתן להכליל טענה זו לאופרטור מסדר n, $Lu = p_n\Big(\dots p_2\big(p_1(p_0u)'\big)'\dots\Big)'$. □

מושג המשוואה הצמודה והמערכת הצמודה שהוגדרה בדוגמא 6.3 קשורים זה לזה. למשל, המשוואה $y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \ \cdots\ + p_{n-1}y' + p_ny = 0$ הופכת על ידי ההצבה $u_1 = y,\ \ u_2 = y',\ \ \dots\ \ u_n = y^{(n-1)}$ למערכת

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -p_n & -p_{n-1} & \cdots & & -p_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

כזכור, המערכת הצמודה ל־ $\mathbf{u}' = P(x)\mathbf{u}$ היא $\mathbf{v}' = -P^*(x)\,\mathbf{v}$ ובמקרה שלנו

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix}' = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & & & -\overline{p}_n \\ 1 & 0 & & & -\overline{p}_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & -\overline{p}_2 \\ 0 & \cdots & & 1 & -\overline{p}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix}.$$

מערכת זו שקולה במונחי רכיבים ל־

$$v_1{}' = \overline{p}_n v_n, \qquad v_k{}' = -v_{k-1} + \overline{p}_{n-k+1} v_n, \qquad k = 2, 3, \ldots, n.$$

נגזור $k-1$ פעמים את הרכיב ה־k־י: $v_k{}^{(k)} = -v_{k-1}^{(k-1)} + (\overline{p}_{n-k+1} v_n)^{(k-1)}$. אז

$$\begin{aligned} v_n^{(n)} &= -v_{n-1}^{(n-1)} + (\overline{p}_1 v_n)^{(n-1)} \\ &= v_{n-2}^{(n-2)} - (\overline{p}_2 v_n)^{(n-2)} + (\overline{p}_1 v_n)^{(n-1)} \\ &= \ldots \\ &= (-1)^{n-1} \left[\overline{p}_n v_n - (\overline{p}_{n-1} v_n)' + (\overline{p}_{n-2} v_n)'' - \cdots + (-1)^{n-1} (\overline{p}_1 v_n)^{(n-1)} \right] \end{aligned}$$

ולפיכך הרכיב ה־n־י v_n מקיים את המשוואה הצמודה

$$L^+ v = (-1)^n v^{(n)} + (-1)^{n-1} (\overline{p}_1 v)^{(n-1)} + \cdots + \overline{p}_n v = 0.$$

נזהה עתה מהם פתרונות המשוואה הצמודה.

משפט 8.6 יהיו $u_1, \ldots, u_n$ פתרונות המשוואה $Lu = 0$, כשהאופרטור Lu נתון ב־(8.1). אז n פתרונות $v_1, \ldots, v_n$ של המשוואה הצמודה $L^+ v = 0$ הם הצמודים המרוכבים של

$$\frac{W(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n)}{p_0 W(u_1, \ldots, u_n)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

הוכחה. כזכור אנו מסמנים

$$W(f_1, \ldots, f_m) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_m \\ f_1{}' & f_2{}' & \cdots & f_m{}' \\ \vdots & & & \\ f_1^{(m-1)} & f_2^{(m-1)} & \cdots & f_m^{(m-1)} \end{vmatrix}.$$

נתבונן בביטויים

$$M_i u := \frac{d}{dx} \left(\frac{W(u_1, \ldots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \ldots, u_n)}{W(u_1, \ldots, u_n)} \right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

כשבעמודה מספר i של המונה מופיעים u ונגזרותיו (ולא u_i ונגזרותיו). $M_i u = 0$ היא משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר n בנעלם u ומקדם הנגזרת הגבוהה $u^{(n)}$ הוא

$$\frac{W(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n)}{W(u_1, \ldots, u_n)} \ .$$

$u_1, \ldots, u_n$ הן פתרונות משוואה זו, כי עבור $u = u_k$, $k \neq i$, בדטרמיננט יש שתי עמודות זהות ועבור $u = u_i$ הנגזרת מתאפסת.

אבל גם $Lu = 0$ היא משוואה לינארית מסדר n עם אותם פתרונות אך מקדם $u^{(n)}$ הוא p_0. לכן בין שתי המשוואות מתקיימת הזהות

$$\frac{W(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n)}{p_0 W(u_1, \ldots, u_n)} \cdot Lu \equiv \frac{d}{dx} \left(\frac{W(u_1, \ldots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \ldots, u_n)}{W(u_1, \ldots, u_n)} \right).$$

נסמן

$$\overline{v}_i := \frac{W(u_1,\ldots,u_{i-1},u_{i+1},\ldots,u_n)}{p_0 W(u_1,\ldots,u_n)}. \tag{8.11}$$

אז $v_i \cdot Lu = \frac{d}{dx}\left(\tilde{B}[u]\right)$ כש־$\tilde{B}[u]$ ביטוי לינארי ב־u. אבל לפי זהות לגרנז' גם $\overline{v_i}\,Lu - u\,\overline{L^+v_i} = \frac{d}{dx}B[u,v_i]$. לפי טענת היחידות במשפט 8.3 נקבל כי $L^+v_i = 0$. בזה הוכחנו כי $v_1,\ldots,v_n$ הם n פתרונות המשוואה הצמודה. □

לפתרונות המשוואה הצמודה $L^+v=0$ יש קשר הדוק עם גרעין Cauchy של האופרטור Lu שהוגדר ב־(4.24) כ־

$$K(x,t) = \begin{vmatrix} u_1(t) & \cdots & u_n(t) \\ \vdots & & \\ u_1^{(n-2)}(t) & \cdots & u_n^{(n-2)}(t) \\ u_1(x) & \cdots & u_n(x) \end{vmatrix} \Big/ p_0(t)W(u_1,\ldots,u_n)(t).$$

נשים לב כי גרעין קושי מוגדר ב־(4.24) בכל הרבוע $a \le x,t \le b$ אך לפתרון בעיית ההתחלה

$$Lu = q(x), \qquad u^{(i)}(x_0) = 0, \quad n = 0,\ldots,n-1,$$

על ידי $u(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,t)q(t)\,dt$ נחוצים רק ערכיו במשולש $a \le t \le x \le b$.

משפט 8.7 יהיו $u_1,\ldots,u_n$ פתרונות המשוואה $Lu=0$ ו־$v_1,\ldots,v_n$ פתרונות המשוואה הצמודה $L^+v=0$ המוגדרים ב־(8.11). אז

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} u_i(x)\overline{v}_i(t).$$

מסקנה זו נובעת באופן ישיר מפיתוח הדטרמיננט במונה של (4.24) לפי השורה האחרונה שלו. □

משפט 8.8 אם $K(x,t)$ הוא גרעין Cauchy המתאים לאופרטור L כמוגדר ב־(4.24), אז לאופרטור הצמוד L^+ מתאים הגרעין $-\overline{K(t,x)}$.

הוכחה. נתבונן במשוואה $Lu=p$ בקטע $[x_0,x_1]$. פתרון בעיית ההתחלה $u^{(i)}(x_0)=0$, $i=0,\ldots,n-1$ נתון על ידי

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,t)p(t)\,dt.$$

נסמן את גרעין קושי של האופרטור הצמוד L^+ ב־$H(x,t)$. אז פתרון בעיית ההתחלה $L^+v = q$, $v^{(i)}(x_1) = 0$, $i = 0, \ldots, n-1$ הוא

$$v(x) = \int_{x_1}^{x} H(x,t)q(t)\,dt = -\int_{x}^{x_1} H(x,t)q(t)\,dt.$$

הודות לתנאים ש־u, v מקיימים בנקודות x_0, x_1 בהתאמה, נקבל לפי נוסחת גרין (8.5), כי

$$\int_{x_0}^{x_1} (\overline{v}\,Lu - u\,\overline{L^+v})\,dx = B\big[u,v\big]_{x_0}^{x_1} = 0\ ,$$

דהיינו

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[-\int_{x}^{x_1} \overline{H(x,t)q(t)}\,dt \cdot p(x) - \int_{x_0}^{x} K(x,t)p(t)\,dt \cdot \overline{q(x)} \right] dx = 0\ .$$

באינטגרל הכפול של H, תחום האינטגרציה הוא המשולש $x_0 \le x \le t \le x_1$ ובאינטגרל של K, התחום הוא $x_0 \le t \le x \le x_1$. (צייר!) לפיכך נחליף באינטגרל הראשון את שמות המשתנים מ־x ל־t ולהפך, דהיינו

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\int_{x}^{x_1} \overline{H(x,t)}\ \overline{q(t)}p(x)\,dt \right] dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_{t}^{x_1} \overline{H(t,x)}\ \overline{q(x)}p(t)\,dx \right] dt$$

ונחליף את סדר האינטגרציה על התחום המשולש ל־

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\int_{x_0}^{x} \overline{H(t,x)}\ \overline{q(x)}p(t)\,dt \right] dx\ .$$

לסיכום,

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\int_{x_0}^{x} \left(-\overline{H(t,x)} - K(x,t) \right) \overline{q(x)}p(t)\,dt \right] dx = 0\ .$$

מכיוון שהגרעינים H, K תלויים רק באופרטורים L^+, L והשוויון נכון לכל p, q, נובע כי $H(t,x) \equiv -\overline{K(x,t)}$. □

דוגמא 8.3 בדוגמא 4.22 ראינו כי גרעין קושי המתאים לאופרטור $Lu = u^{(n)}$ הוא $K(x,t) = (x-t)^{n-1}/(n-1)!$. לאופרטור הצמוד $L^+v = (-1)^n v^{(n)}$ מתאים איפוא

$$H(x,t) = -\overline{K(t,x)} = -\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} = (-1)^n\,\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\ .\qquad \square$$

מעניין במיוחד הוא המקרה בו אופרטור L והאופרטור הצמוד לו L^+ זהים זה לזה.

הגדרה 8.9 אופרטור L נקרא צמוד לעצמו (self adjoint) אם $L^+ = L$.

למשל האופרטור $L = i\dfrac{d}{dx}$ צמוד לעצמו כי $L^+v = (-1)(\overline{i}v)' = iv' = Lv$.

דוגמא 8.4 הראה כי אופרטור מסדר שני בעל מקדמים ממשיים צמוד לעצמו אם ורק אם ניתן לכתוב אותו כ־$Lu \equiv (pu')' + ru$.

יהי $Lu = pu'' + qu' + ru$. הודות למקדמים הממשיים, $L^+u = (pu)'' - (qu)' + ru$ והשוויון $L^+u = Lu$ פרושו $(pu)'' - (qu)' + ru = pu'' + qu' + ru$. זה קורה אם ורק אם $q = p'$ ואז $Lu = pu'' + p'u' + ru = (pu')' + ru$.

אגב, כפי שראינו בדוגמא 5.8, כל משוואה מסדר שני ניתן להביא לצורה הצמודה לעצמה. כשכופלים משוואה מנורמלת $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ בגורם $e^{\int p_1} > 0$, מתקבל

$$e^{\int p_1}y'' + p_1e^{\int p_1}y' + p_2e^{\int p_1}y = 0,$$

השקול ל־ $\left(e^{\int p_1}y'\right)' + p_2e^{\int p_1}y = 0$. □

משפט 8.10 כל אופרטור צמוד לעצמו אפשר לכתוב בצורה

$$Lu = \sum_k \left(a_k(x)u^{(k)}\right)^{(k)} + i\sum_k \left[\left(b_k(x)u^{(k)}\right)^{(k+1)} + \left(b_k(x)u^{(k+1)}\right)^{(k)}\right] \quad (8.12)$$

בו המקדמים $a_k(x), b_k(x)$ ממשיים.

הוכחה. יהי $Lu = p_0u^{(n)} + p_1u^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}u' + p_nu$ והצמוד לו

$$\begin{aligned} L^+u =& (-1)^n\left[(\overline{p}_0u)^{(n)} - (\overline{p}_1u)^{(n-1)} + \cdots + p_nu\right] \\ =& (-1)^n\left[\overline{p}_0u^{(n)} + (n\overline{p}_0{}' - \overline{p}_1)u^{(n-1)} + \cdots\right] \end{aligned}$$

אם n זוגי, נאמר $n = 2r$, ו־ $L^+u = Lu$ אז $(-1)^{2r}\overline{p}_0 = p_0$, כלומר p_0 ממשי. במקרה זה האופרטור $L_1u = \left(p_0u^{(r)}\right)^{(r)}$ צמוד לעצמו על פי דוגמא 8.1. בהתאם גם ההפרש $Lu - \left(p_0u^{(r)}\right)^{(r)}$ הוא אופרטור צמוד לעצמו והוא מסדר $n-1$ לכל היותר.

אם n איזוגי, נאמר $n = 2r+1$, אז $L^+u = Lu$ גורר $(-1)^{2r+1}\overline{p}_0 = p_0$, כלומר p_0 מדומה טהור. הפעם האופרטור

$$L_1u = \frac{1}{2}\left[\left(p_0u^{(r)}\right)^{(r+1)} + \left(p_0u^{(r+1)}\right)^{(r)}\right]$$

צמוד לעצמו כי בהתאם לדוגמא 8.1,

$$L_1^+u = \frac{1}{2}\left[-\left(\overline{p}_0u^{(r+1)}\right)^{(r)} - \left(\overline{p}_0u^{(r)}\right)^{(r+1)}\right] \equiv L_1u$$

והמקדם הגבוה ביותר הוא המספר המדומה הטהור $-\overline{p}_0 = p_0$. על כן ההפרש

$$Lu - \frac{1}{2}\left[\left(p_0u^{(r)}\right)^{(r+1)} + \left(p_0u^{(r+1)}\right)^{(r)}\right]$$

גם הוא צמוד לעצמו והוא מסדר $n-1$ לכל היותר. על ידי חזרה מספר סופי של פעמים על תהליכי הורדת סדר אלה, מקבלים את ההצגה (8.12) של האופרטור הצמוד לעצמו.

בפרט מתקבל כי אופרטור מפשי צמוד לעצמו אם ורק אם הוא מהצורה

$$Lu = \sum_{k=0}^{m} \left(a_k(x)u^{(k)}\right)^{(k)}, \qquad \text{ממשי } a_k \ . \qquad \square$$

תרגיל 8.5 הוכח את נוסחת Dirichlet: אם $Lu = \sum_{k=0}^{m} \left(a_k u^{(k)}\right)^{(k)}$, a_k ממשיים, אז

$$\begin{aligned}(Lu,u) &= \int_a^b \overline{u}\, Lu\, dx \\ &= \int_a^b \sum_{k=0}^{m}(-1)^k a_k \left|u^{(k)}\right|^2 dx + \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j \overline{u}^{(j)} \left[a_k u^{(k)}\right]^{(k-1-j)} \Bigg|_a^b .\end{aligned}$$

תרגיל 8.6 א. אם $Lu = -(a_0u')' + a_1u$ (מקדמים ממשיים), $u(a) = u(b) = 0$, אז

$$(Lu,u) = \int_a^b a_0 u'^2 + a_1 u^2 \ .$$

ב. אם $Lu = (a_0u'')'' - (a_1u')' + a_2u$, $u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0$, אז

$$(Lu,u) = \int_a^b a_0 u''^2 + a_1 u'^2 + a_2 u^2 \ .$$

8.2 תנאי שפה צמודים

בפרק זה נעסוק בתנאי שפה המתאימים לאופרטורים מסדר n. הצורה הכללית של n תנאי שפה לינאריים, הומוגניים, בשתי נקודות היא

$$U_i y := \sum_{k=1}^{n} m_{ik} y^{(k-1)}(a) + \sum_{k=n+1}^{2n} m_{ik} y^{(k-1)}(b) = 0, \qquad i = 1,\ldots,n, \qquad (8.13)$$

ונניח כי הם בלתי תלויים לינארית. לשם קיצור נסמן את n תנאי השפה (8.13) בצורה

$$Uy := (U_1 y, \ldots, U_n y)^T = \mathbf{0}.$$

דוגמא 8.7 תנאי השפה המוטלים חלקם בנקודה a וחלקם ב־b נקראים תנאי שפה מופרדים. למשל,

$$y^{(i)}(a) = 0, \qquad i = 0, \dots, k-1,$$
$$y^{(i)}(b) = 0, \qquad i = 0, \dots, n-k-1.$$

לעומתם התנאים $y^{(i)}(a) - y^{(i)}(b) = 0$, $i = 0, \dots, n-1$, נקראים תנאי שפה מחזוריים. □

מטרתנו היא לקשר בין נוסחת גרין (8.5),

$$(Lu,\, v) - (u,\, L^+ v) = B\big[u, v\big]_a^b, \qquad u, v \in C^{(n)},$$

לבין תנאי השפה $Uy = \mathbf{0}$. בביטוי $B[u,v]$ נפתח את כל הנגזרות לפי נוסחת ליבניץ ונרשום אותו כ־

$$B[u,v] = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \big(p_i \overline{v}\big)^{(j)} u^{(i-j)} = \sum_{k,l=0}^{n-1} b_{kl} \overline{v}^{(k)} u^{(l)}$$
$$= \big(\overline{v},\ \dots,\ \overline{v}^{(n-1)}\big) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & & p_0 \\ b_{21} & & & -p_0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-1} p_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \vdots \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

המטריצה (b_{kl}) היא משולשת ובעלת דטרמיננט $(-1)^{n(n-1)/2} {p_0}^n \neq 0$.

הביטוי $B\big[u,v\big]_a^b$ באגף ימין של נוסחת גרין היא תבנית בילינארית במשתנים

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \big(u(a), \dots, u^{(n-1)}(a), u(b), \dots, u^{(n-1)}(b)\big), \\ \mathbf{g} &= \big(\overline{v}(a), \dots, \overline{v}^{(n-1)}(a), \overline{v}(b), \dots, \overline{v}^{(n-1)}(b)\big) \in R^{2n} \end{aligned} \tag{8.14}$$

ולה מטריצת מקדמים $2n \times 2n$ בצורה $B = \begin{pmatrix} -\Big(b_{ij}(a)\Big) & 0 \\ 0 & \Big(b_{ij}(b)\Big) \end{pmatrix}$ בעלת דטרמיננט $(p_0(a)p_0(b))^n \neq 0$. בסימונים אלה

$$(Lu,\, v) - (u,\, L^+ v) = B\big[u, v\big]_a^b = (B\mathbf{f}, \mathbf{g}).$$

מטריצת המקדמים של (8.13) היא בעלת ממד $n \times 2n$ ודרגה n. כדי לעבוד עם מטריצות ריבועיות והפיכות, נוסיף ל־n תנאי השפה הנתונים (8.13) עוד n תנאים בעלי מבנה דומה

$$U_i y = 0, \qquad i = n, \dots, 2n, \tag{8.15}$$

שיקראו תנאי שפה משלימים (complementary boundary forms). ברור שאת ההשלמה ל־$2n$ תנאים בלתי תלויים אפשר לבחור בצורות רבות. נסמן את התנאים המשלימים (8.15) על ידי

$$U_c y := (U_{n+1} y, \dots, U_{2n} y)^T = \mathbf{0}.$$

מטריצת המקדמים של n תנאי השפה ו־n התנאים המשלימים היא עתה מטריצה הפיכה $2n \times 2n$,
$$M := \Big(m_{ij}\Big)_{i,j=1}^{2n}$$

בעזרת המטריצה M והוקטור $\mathbf{f} = \big(u(a), \ldots, u^{(n-1)}(a), u(b), \ldots, u^{(n-1)}(b)\big)$ שהוגדר ב־(8.14), תנאי השפה Uu בתוספת והתנאים המשלימים $U_c u$ מבוטאים כ־

$$\begin{pmatrix} Uu \\ U_c u \end{pmatrix} = \big(U_1 u, \ldots, U_n u, U_{n+1} u, \ldots, U_{2n} u\big)^T = M\mathbf{f}. \tag{8.16}$$

נעזר בזאת כדי לפשט את התבנית הבילינארית שבנוסחת גרין,

$$B\big[u,v\big]_a^b = (B\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \big((BM^{-1})M\mathbf{f}, \mathbf{g}\big) = \big(M\mathbf{f}, (BM^{-1})^*\mathbf{g}\big) = (M\mathbf{f}, G\mathbf{g})$$

כאשר $G = (BM^{-1})^*$ ו־$^*(\ )$ מציין צמוד מוחלף. בדומה ל־(8.16) נפצל את $G\mathbf{g}$ ל־$n+n$ רכיבים ונמספר אותם בצורה

$$G\mathbf{g} = \begin{pmatrix} {V_c}^+ v \\ V^+ v \end{pmatrix} = \big(\underbrace{V_{2n}v, \ldots, V_{n+1}v}_{{V_c}^+ v}, \underbrace{V_n v, \ldots, V_1 v}_{V^+ v}\big)^T. \tag{8.17}$$

n המשוואות ההומוגניות $V^+ v = \mathbf{0}$ ייקראו תנאי השפה הצמודים ל־$Uu = \mathbf{0}$. אל המשוואות הנוספות ${V_c}^+ v = \mathbf{0}$ נתייחס כתנאי שפה משלימים להם. לסיכום מתקבל כי

$$\begin{aligned} (Lu, v) - (u,\, L^+ v) &= B\big[u,v\big]_a^b = (Uu,\, {V_c}^+ v) + (U_c u,\, V^+ v) \\ &= U_1 u\, V_{2n} v + \cdots + U_n u\, V_{n+1} v + U_{n+1} u\, V_{n+1} v + \cdots + U_{2n} u\, V_1 v. \end{aligned} \tag{8.18}$$

אגף ימין הוא תבנית בילינארית של תנאי שפה הרשומה בצורה קנונית. נוסחה זו הוא הקשר המבוקש בין נוסחת גרין לתנאי השפה הנתונים ותנאי השפה הצמודים.

כפי שצויין למעלה, תנאי השפה המשלימים הבלתי תלויים $U_c u = \mathbf{0}$ ניתנים להבחר בצורות רבות. נשאלת השאלה מה יקרה לתנאי השפה הצמודים כאשר אנו משנים את בחירת תנאי השפה המשלימים?

למה 8.11 יהיו נתונים n תנאי השפה $Uu = 0$. אם התנאים המשלימים $U_c u = 0$ מוחלפים ב־n תנאים משלימים אחרים, $U_c' u = 0$, אז התנאים הצמודים $V^+ v = 0$ יוחלפו בתנאים $V^{+\prime} v = 0$, אך המרחבים הלינאריים שנפרשים על ידיהם הם זהים.

הוכחה. על פי הנתון על תנאי השפה המקוריים והחדשים, חייב להתקיים קשר מהצורה

$$\begin{pmatrix} Uu \\ U_c' u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Uu \\ U_c u \end{pmatrix}$$

ו־C_2 הפיך. לכן מטריצת המקדמים המקורית M והחדשה M' קשורים על ידי

$$M'\mathbf{f} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix} M\mathbf{f}.$$

כמו למעלה,למטריצה M' מתאימה מטריצה G' ולנוסחת גרין יש שני ייצוגים

$$B\big[u,v\big]_a^b = (M\mathbf{f},\ G\mathbf{g}) = (M'\mathbf{f},\ G'\mathbf{g}) = \left(\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix} M\mathbf{f},\ G'\mathbf{g}\right)$$

נכתוב מכפלות פנימיות אלה בצורה

$$(\mathbf{f},\ M^*G\mathbf{g}) = \left(\mathbf{f},\ M^*\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix}^* G'\mathbf{g}\right).$$

זה נכון לכל ערכי $\mathbf{f}$ והמטריצה M^* הפיכה, לכן $G\mathbf{g} = \begin{pmatrix} I_n & C_1^* \\ 0 & C_2^* \end{pmatrix} G'\mathbf{g}$. ולפי (8.17) נכתוב במפורש $\begin{pmatrix} {V_c}^+v \\ V^+v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & C_1^* \\ 0 & C_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {V_c}^{+\prime}v \\ V^{+\prime}v \end{pmatrix}$. בפרט, $V^+v = C_2^*\ V^{+\prime}v$. המטריצה C_2^* הפיכה, על כן המרחבים הלינאריים של הפונקציות המקיימות $V^+v = 0$ ו־$V^{+\prime}v = 0$ הם זהים. □

בזה סיימנו להוכיח:

משפט 8.12 נתון אופרטור Lu ו־n תנאי שפה בלתי תלויים Uu ויהיו U_cu עוד n תנאי שפה משלימים לפי בחירתנו. אזי קיימים n תנאי שפה צמודים V^+v ולהם תנאי שפה משלימים ${V_c}^+v$ כך ש־

$$(Lu,\, v) - (u,\, L^+v) = (Uu,\, {V_c}^+v) + (U_cu,\, V^+v). \tag{8.19}$$

אם $U_c'u$ היא בחירה אחרת של תנאים משלימים ל־Uu אז במקום תנאי השפה הצמודים V^+v מתקבלים תנאים אחרים $V^{+\prime}v$, אולם מרחבי הפונקציות המקיימים $V^+v = 0$ ו־$V^{+\prime}v = 0$ זהים זה לזה.
לכל $u, v \in C^n$ המקיימים $Uu = V^+v = 0$ קיים $(Lu,\, v) = (u,\, L^+v)$.

השוויון (8.19) נותן מוטיווציה להגדרת בעיות שפה צמודות:

הגדרה 8.13 בעית השפה $L^+v = 0$, $V^+v = 0$ נקראת בעיית השפה הצמודה לבעיה $Lu = 0$, $Uu = 0$. יחס זה הוא סימטרי.

דוגמא 8.8 נקח את האופרטור מסדר שני, $Lu \equiv u'' + u$ ושני תנאי השפה

$$\begin{aligned} U_1u: &\qquad u(a) + 2u(b) = 0, \\ U_2u: &\qquad 3u'(a) + 4u'(b) = 0, \end{aligned}$$

ונשלים אותם על ידי התנאים $U_3u = u(b) = 0,\ U_4u = u'(a) = 0$, דהיינו

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

מכיון ש־$L^+v \equiv v'' + v$,

$$\int_a^b \Big(v(u''+u) - u(v''+v)\Big)\,dx = u'(b)v(b) - u(b)v'(b) - u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$$

חישוב ישיר מאמת כי ניתן לכתוב ביטוי בילינארי זה כ־

$$= \underbrace{\Big(u(a)+2u(b)\Big)}_{U_1u} v'(a) + \underbrace{\Big(3u'(a)+4u'(b)\Big)}_{U_2u} \frac{1}{4}v(b)$$
$$+ \underbrace{u'(a)}_{U_3u}\Big(-v(a) - \frac{3}{4}v(b)\Big) + \underbrace{u(b)}_{U_4u}\Big(-2v'(a) - v'(b)\Big)$$

בזה נקבעו תנאי השפה הצמודים U^+v:

$$V_1{}^+v: \qquad -2v'(a) - v'(b) = 0,$$
$$V_2{}^+v: \qquad -v(a) - \frac{3}{4}v(b) = 0,$$

והתנאים המשלימים להם הם $V_3v = \frac{1}{4}v(b) = 0,\ V_4v = v'(a) = 0$. □

משפט 8.14 לבעיית השפה $Lu = 0$, $Uu = 0$ ולבעיית השפה הצמודה יש מספר שווה של פתרונות בלתי תלויים.

הוכחה. **שלב א.** נניח כי לבעית השפה $Lu = 0$, $Uu = 0$ יש בדיוק k פתרונות בלתי תלויים, $u_1(x), \ldots, u_k(x)$. אז k הוקטורים הנוצרים מהם על ידי הפעלת תנאי השפה המשלימים U_cu

$$U_cu_1 = \begin{pmatrix} U_{n+1}u_1 \\ \vdots \\ U_{2n}u_1 \end{pmatrix},\ \cdots,\ U_cu_k = \begin{pmatrix} U_{n+1}u_k \\ \vdots \\ U_{2n}u_k \end{pmatrix} \in R^n, \tag{8.20}$$

הם בלתי תלויים. אחרת, אם k הוקטורים ב־(8.20) תלויים, אז יש קבועים $c_1, \cdots, c_k$, לא כולם 0, כך ש־ $\sum_{i=1}^k c_iU_cu_i = \mathbf{0}$ וכמובן גם

$$U_c\Big(\sum_{i=1}^k c_iu_i\Big) = \mathbf{0}. \tag{8.21}$$

אך כל אחד מהפתרונות $u_1, \ldots, u_k$ מקיים גם את תנאי השפה הנתונים לכן בפרט גם

$$U\Big(\sum_{i=1}^k c_iu_i\Big) = \mathbf{0}. \tag{8.22}$$

לסיכום, הפתרון $\tilde{u} = \sum_{i=1}^{k} c_i u_i$ מקיים גם את n תנאי השפה הנתונים (8.13) וגם את n התנאים המשלימים (8.15). אלה $2n$ משוואות לינאריות הומוגניות בלתי תלויות $M\mathbf{f} = \mathbf{0}$ ופתרונה היחיד הוא הפתרון הטריוויאלי $\mathbf{0} = \big(\tilde{u}(a), \ldots, \tilde{u}^{(n-1)}(a), \tilde{u}(b), \ldots, \tilde{u}^{(n-1)}(b)\big)$. אך n תנאי ההתחלה $\tilde{u}(a) = \ldots = \tilde{u}^{(n-1)}(a) = 0$ גוררים לפי משפט הקיום והיחידות כי $\tilde{u}(x) \equiv 0$, בסתירה להנחה כי $u_1, \ldots, u_k$ בלתי תלויים. בזה הראינו כי k הוקטורים $U_c u_1, \ldots, U_c u_k$ שב־(8.20) הם בלתי תלויים.

שלב ב. יהיו $v_1, \ldots, v_n$ בסיס פתרונות למשוואה הצמודה, $L^+ v_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. לפי משפט 8.12

$$0 = (Lu_i,\, v_j) - (u_i,\, L^+ v_j) = (Uu_i,\, {V_c}^+ v_j) + (U_c u_i,\, V^+ v_j)$$

לכל $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, k$. אך $u_1, \ldots, u_k$ מקיימים את תנאי השפה $Uu_i = 0$ ונשארים רק מחצית המחוברים

$$0 = (U_c u_i,\, V^+ v_j) = U_{n+1} u_i\, V_n^+ v_j + \cdots + U_{2n} u_i\, V_1^+ v_j \tag{8.23}$$

לכל $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n$. נתבונן במשוואות

$$U_{n+1} u\, V_n^+ v_j + \cdots + U_{2n} u\, V_1^+ v_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, n$$

כמערכת n משוואות הומוגניות ב־n הנעלמים $U_{n+1}u, \ldots, U_{2n}u$. אנו יודעים כי יש לה לפחות k פתרונות $\big(U_{n+1}u_i, \ldots, U_{2n}u_i\big)$, $i = 1, \ldots, k$, לכן מטריצת המערכת $\Big(V_l^+ v_j\Big)$, $1 \le l, j \le n$, היא מדרגה $n - k$ לכל היותר. אבל מטריצה זו היא הקובעת כמה פתרונות בלתי תלויים של המשוואה הצמודה $L^+ v = 0$ מקיימים את תנאי השפה $V^+ v = 0$, במקרה שלנו יש לפחות $k' \ge k$ כאלה. בגלל הסימטריה בין שתי בעיות השפה הצמודות אפשר להחליף את תפקידיהן וגם אי השוויון ההפוך מתקיים. מכאן נובע כי $k' = k$, לבעיית השפה ולבעיה הצמודה אליה יש אותו מספר של פתרונות בלתי תלויים. □

מסקנה 8.15 אם לבעיית השפה $Lu = 0$, $Uu = 0$ אין פתרון לא־טריוויאלי אז גם לבעיית השפה הצמודה אין פתרון פרט ל־0. □

8.3 פונקציית גרין

נתונה בעיית השפה הבלתי הומוגנית

$$\begin{aligned} Lu &= f(x), \\ Uu &= 0. \end{aligned} \tag{8.24}$$

כמוטיווציה פיזיקלית ננית כי Lu מתאר דינמיקה חפשית של מערכת פיזיקלית ו־f הוא כוח (אלוץ) המופעל עליה. נסמן ב־$G(x,t)$ את פונקציית ההשפעה (influence function)

המתארת את תגובת המערכת בנקודה x בעקבות הפעלת כוח יחידה בנקודה בודדת t.[1] מכיוון שהמערכת לינארית, התגובה להפעלת כוחות נקודתיים $f_1, \ldots, f_k$ בנקודות בדידות $t_1, \ldots, t_k$ תהיה סופרפוזיציה לינארית של התגובות הנקודתיות ותסתכם ב־

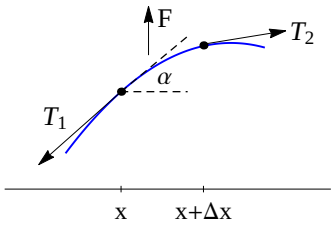
$$u(x) = \sum_{i=1}^{k} G(x, t_i) f_i.$$

אם הכוח החיצוני $f(x)$ מופעל בכל הנקודות $a \le x \le b$, פתרון המערכת יהיה מן הסתם

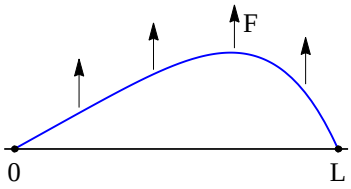
$$u(x) = \int_a^b G(x,t) f(t)\, dt. \tag{8.25}$$

לפיכך נחפש פתרון מצורה זו לבעיית השפה (8.24).

דוגמא 8.9 מיתר מחובר לנקודות $x = 0,\ x = L$ ונמתח על ידי כוח אנכי $F = F(x)$ (איור 8.2). על קטע מיתר בין x ל־$x + \Delta x$ פועל כוח אנכי $F\,\Delta x$ ובשני קצות המיתר פועלים כוחות המתיחות T_1, T_2 בהתאמה (איור 8.1).



איור 8.1: הכוחות הפועלים על קטע מיתר



איור 8.2: מיתר מתוח בין שתי נקודות

שווי המשקל של הכוחות האפקיים והאנכיים מחייב

$$\begin{aligned} T_2 \sin(\alpha + \Delta\alpha) - T_1 \sin(\alpha) &= F\Delta x, \\ T_2 \cos(\alpha + \Delta\alpha) = T_1 \cos(\alpha) &\equiv T_0, \end{aligned}$$

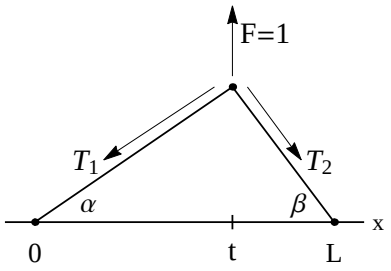
T_0 קבוע. נחלק את המשוואות זו בזו. אם משוואת המיתר היא $u = u(x)$ אז

$$u'(x + \Delta x) - u'(x) = \tan(\alpha + \Delta\alpha) - \tan(\alpha) = \frac{F}{T_0}\Delta x$$

ומתקבלת המשוואה הדיפרנציאלית $T_0\, u'' = F$.

נחפש את פונקציית ההשפעה לבעיית השפה

$$\begin{aligned} T_0\, u'' &= F, \\ u(0) = u(L) &= 0. \end{aligned} \tag{8.26}$$



איור 8.3: פונקציית השפעה

נפעיל בנקודה בודדת $x = t$ כוח בגודל $F = 1$. המיתר יימתח בקווים ישרים בקטעים $0 \le x \le t$ ו־$t \le x \le L$ ויתאר את פונקציית ההשפעה $G(x,t)$ (איור 8.3).

משוואות שווי משקל הכוחות הן

$$T_2 \sin(\beta) + T_1 \sin(\alpha) = F = 1,$$
$$T_2 \cos(\beta) = T_1 \cos(\alpha) \equiv T_0,$$

ומכאן $\tan\beta + \tan\alpha = \dfrac{F}{T_0} = \dfrac{1}{T_0}$. לפי גרף פונקציית ההשפעה שבאיור 8.3, עבור הקטע $0 \le x \le t$

$$\frac{G(x,t)}{x} = \frac{G(t,t)}{t} = \tan\alpha,$$

ובקטע $t \le x \le L$

$$\frac{G(x,t)}{L-x} = \frac{G(t,t)}{L-t} = \tan\beta.$$

על ידי חיבורם

$$G(t,t)\left(\frac{1}{L-t} + \frac{1}{t}\right) = \tan\beta + \tan\alpha = \frac{1}{T_0}$$

וקיבלנו כי $G(t,t) = t(L-t)/T_0 L$. לבסוף פונקציית ההשפעה של בעיית השפה (8.26) היא

$$G(x,t) = \begin{cases} x(L-t)/T_0 L, & 0 \le x \le t, \\ t(L-x)/T_0 L, & t \le x \le L. \end{cases} \qquad \square$$

הדיון הבא ישמש מוטיווציה כיצד למצוא לבעיית השפה (8.24) פתרון מהצורה (8.25). ההוכחה הפורמלית תינתן במשפט 8.16. בפרק 4, מסקנה 4.14, ראינו כי לבעיית ההתחלה

$$Lu = f,$$
$$u^{(i)}(a) = 0, \qquad i = 0, \ldots, n-1,$$

[1] במונחי תורת הדיסטריבוציות פונקציית ההשפעה $G(x,t)$ מקיימת $L\,G(x,t) = \delta(x-t)$ כאשר δ היא "פונקציית Dirac".

יש פתרון מהצורה

$$u(x) = \int_a^x K(x,t) f(t)\, dt, \tag{8.27}$$

כאשר $K(x,t)$ הוא גרעין Cauchy. לכל t קבוע וכפונקציה של x, $K(x,t)$ הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית $Lu = 0$ אשר מקיים בנקודה $x = t$

$$\frac{\partial^i K(t,t)}{\partial x^i} = 0, \quad i = 0, \ldots, n-2, \qquad \frac{\partial^{n-1} K(t,t)}{\partial x^{n-1}} = 1/p_0(t).$$

על פי המודל של (8.25) אנו מעונינים להחליף בנוסחה (8.27) את תחום האינטגרציה מ־$[a,x]$ ל־$[a,b]$. לשם כך נגדיר גרעין חדש

$$\tilde{K}(x,t) = \begin{cases} K(x,t) & a \le t \le x \le b \\ 0 & a \le x \le t \le b. \end{cases}$$

ונכתוב את הפתרון ב־(8.27) כ־

$$u(x) = \int_a^x K(x,t) f(t)\, dt = \int_a^b \tilde{K}(x,t) f(t)\, dt$$

נזכיר כי לפי ההגדרות שלמעלה יש לגרעין $\tilde{K}(x,t)$ התכונות הבאות:

א. כפונקציה של x, $\varphi(x) = \tilde{K}(x,t)$ מקיימת את המשוואה ההומוגנית $L\varphi(x) = 0$ ב־(a,t) וב־(t,b).

ב. הנגזרות החלקיות לפי x, $\dfrac{\partial^i \tilde{K}(t,t)}{\partial x^i}$, $i = 0, \ldots, n-2$, רציפות לכל $a \le x, t \le b$. הנגזרת ה־$n-1$, $\dfrac{\partial^{n-1} \tilde{K}(t,t)}{\partial x^{n-1}}$, רציפה במשולשים $a \le x \le t \le b$, $a \le t \le x \le b$ ועל הקו $x = t$ יש לה קפיצה

$$\frac{\partial^{n-1} \tilde{K}(t+0,t)}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1} \tilde{K}(t-0,t)}{\partial x^{n-1}} = \frac{1}{p_0(t)}\ .$$

לאור ההערות דלעיל ננסה לשנות את $\tilde{K}(x,t)$ כך שגם תנאי השפה $Uu = 0$ יתקיימו וגם התכונות דלעיל יישמרו. במשפט הבא נוכיח כי ניתן לבחור גרעין בצורה

$$G(x,t) = \tilde{K}(x,t) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x)$$

שתוליך אותנו לפתרון של בעיית השפה הבלתי הומוגנית בצורה (8.25).

לאחר ההקדמה הארוכה נגדיר את פונקציית גרין[2] באופן פורמלי ונווכיח את קיומה ותכונותיה.

[2] George Green, 1793-1841. חוקר חשמל ומגנטיות. על שמו פונקציית גרין, משפט גרין

משפט 8.16 נניח כי לבעיה ההומוגנית $Lu = 0$, $Uu = 0$ אין פתרון לא טריויאלי. אזי קיימת פונקציה יחידה $G(x,t)$ הנקראת פונקציית גרין *(Green's function)* בעלת התכונות הבאות:

א. $\dfrac{\partial^i G(x,t)}{\partial x^i}$, $i = 0, \ldots, n-2$, קיימים ורציפים לכל $a \le x, t \le b$.

ב. $\dfrac{\partial^{n-1} G(x,t)}{\partial x^{n-1}}$ רציפה במשולשים $a \le x \le t \le b$, $a \le t \le x \le b$ ועל הקו $x = t$ יש לה קפיצה

$$\frac{\partial^{n-1} G(t+0,t)}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1} G(t-0,t)}{\partial x^{n-1}} = \frac{1}{p_0(t)} \ .$$

ג. כפונקציה של x, $G(x,t)$ מקיימת את המשוואה ההומוגנית $Lu = 0$ ב־(a,t) וב־(t,b).

ד. כפונקציה של x, $G(x,t)$ מקיימת את תנאי השפה $Uu = 0$.

בעזרת פונקציה זו פתרון הבעיה הלא־הומוגנית $Lu = f$, $Uu = 0$ נתון על ידי

$$u(x) = \int_a^b G(x,t) f(t)\, dt.$$

הוכחה. תחילה נוכיח כי יש פונקציה המקיימת את התכונות א'־ד'. תהיינה $u_1, \ldots, u_n$ בסיס למרחב הפתרונות של $Lu = 0$. לפי תכונה ג' נחפש

$$G(x,t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \ c_i u_i(x), & a \le x \le t \le b, \\ \sum_{i=1}^n \ d_i u_i(x), & a \le t \le x \le b. \end{cases}$$

תנאי הרציפות בהנחה ב' ותנאי הקפיצה בהנחה ג' עבור $x = t$ מתורגמים ל־

$$\sum_{i=1}^n d_i \, u_i^{(k)}(t) \ - \ \sum_{i=1}^n c_i \, u_i^{(k)}(t) = 0, \qquad k = 0, \ldots, n-2,$$
$$\sum_{i=1}^n d_i u_i^{(n-1)}(t) - \sum_{i=1}^n c_i u_i^{(n-1)}(t) = 1/p_0(t),$$

שהיא המערכת הבלתי הומוגנית

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n (d_i - c_i) \, u_i^{(k)}(t) = 0, \qquad k = 0, \ldots, n-2, \\ &\sum_{i=1}^n (d_i - c_i) \, u_i^{(n-1)}(t) = 1/p_0(t). \end{aligned} \tag{8.28}$$

דטרמיננט מערכת זו הוא $W(u_1, \ldots, u_n)(t) \neq 0$ הרציף ב־t ולכן $(d_i - c_i)(t)$ נקבעים באופן יחיד ורציפים ב־t. אי לכך נרשום את G כ־

$$G(x,t) = \sum_{i=1}^n \ c_i u_i(x) + \begin{cases} 0, & a \le x \le t \le b, \\ \sum_{i=1}^n (d_i - c_i)(t) \, u_i(x), & a \le t \le x \le b. \end{cases}$$

תנאי הרציפות (8.28) זהים לדרישות המוטלות על $\tilde{K}(x,t)$ בעמוד 215 ולפיכך נוכל לכתוב כ־

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x) \; + \; \tilde{K}(x,t).$$

נעבור לתנאי השפה. לפי דרישה ד'

$$U_k G = \sum_{i=1}^{n} c_i U_k u_i + U_k \tilde{K} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

או

$$\sum_{i=1}^{n} c_i U_k u_i = -U_k \tilde{K}, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{8.29}$$

זו מערכת של n משוואות אלגבריות לינאריות ב־n נעלמים $c_1, \ldots, c_n$ עם הדטרמיננט $\Delta = \det\Big(U_k u_i\Big)$. אך הנחנו כי לבעיה ההומוגנית $Lu = 0$, $Uu = 0$, אין פתרון לא טריוויאלי $u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$ כלומר למערכת

$$U_k u = \sum_{i=1}^{n} c_i U_k u_i = 0, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

אין פתרון לא טריוויאלי $(c_1, \ldots, c_n)$. לפיכך

$$\Delta = \det\Big(U_k u_i\Big) \neq 0.$$

זה מבטיח כי למערכת (8.29) פתרון יחיד $(c_1, \ldots, c_n)$. אגף ימין של (8.29) מורכב מביטויים מהצורה $K^{(i)}(a,t)$, $K^{(i)}(b,t)$ ולכן הפתרונות $c_i = c_i(t)$ רציפות ב־t, וכך גם d_i.

תכונות א'־ד' מגדירות פונקציית גרין יחידה. לו היו שתיים, אז הפרשן היה פתרון $Lu = 0$ ב־$C^n[a,b]$ המקיים את תנאי השפה ההומוגניים, בניגוד להנחתנו.

נותר להראות כי $u(x) = \int_a^b G(x,t) f(t)\, dt$ הוא פתרון של המשוואה הבלתי הומוגנית. מכיון שנגזרות G עד סדר $n-2$ הן רציפות,

$$u^{(i)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^i G(x,t)}{\partial x^i} f(t)\, dt \;, \qquad i = 0, \ldots, n-2.$$

בגזירה הבאה ננהג בזהירות:

$$u^{(n-1)}(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_a^x G^{(n-2)}(x,t) f(t)\, dt + \int_x^b G^{(n-2)}(x,t) f(t)\, dt\right]$$

$$= \int_a^x G^{(n-1)}(x,t) f(t)\, dt + G^{(n-2)}(x,x) f(x) + \int_x^b G^{(n-1)}(x,t) f(t)\, dt - G^{(n-2)}(x,x) f(x)$$

$$= \int_a^b G^{(n-1)}(x,t) f(t)\, dt.$$

לבסוף בגזירה האחרונה

$$u^{(n)}(x) =$$

$$\int_a^x G^{(n)}(x,t)f(t)dt + G^{(n-1)}(x,x-0)f(x) + \int_x^b G^{(n)}(x,t)f(t)dt - G^{(n-1)}(x,x+0)f(x)$$

$$= \int_a^b G^{(n)}(x,t)f(t)\,dt + \Big[G(x,x-0) - G(x,x+0)\Big]f(x)$$

אולם הודות לתכונה ב' $G(x,x-0) = G(x+0,x)$ (כי אלה שני גבולות המייצגים התקרבות אל הנקודה (x,x) לאורך שני מסלולים במשולש $a \le t < x \le b$) וכך גם $G(x,x+0) = G(x-0,x)$. לכן

$$= \int_a^b G^{(n)}(x,t)f(t)\,dt + \Big[G(x+0,x) - G(x-0,x)\Big]f(x) = \int_a^b G^{(n)}(x,t)f(t)\,dt + \frac{f(x)}{p_0(x)}.$$

נסכם ונקבל

$$Lu = p_0u^{(n)} + \cdots + p_nu = \int_a^b LG(x,t)f(t)\,dt + f(x) = f(x),$$

כי $LG = 0$ ב־$[a,t)$ וב־$(t,b]$. u מקיים את תנאי השפה, כי הודות למבנה שלהם, $Uu = \int_a^b UG(x,t)f(t)\,dt = 0$. □

תרגיל 8.10 הוכח כי לפונקציית גרין יש ייצוג

$$G(x,t) = \begin{vmatrix} \tilde{K}(x,t) & u_1(x) & \cdots & u_n(x) \\ U_1\tilde{K}(x,t) & U_1u_1 & \cdots & U_1u_n \\ \vdots & & & \\ U_n\tilde{K}(x,t) & U_nu_1 & \cdots & U_nu_n \end{vmatrix} \Big/ \left|U_ku_i\right|. \tag{8.30}$$

ניתן לכתוב זאת גם כ־

$$G(x,t) = \tilde{K}(x,t) + \begin{vmatrix} 0 & u_1(x) & \cdots & u_n(x) \\ U_1\tilde{K}(x,t) & U_1u_1 & \cdots & U_1u_n \\ \vdots & & & \\ U_n\tilde{K}(x,t) & U_nu_1 & \cdots & U_nu_n \end{vmatrix} \Big/ \left|U_ku_i\right| \tag{8.31}$$

בו המחובר הראשון בלתי תלוי בתנאי השפה ותורם קפיצה והמחובר השני כפונקציה של x הוא פתרון ב־C^n.

תרגיל 8.11 הוכח כי פונקציית גרין המתאימה ל־$Ly = y''$, $y(a) = y(b) = 0$ היא

$$G_1(x,t) = \begin{cases} -(x-a)(b-t)/(b-a), & a \le x \le t \le b, \\ -(t-a)(b-x)/(b-a), & a \le t \le x \le b. \end{cases}$$

השווה לדוגמא 4.24.
הראה כי פונקציית גרין המתאימה לאותה משוואה ולתנאי השפה $y(a) = y'(b) = 0$ היא

$$G_2(x,t) = \begin{cases} -(x-a), & a \le x \le t \le b, \\ -(t-a), & a \le t \le x \le b. \end{cases}$$

דוגמא 8.12 במשפט 5.3 הוכחנו את אי שוויון ליאפונוב: אם

$$(b-a)\int_a^b p^+(t)\,dt < 4, \qquad p^+(x) = \max\{\,p(x), 0\} \ge 0, \tag{8.32}$$

אז לאף פתרון של $y'' + p(x)y = 0$ אין שני אפסים בקטע $[a,b]$. נוכיח טענה זו שוב והפעם בעזרת פונקציית גרין.

אם יש פתרון של $y'' + p(x)y = 0$ עם שני אפסים בקטע, אז לפי משפט שטורם גם למשוואה $y'' + p^+(x)y = 0$ עם $p^+(x) \ge p(x)$ יש פתרון עם שני אפסים עוקבים α, β, $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ כך שהפתרון חיובי ביניהם. מכיון שאגף שמאל של (8.32) גדל עם הקטע, מספיק להוכיח את הטענה במקרה בו שני האפסים העוקבים α, β הם בדיוק a, b. בעזרת פונקציית גרין $G_1(x,t)$ של האופרטור $Ly = y''$ שחושב למעלה בתרגיל 8.11,

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_a^b G_1(x,t)\Big(-p^+(t)y(t)\Big)dt \\ &= \int_a^x \frac{(t-a)(b-x)}{b-a}\,p^+(t)y(t)\,dt + \int_x^b \frac{(x-a)(b-t)}{b-a}\,p^+(t)y(t)\,dt. \end{aligned}$$

כאשר $a \le t \le x \le b$, אז $(t-a)(b-x) \le (t-a)(b-t) \le (b-a)^2/4$ ובאופן דומה $(x-a)(b-t) \le (t-a)(b-t) \le (b-a)^2/4$ כש־$a \le x \le t \le b$. מכיון ש־$p^+(x) \ge 0,\ y(x) \ge 0$,

$$y(x) \le \frac{b-a}{4}\int_a^b p^+(t)y(t)\,dt\ .$$

יהי $y(x^*) = \max_{a\le x\le b} y(x) > 0$. עבור $x = x^*$ זה מקבלים $1 \le \dfrac{b-a}{4}\displaystyle\int_a^b p^+(t)\,dt$, בסתירה להנחה. □

תרגיל 8.13 נתון האופרטור $Lu = (pu')' + qu$.
א. הראה כי אם u_1, u_2 הם שני פתרונות $Lu = 0$ אז $p(x)W(u_1,u_2)(x) \equiv \text{const}$.
ב. נניח כי למשוואה $Lu = 0$ ולתנאי השפה $u(a) = u(b) = 0$ אין פתרון בלתי טריוויאלי. הוכח כי פתרון u_1 המקיים $u_1(a) = 0$ ופתרון u_2 המקיים $u_2(b) = 0$ הם בלתי תלויים ופונקציית גרין המתאימה לאופרטור L ולתנאי השפה $u(a) = u(b) = 0$ היא

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{u_1(x)u_2(t)}{K}, & a \le x \le t \le b, \\ \dfrac{u_1(t)u_2(x)}{K}, & a \le t \le x \le b, \end{cases}$$

כאשר $K \equiv p(x)W(u_1,u_2)(x)$.

תרגיל 8.14 הראה כי פונקציית גרין המתאימה ל־$Ly = y'' + \omega^2 y$, $y(0) = y(1) = 0$, $\omega \neq 0, \pi, 2\pi, \ldots$, היא

$$G(x,t) = \begin{cases} -\dfrac{\sin\omega x \, \sin\omega(1-t)}{\omega \sin\omega}, & 0 \le x \le t \le 1, \\ -\dfrac{\sin\omega t \, \sin\omega(1-x)}{\omega \sin\omega}, & 0 \le t \le x \le 1. \end{cases}$$

משפט 8.17 אם לבעיה $Lu = 0$, $Uu = 0$ מתאימה פונקציית גרין $G(x,t)$ אז פונקציית גרין של הבעיה הצמודה $L^+u = 0$, $U^+u = 0$ היא $\overline{G(t,x)}$.

הוכחה. לפי מסקנה 8.15, אם לבעיית השפה ההומוגנית אין אף פתרון לא טריויאלי, אז גם לבעיה הצמודה אין פתרון לא טריויאלי, לפיכך יש לה פונקציית גרין. נסמן את פונקציית גרין של הבעיה הצמודה ב־$H(x,t)$. נקח $a < t_1 < t_2 < b$, ונפעיל את נוסחת גרין על $G(x,t_1)$ ו־$H(x,t_2)$. מכיון ש־$LG(x,t_1) = 0$ ב־(a,t_1) וב־(t_1,b) וכן $LH(x,t_2) = 0$ ב־(a,t_2) וב־(t_2,b),

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b (\overline{H}\, LG - G\,\overline{L^+H})\, dx = \left(\int_a^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^{b} \right) (\overline{H}\, LG - G\,\overline{L^+H})\, dx \\ &= B\Big[G,H\Big]_a^{t_1-0} + B\Big[G,H\Big]_{t_1+0}^{t_2-0} + B\Big[G,H\Big]_{t_2+0}^{b} \\ &= B\Big[G,H\Big]_a^{b} - B\Big[G,H\Big]_{t_1-0}^{t_1+0} - B\Big[G,H\Big]_{t_2-0}^{t_2+0}. \end{aligned}$$

$G(x,t_1)$ ו־$H(x,t_2)$ מקיימים את תנאי השפה והתנאים הצמודים, בהתאמה, לכן $B\Big[G,H\Big]_a^{b} = 0$ ונשאר

$$B\Big[G,H\Big]_{t_1-0}^{t_1+0} + B\Big[G,H\Big]_{t_2-0}^{t_2+0} = 0.$$

בין כל אברי התבנית הבילינארית $B[G,H]$ האברים הבלתי רציפים היחידים הם אלה המכילים נגזרות ממעלה $n-1$, ליתר דיוק

$$p_0 \left(\overline{H}\, G^{(n-1)} + (-1)^{n-1} G\, \overline{H}^{(n-1)} \right).$$

במקרה שלנו נותר

$$p_0(t_1)\overline{H}(t_1,t_2)\, G^{(n-1)}\Big|_{t_1-0}^{t_1+0} + (-1)^{n-1} G(t_2,t_1)\, \overline{H}^{(n-1)}\Big|_{t_2-0}^{t_2+0} = 0.$$

מכיון ש־$L^+y = (-1)^n\overline{p}_0 y^{(n)} + \cdots +$, לפי הגדרת פונקציות גרין

$$G^{(n-1)}\Big|_{t_1-0}^{t_1+0} = \frac{1}{p_0(t_1)}, \qquad H^{(n-1)}\Big|_{t_2-0}^{t_2+0} = \frac{1}{(-1)^n\overline{p}_0(t_2)}$$

וכך נשאר $\overline{H}(t_1,t_2) = G(t_2,t_1)$. □

הוכחה נוספת. הפעם נביט בבעיית השפה הבלתי הומוגניות $Lu = q(x),\ Uu = 0$, ובבעיה הצמודה $L^+v = r(x),\ U^+v = 0$, ובפתרונותיהן

$$u(x) = \int_a^b G(x,t)q(t)\,dt, \qquad v(x) = \int_a^b H(x,t)r(t)\,dt.$$

הודות לתנאי השפה הצמודים ש־u, v מקיימים, $\int_a^b(\overline{v}\,Lu - u\,\overline{L^+v})\,dx = 0$, דהיינו

$$\int_a^b \left[\int_a^b \overline{H(x,t)r(t)}\,dt \cdot q(x) - \int_a^b G(x,t)q(t)\,dt \cdot \overline{r(x)}\right] dx = 0\ .$$

באינטגרל הכפול השמאלי נחליף את שמות המשתנים מ־x ל־t ולהפך, ונקבל

$$\int_a^b \left[\int_a^b \Big(\overline{H(t,x)} - G(x,t)\Big)\,\overline{r(x)}q(t)\,dt\right] dx = 0\ .$$

שוויון זה נכון לכל r, q והגרעינים H, K בלתי תלויים ב־r, q, לפיכך $H(t,x) \equiv \overline{G(x,t)}$. □

8.4 בעיית שפה צמודה לעצמה

הגדרה 8.18 בעיית שפה $(L,\ U)$ המורכבת מאופרטור דיפרנציאלי L ותנאי שפה $Uu = 0$ נקראת בעיית שפה צמודה לעצמה אם

$$(Lu, v) = (u, Lv)$$

לכל $u, v \in C^n[a,b]$ המקיימים את תנאי השפה $Uu = Uv = 0$.

דוגמא פשוטה ביותר היא בעיית השפה מסדר ראשון $Lu = iu'$ עם תנאי השפה $U_1u = u(a) - u(b) = 0$. כי $L = L^+$ ו־

$$(Lu,v) - (u,Lv) = \int_a^b \Big(iu'\,\overline{v} - u\,\overline{iv'}\Big)dx = iu\overline{v}\Big|_a^b = i\,\Big(u(b)\overline{v(b)} - u(a)\overline{v(a)}\Big) = 0$$

לכל u, v המקיימים $u(a) = u(b),\ v(a) = v(b)$.

ברור כי אם $L = L^+$ ו־$Uu = Uv = 0$ גוררים $B\big[u,v\big]_a^b = 0$ אז בעיית שפה $(L,\ U)$ צמודה לעצמה. אך גם הכיוון ההפוך נכון.

משפט 8.19 אם לכל $u,v \in C^n[a,b]$ תנאי השפה $Uu = Uv = 0$ גוררים כי $(Lu,v) = (u,Lv)$ אז בהכרח $L = L^+$.

הוכחה. נתון ש־$(Lu,v) = (u,Lv)$ לכל $u,v \in C^n[a,b]$ המקיימים $Uu = Uv = 0$. נבחר פונקציות u,v המתאפסות זהותית בסביבות מסוימות של קצוות הקטע $[a,b]$. עבור פונקציות אלה גם הנגזרות מתאפסות בקצוות, לכן בלי ספק מקיימות $Uu = Uv = 0$ ולפי הנחת המשפט $(Lu,v) = (u,Lv)$. מצד שני לפי נוסחת גרין גם

$$(Lu,\, v) - (u,\, L^+v) = B\big[u,v\big]_a^b = 0.$$

נחסיר ונקבל

$$\big(u,\, (L - L^+)v\big) = 0$$

לכל u כנ"ל. המסקנה היא כי $(L - L^+)v \equiv 0$ לכל פונקציה v מן האוסף. אך לאופרטור לינארי רק מספר סופי של פתרונות בלתי תלויים, לכן נובע ש־$L = L^+$. □

דוגמא 8.15 נתון האופרטור $Lu = (pu')' + qu$, p,q ותנאי השפה

$$U_1u \equiv M_{11}u(a) + M_{12}u'(a) + N_{11}u(b) + N_{12}u'(b) = 0,$$
$$U_2u \equiv M_{21}u(a) + M_{22}u'(a) + N_{21}u(b) + N_{22}u'(b) = 0,$$

לינאריים והומוגנים ובהם $M = (M_{ij})\,, N = (N_{ij})\,, p(x), q(x)$ ממשיים. מה התנאי שבעיה זו תהיה צמודה לעצמה?

עבור האופרטור שלנו $(Lu,v) - (u,Lv) = p\big(u'\,\overline{v} - u\,\overline{v}'\big)\Big|_a^b$ מתאפס בתנאי ש־

$$p(a)\begin{vmatrix} \overline{v} & u \\ \overline{v}' & u' \end{vmatrix}(a) = p(b)\begin{vmatrix} \overline{v} & u \\ \overline{v}' & u' \end{vmatrix}(b). \tag{8.33}$$

מצד שני ניתן לכתוב את תנאי השפה של u,v בצורה

$$M\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}(a) + N\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}(b) = 0, \qquad M\begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix}(a) + N\begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix}(b) = 0,$$

ועבור M,N ממשיים ניתן לאחד את שני השוויונות הוקטוריים לשוויון המטריצי

$$M\begin{pmatrix} \overline{v} & u \\ \overline{v}' & u' \end{pmatrix}(a) + N\begin{pmatrix} \overline{v} & u \\ \overline{v}' & u' \end{pmatrix}(b) = 0.$$

הדטרמיננטים המתאימים מקיימים

$$\det(M)\begin{vmatrix} \overline{v} & u \\ \overline{v}' & u' \end{vmatrix}(a) = \det(N)\begin{vmatrix} \overline{v} & u \\ \overline{v}' & u' \end{vmatrix}(b). \tag{8.34}$$

מהשוואת השוויונות (8.33), (8.34) נובע כי התנאי שהבעיה תהיה צמודה לעצמה הוא

$$p(a)/\det(M) = p(b)/\det(N).$$

למשל עבור בעיית השפה

$$\begin{aligned} &Lu \equiv u'' \\ &u(0) + Au(1) = 0, \\ &u'(0) + Bu'(1) = 0 \end{aligned}$$

תנאי השפה מיוצגים על ידי $N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. הבעיה צמודה לעצמה אם $\det(M) = \det(N)$, כלומר $1 = AB$. □

דוגמא 8.16 נתון האופרטור $Lu = (pu')' + qu$, p, q ממשיים ותנאי השפה המופרדים

$$\begin{aligned} &\alpha u(a) + \beta u'(a) = 0, \\ &\gamma u(b) + \delta\, u'(b) = 0. \end{aligned}$$

בעיה זו צמודה לעצמה אם ורק אם α/β ,γ/δ ממשיים.

כי בעזרת תנאי השפה של u, v

$$\begin{aligned} &(Lu, v) - (u, Lv) = p\big(u'\,\overline{v} - u\,\overline{v'}\big)\Big|_a^b \\ &= p(b)u(b)\overline{v(b)}\left[\gamma/\delta - \overline{\gamma/\delta}\right] - p(a)u(a)\overline{v(a)}\left[\alpha/\beta - \overline{\alpha/\beta}\right] = 0 \end{aligned}$$

לכל ערכי $u(a), u(b)$. מכאן נובע כי $\gamma/\delta = \overline{\gamma/\delta}$, $\alpha/\beta = \overline{\alpha/\beta}$. □

תרגיל 8.17 הוכח כי האופרטור $Lu = \sum_{k=0}^{m} \left(p_k u^{(k)}\right)^{(k)}$, p_k ממשיים ותנאי השפה

$$u^{(i)}(a) = u^{(i)}(b) = 0, \qquad i = 0, \ldots, m-1,$$

יוצרים בעיית שפה צמודה לעצמה.

8.5 בעיית ערכים עצמיים צמודה לעצמה

ראינו בסעיף 5.3 כי לבעיות שפה הומוגניות לא בהכרח יש פתרון לא טריוויאלי. מענינת יותר השאלה עבור איזה ערכי הפרמטר λ יש לבעיית השפה

$$\begin{aligned} &Lu = \lambda u, \\ &Uu = 0, \end{aligned} \tag{8.35}$$

פתרון לא טריוויאלי? ערך כזה של λ נקרא ערך עצמי (*eigenvalue*, בגרמנית *eigenwerte*) והפתרון הבלתי טריוויאלי המתאים נקרא פונקציה עצמית (*eigenfunction*). בעיות ערכים עצמיים מתעוררות תוך כדי פתרון משוואות חלקיות בשיטת הפרדת המשתנים (ראה סעיף 5.3). במכניקת הקוונטים משוואת שרדינגר (Schrödinger) במימד 1 ובלתי תלויה בזמן היא

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + V(x)\Psi = E\Psi$$

כאשר תנאי השפה נקבעים על פי הגיאומטריה של הבעיה והאנרגיה E ממלאת את תפקיד הערך העצמי.

בסעיף 5.5 דנו בערכים עצמיים של בעיית השפה $y'' + \lambda p(x)y = 0$, $y(a) = y(b) = 0$. במשפט 5.8 טיפלנו במשוואה $(Py')' + (\lambda Q + R))y = 0$ ואותם תנאי שפה.

דוגמא 8.18 א. בדוגמא 5.10 ראינו כי לבעיית השפה

$$-u'' = \lambda u, \qquad u(0) = u(L) = 0$$

ערכים עצמיים $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ ומתאימות להם הפונקציות העצמיות $\varphi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$.

ב. באופן דומה מחשבים כי לבעיית השפה המחזורית

$$\begin{aligned} -u'' &= \lambda u, \\ U_1 u &\equiv u(0) - u(L) = 0, \\ U_2 u &\equiv u'(0) - u'(L) = 0, \end{aligned}$$

מתאימים $\lambda_0 = 0$ (ופונקציה עצמית $\varphi_0(x) \equiv 1$), $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2$ (ומתאימות לו שתי פונקציות עצמיות $\sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right),\ \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)$).

בסעיף זה נדון בערכים עצמיים של בעיות הצמודות לעצמן מסדר כלשהו.

התוצאה הראשונה מתארת תכונות של ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות. את קיום הערכים העצמיים נוכיח בהמשך.

משפט 8.20 תהי בעיית הערכים העצמיים (8.35) צמודה לעצמה. אז הערכים העצמיים של הבעיה ממשיים ואין להם נקודת הצטברות סופית. פונקציות עצמיות השייכות לערכים עצמיים שונים הן אורתוגונליות.

הוכחה. יהי λ ערך עצמי ו־u פונקציה עצמית מתאימה. מכיון ש־$L^+ = L$, לפי נוסחת גרין עם $u = v$,

$$0 = (Lu,\, u) - (u,\, Lu) = \int_a^b \left(\lambda u \cdot \overline{u} - u \cdot \overline{\lambda u}\right) dx = (\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b |u|^2\, dx\ .$$

לפיכך $\lambda - \overline{\lambda} = 0$, והערך העצמי ממשי.

יהיו $\lambda_1 \neq \lambda_2$ שני ערכים עצמיים שונים (וכאמור לעיל ממשיים) ו־$u_1(x), u_2(x)$ פונקציות עצמיות המתאימות להם, אז לפי נוסחת גרין

$$0 = (Lu_1,\, u_2) - (u_1,\, Lu_2) = \int_a^b \left(\lambda_1 u_1 \cdot \overline{u_2} - u_1 \cdot \lambda_2 \overline{u_2}\right)\, dx = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b u_1 \overline{u_2}\, dx\ .$$

מכיון ש־$\lambda_1 \neq \lambda_2$, נובע ש־$(u_1, u_2) = \int_a^b u_1 \overline{u_2}\, dx = 0$ כלומר הפונקציות אורתוגונליות.

יהיו $u_1(x,\lambda), \ldots, u_n(x,\lambda)$ בסיס למרחב הפתרונות של המשוואה $Lu - \lambda u = 0$ המוגדרים על ידי תנאי ההתחלה $u_i^{(j)}(a) = \delta_{ij}$. מכיוון שהמשוואה הדיפרנציאלית תלויה באופן אנליטי בפרמטר λ לכל λ, גם הפתרונות $u_i(x,\lambda)$ תלויים בו באופן אנליטי. דבר זה מוכח באופן דומה להוכחת משפט 3.19.

λ הוא ערך עצמי אם קיימת קומבינציה לינארית לא טריוויאלית $u = \sum_{i=1}^n c_i u_i(x,\lambda)$ אשר מקיימת את n תנאי השפה:

$$U_k u = \sum_{i=1}^{n} c_i\, U_k u_i(\,\cdot\,,\lambda) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

התנאי לכך הוא

$$\Delta(\lambda) = \det\Big(U_k u_i(\,\cdot\,,\lambda)\Big) = 0,$$

כלומר הערכים העצמיים הם אפסי הפונקציה $\Delta(\lambda)$ אשר אנליטית לכל λ)פונקציה אנליטית שלמה(. אם יש סדרה אינסופית של ערכים עצמיים בעלת נקודת הצטברות סופית אז זו סדרת אפסים של פונקציה אנליטית שלמה המצטברת לנקודה סופית ועל פי תורת הפונקציות האנליטיות זה גורר כי $\Delta(\lambda) \equiv 0$. זו סתירה, כי הוכחנו שערכי λ מרוכבים אינם יכולים להיות ערכים עצמיים ואינם מאפסים את $\Delta(\lambda)$. □

עתה ניגש להוכיח קיום ערכים עצמיים לבעיה (8.35).

כדי שנוכל לנצל את מכשיר פונקציית גרין, נניח כי לבעיית הערכים העצמיים (8.35), $\lambda = 0$ אינו ערך עצמי. אפשר להניח זאת בלי הגבלת כלליות: לערכים העצמיים אין נקודת הצטברות וקיים מספר ממשי c שאינו ערך עצמי. בעזרתו נרשום את בעיית השפה כ־

$$(L - c)u = (\lambda - c)u, \qquad Uu = 0.$$

גם האופרטור $L_1 = L - c$ ותנאי השפה $Uu = 0$ יוצרים בעיה צמודה לעצמה כי ל־c ממשי

$$(L_1 u, v) - (u, L_1 v) = (Lu - cu, v) - (u, Lv - cv) = (Lu, v) - (u, Lv) = 0.$$

מכיון ש־c שאינו ערך עצמי של L, $\lambda = 0$ אינו ערך עצמי של L_1, כדרוש. הערכים העצמיים של שתי הבעיות נבדלים עתה ב־c והפונקציות העצמיות שלהן זהות.

אם $\lambda = 0$ אינו ערך עצמי אז לבעיה ההומוגנית $Lu = 0$, $Uu = 0$ אין פתרון לא טריוויאלי ולפי משפט 8.16 קיימת לה פונקציית גרין $G(x,t)$. בסימון זה בעיית השפה $Lu = f$, $Uu = 0$ שקולה ל־

$$u(x) = \int_a^b G(x,t) f(t)\, dt.$$

נגדיר לכל $f \in C[a,b]$ אופרטור אינטגרלי לינארי

$$(\mathcal{G} f)(x) = \int_a^b G(x,t) f(t)\, dt.$$

אז בעיית הערכים העצמיים הדיפרנציאלית (8.35), $Lu = \lambda u$, $Uu = 0$, מתורגמת לבעיית ערכים עצמיים עבור משוואה אינטגרלית של פרדהולם[3]

$$u(x) = \lambda \int_a^b G(x,t)\, u(t)\, dt,$$

דהיינו

$$\mathcal{G}u = \mu u, \qquad \mu = 1/\lambda.$$

טענה 8.21 שלוש הטענות הבאות שקולות:

א. בעיית השפה $(L,\, U)$ צמודה לעצמה: לכל $u, v \in C^n$ המקיימים $Uu = Uv = 0$, קיים $(Lu, v) = (u, Lv)$.

ב. האופרטור $\mathcal{G}$ צמוד לעצמו: לכל $f, g \in C$ קיים $(\mathcal{G}f, g) = (f, \mathcal{G}g)$.

ג. $G(x.t) = \overline{G(t,x)}$.

הוכחה.

א $\Leftarrow$ ב. עבור $f, g \in C[a,b]$ נתונים נגדיר $u = \mathcal{G}f,\ v = \mathcal{G}g$. אז $u, v \in C^n[a,b]$ והם מקיימים את תנאי השפה $Uu = 0,\ Uv = 0$. אם $(L,\, U)$ צמודה לעצמה אז

$$0 = (Lu, v) - (u, Lv) = (L\mathcal{G}f, \mathcal{G}g) - (\mathcal{G}f, L\mathcal{G}g) = (f, \mathcal{G}g) - (\mathcal{G}f, g).$$

ב $\Leftarrow$ א. עבור $u, v \in C^n[a,b]$ נתונים אשר מקיימים $Uu = 0,\ Uv = 0$ נגדיר $f = Lu,\ g = Lv$. אז $u = \mathcal{G}f,\ v = \mathcal{G}g$. אם $\mathcal{G}$ צמוד לעצמו אז

$$0 = (\mathcal{G}f, g) - (f, \mathcal{G}g) = (u, Lv) - (Lu, v).$$

ב $\Leftarrow$ ג. אם $\mathcal{G}$ צמוד לעצמו אז לכל $f, g \in C[a,b]$,

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{G}f, g) - (f, \mathcal{G}g) \\ &= \int_a^b \Big(\int_a^b G(x,t) f(t)\, dt \Big) \overline{g(x)}\, dx - \int_a^b f(x) \Big(\overline{\int_a^b G(x,t) g(t)\, dt} \Big) dx \\ &= \iint G(x,t) f(t) \overline{g(x)}\, dt\, dx - \iint \overline{G(x,t)} f(x) \overline{g(t)}\, dx\, dt \end{aligned}$$

ולאחר החלפה בין המשתנים באינטגרל השני

$$= \iint \Big(G(x,t) - \overline{G(t,x)} \Big) f(t) \overline{g(x)}\, dt\, dx\ .$$

מכיון שזה נכון לכל f, g, נובע ג'. □

בזה תרגמנו את בעיית הערכים העצמיים של בעיית השפה הצמודה לעצמה $(L,\, U)$ לבעיית ערכים עצמיים של אופרטור אינטגרלי $\mathcal{G}$ צמוד לעצמו. בעיה זו שיכת לתורת

[3] Erik Ivar Fredholm, 1866-1927

המשוואות האינטגרליות או לאנליזה פונקציונלית ולא למשוואות דיפרנציאליות. נביא כאן הוכחה לפי הספר K. Yosida, Lectures on differential and integral equations, Wiley 1960.

נעבוד במרחב הפונקציות $C[a,b]$ עם מכפלה פנימית $(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$ ונורמה $||f||=(f,f)^{1/2}=\left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$. נורמה זו מסומנת גם כ־$||f||_2$ ומכונה בשם נורמת L^2. אך למעשה רוב התוצאות בתוקף עבור פונקציות מדידות על פי Lebesgue ואינטגרל לבג.

נזכיר כי אם $(f,g)=0$ אז הפונקציות f,g נקראות אורתוגונליות זו לזו בקטע $[a,b]$. נשתמש במספר תכונות:

$$(f,g)=\overline{(g,f)} \tag{8.36}$$

$$||f+g||^2=||f||^2+2\mathcal{R}e(f,g)+||g||^2 \tag{8.37}$$

$$|(f,g)|\le ||f||\;||g|| \qquad \text{(אי שוויון שוורץ)} \tag{8.38}$$

$$||f+g||\le ||f||+||g|| \qquad \text{(אי שוויון המשולש)} \tag{8.39}$$

הגדרה 8.22 הנורמה של האופרטור $\mathcal{G}$ מוגדרת כ־

$$||\mathcal{G}||=\sup_{||f||=1}||\mathcal{G}f||=\sup_{||f||=1}(\mathcal{G}f,\mathcal{G}f)^{1/2}.$$

בפרט נובע מלינאריות $\mathcal{G}$ כי

$$||\mathcal{G}f||\le||\mathcal{G}||\;||f||\;. \tag{8.40}$$

למה 8.23 אם האופרטור $\mathcal{G}$ צמוד לעצמו אז הנורמה שלו נתונה גם על ידי

$$||\mathcal{G}||=\sup_{||f||=1}|(\mathcal{G}f,f)|.$$

הוכחה. ראשית נעיר כי $(\mathcal{G}f,f)=(f,\mathcal{G}f)=\overline{(\mathcal{G}f,f)}$ ולפיכך $(\mathcal{G}f,f)$ ממשי. נסמן $\alpha\stackrel{\text{def}}{=}\sup_{||f||=1}|(\mathcal{G}f,f)|$ ונוכיח כי $\alpha=||\mathcal{G}||$.

לפי אי שוויון שוורץ, $|(\mathcal{G}f,f)|\le||\mathcal{G}f||\;||f||$ ולכן עבור $||f||=1$,

$$\alpha=\sup|(\mathcal{G}f,f)|\le\sup||\mathcal{G}f||\;||f||=||\mathcal{G}||.$$

כדי להוכיח את אי השוויון ההפוך $||\mathcal{G}||\le\alpha$, נשתמש ב־

$$\alpha||f+g||^2\ge\big(\mathcal{G}(f+g),(f+g)\big)=\big(\mathcal{G}f,f\big)+2\mathcal{R}e(\mathcal{G}f,g)+\big(\mathcal{G}g,g\big)$$
$$-\alpha||f-g||^2\le\big(\mathcal{G}(f-g),(f-g)\big)=\big(\mathcal{G}f,f\big)-2\mathcal{R}e(\mathcal{G}f,g)+\big(\mathcal{G}g,g\big),$$

ומהחסרתם נקבל כי

$$4\,\mathcal{R}e(\mathcal{G}f,g) \le \alpha\big(||f+g||^2 + ||f-g||^2\big) = 2\alpha\big(||f||^2 + ||g||^2\big).$$

לבסוף נקח $||f|| = 1$ ו־$g = \mathcal{G}f/||\mathcal{G}f||$ (המבטיח $||g|| = 1$) ועבורם יתקבל

$$4\,\mathcal{R}e(\mathcal{G}f,\mathcal{G}f)/||\mathcal{G}f|| \le 2\alpha\big(||f||^2 + ||g||^2\big) = 4\,\alpha.$$

אך $\mathcal{R}e(\mathcal{G}f,\mathcal{G}f) = (\mathcal{G}f,\mathcal{G}f) = ||\mathcal{G}f||^2$ ומתקבל אי השוויון הדרוש $||\mathcal{G}|| \le \alpha$. □

משפט 8.24 אם האופרטור $\mathcal{G}$ צמוד לעצמו אז $||\mathcal{G}||$ או $-||\mathcal{G}||$ הוא ערך עצמי של $\mathcal{G}$. הפונקציה העצמית המתאימה היא פונקציה עבורה מתקבל הסופרמום $\sup_{||f||=1} |(\mathcal{G}f,f)|$.

הוכחה. כאמור לעיל, $(\mathcal{G}f,f)$ ממשי. נניח כי $\sup(\mathcal{G}f,f) = ||\mathcal{G}||$, אז קיימת סדרת פונקציות f_n, $||f_n|| = 1$, כך ש־

$$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{G}f_n, f_n) = ||\mathcal{G}||$$

ונסמן $||\mathcal{G}|| = \mu_0$.

שלב א. נעזר במשפט Ascoli-Arzela (משפט 3.5) כדי להוציא תת־סדרה $\mathcal{G}f_n$ אשר מתכנסת במידה שווה על $[a,b]$.[4] לשם כך נראה כי משפחת הפונקציות $\{\mathcal{G}f\}$, $||f|| \le 1$, חסומה במשותף (uniformly bounded) ורציפה במשותף (equicontinuous). ובאמת, אם $\gamma = \max|G(x,t)|$ אז

$$|\mathcal{G}f(x)| = \Big|\int_a^b G(x,t)f(t)\,dt\Big| \le \gamma\int_a^b 1\cdot|f(t)|\,dt \le \gamma||1||\cdot||f|| \le \gamma(b-a)^{1/2} \quad (8.41)$$

והמשפחה חסומה במשותף.

הגרעין G רציף במידה שווה על $a \le x,t \le b$: $|G(x_1,t) - G(x_2,t)| < \varepsilon$ בתנאי ש־$|x_1 - x_2| < \delta$. לכן

$$\big|\mathcal{G}f(x_1) - \mathcal{G}f(x_2)\big| \le \int_a^b \big|G(x_1,t) - G(x_1,t)\big|f(t)\,dt \le \varepsilon\int_a^b 1\cdot|f(t)|\,dt \le \varepsilon(b-a)^{1/2}$$

המוכיחה רציפות במשותף. בפרט הסדרה שלנו $\mathcal{G}f_n$ חסומה במשותף ורציפה במשותף ולפי משפט Ascoli-Arzela יש לה תת־סדרה המתכנסת במידה שווה על $[a,b]$. גם את סדרת הפונקציות המתכנסת במידה שווה נסמן ב־$\mathcal{G}f_n$ וגבולה $\lim_{n\to\infty} \mathcal{G}f_n(x) = \varphi_0(x)$.

שלב ב. נוכיח כי $\varphi_0(x)$ פונקציה עצמית של $\mathcal{G}$ עם ערך עצמי μ_0.

מכיון ש־$\mathcal{G}f_n(x) \to \varphi_0(x)$ במידה שווה, ברור כי גם

$$||\mathcal{G}f_n(x) - \varphi_0(x)|| \to 0, \qquad n\to\infty.$$

[4] במונחי אנליזה פונקציונלית, אם עבור כל סדרה חסומה f_n אפשר להוציא מהסדרה $\mathcal{G}f_n$ תת סדרה מתכנסת, אז $\mathcal{G}$ נקרא אופרטור קומפקטי.

בפרט $||\mathcal{G}f_n|| \to ||\varphi_0||$. בדומה ל־(8.37) נחשב

$$\begin{aligned} 0 \le ||\mathcal{G}f_n - \mu_0 f_n||^2 &= ||\mathcal{G}f_n||^2 - 2\mu_0(\mathcal{G}f_n, f_n) + \mu_0^2||f_n||^2 \\ &\to ||\varphi_0||^2 - 2\mu_0 \cdot \mu_0 + \mu_0^2 \cdot 1 = ||\varphi_0||^2 - \mu_0^2 \end{aligned}$$

ולכן $0 < \mu_0^2 \le ||\varphi_0||^2$ ו־$\varphi_0 \not\equiv 0$. מצד שני $||\mathcal{G}f_n|| \le ||\mathcal{G}|| \cdot ||f_n|| = \mu_0$ ולכן גם

$$\begin{aligned} 0 \le ||\mathcal{G}f_n - \mu_0 f_n||^2 &= ||\mathcal{G}f_n||^2 - 2\mu_0(\mathcal{G}f_n, f_n) + \mu_0^2||f_n||^2 \\ &\le \mu_0^2 - 2\mu_0(\mathcal{G}f_n, f_n) + \mu_0^2 \cdot 1 \to 0 \end{aligned}$$

ובזה הוכחנו כי $||\mathcal{G}f_n - \mu_0 f_n|| \to 0$.

שלב ג. נפעיל את $\mathcal{G}$ שנית:

$$||\mathcal{G}(\mathcal{G}f_n) - \mu_0\,\mathcal{G}f_n|| \le ||\mathcal{G}|| \cdot ||\mathcal{G}f_n - \mu_0 f_n|| \to 0$$

מכיוון ש־$\mathcal{G}f_n(x) \to \varphi_0(x)$ במידה שווה, נקבל בגבול כי $||\mathcal{G}\varphi_0 - \mu_0\varphi_0|| = 0$. אלה פונקציות רציפות לכן $\mathcal{G}\varphi_0(x) - \mu_0\varphi_0(x) \equiv 0$. בזה הוכחנו קיום של ערך עצמי אחד μ_0 של האופרטור האינטגרלי $\mathcal{G}$ ו־$\varphi_0(x)$ פונקציה העצמית המתאימה לו.

לבסוף ננרמל את הפונקציה עצמית שמצאנו על ידי $\chi_0(x) = \varphi_0(x)/||\varphi_0||$. אז $(\mathcal{G}\chi_0,\, \chi_0) = (\mu_0\chi_0,\, \chi_0) = \mu_0$.

במקרה בו $\inf(\mathcal{G}f, f) = -||\mathcal{G}||$, ההוכחה דומה. □

משפט 8.25 לאופרטור הצמוד לעצמו $\mathcal{G}$ יש אינסוף ערכים עצמיים $|\mu_0| \ge |\mu_1| \ge \dots$ ומתאימות להם פונקציות עצמיות אורתוגונליות.
לבעיית השפה הצמודה לעצמה $Lu = \lambda u,\ Uu = 0$, מתאימים הערכים העצמיים $\lambda_i = 1/\mu_i$.

הוכחה. יהיו $\mu_0, \chi_0(x)$ הערך העצמי והפונקציה העצמית המנורמלת שנמצאו במשפט הקודם. נגדיר

$$\begin{aligned} G_1(x,t) &= G(x,t) - \mu_0\,\chi_0(x)\,\overline{\chi_0(t)}, \\ \mathcal{G}_1 f(x) &= \int_a^b G_1(x,t) f(t)\,dt = \mathcal{G}f(x) - \mu_0\,\chi_0(x) \cdot \int_a^b \overline{\chi_0(t)} f(t)\,dt \\ &= \mathcal{G}f(x) - \mu_0\,\chi_0(x)\,(f, \chi_0)\ . \end{aligned}$$

גם האופרטור $\mathcal{G}_1$ צמוד לעצמו. כי

$$(\mathcal{G}_1 f,\, g) = (\mathcal{G}f,\, g) - \mu_0 \int_a^b \chi_0 \overline{g} \cdot \int_a^b \overline{\chi_0} f = (\mathcal{G}f,\, g) - \mu_0(\chi_0, g) \cdot (f, \chi_0)\ . \quad (8.42)$$

אך גם

$$(f,\, \mathcal{G}_1 g) = (f,\, \mathcal{G}g) - \mu_0 \int_a^b f\overline{\chi_0} \cdot \overline{\left(\int_a^b \overline{\chi_0} g\right)} = (f,\, \mathcal{G}g) - \mu_0(f, \chi_0) \cdot (\chi_0, g)$$

(μ_0 ממשי!) אשר זהה ל־$(\mathcal{G}_1 f,\, g)$.

כמו בלמה 8.23 ובמשפט 8.24 נסיק כי אם $||\mathcal{G}_1|| \neq 0$ ו־$\mu_1 = \sup|(\mathcal{G}_1 f, f)|$, אז μ_1 הוא ערך עצמי של האופרטור $\mathcal{G}_1$ ומתאימה לו פונקציה עצמית $\varphi_1(x)$ המקיימת $\mathcal{G}_1\varphi_1(x) = \mu_1\varphi_1(x)$. ננרמל את $\varphi_1(x)$ על ידי $\chi_1(x) = \varphi_1(x)/||\varphi_1||$.

תכונה מענינת היא כי לכל f

$$\begin{aligned}(\mathcal{G}_1 f,\, \chi_0) = (f,\, \mathcal{G}_1\chi_0) &= (f,\, \mathcal{G}\chi_0) - \mu_0(f,\chi_0)\cdot(\chi_0,\chi_0)\\ &= (f,\, \mu_0\chi_0) - \mu_0(f,\chi_0) = 0\end{aligned}$$

כלומר כל הפונקציות בתת מרחב התמונה $\mathcal{G}_1 f$ אורתוגונליות ל־χ_0. בפרט, מכיון ש־$\mathcal{G}_1\chi_1 = \mu_1\chi_1$, הרי χ_1 אורתוגונלי ל־χ_0 . במיוחד $\mathcal{G}_1\chi_1 = \mathcal{G}\chi_1$ ו־

$$\mathcal{G}\chi_1 = \mathcal{G}_1\chi_1 = \mu_1\chi_1$$

כלומר μ_1, χ_1 הם ערך עצמי ופונקציה עצמית גם של האופרטור המקורי $\mathcal{G}$.

תכונה נוספת היא כי אם f אורתוגונלי ל־χ_0 אז

$$\mathcal{G}_1 f(x) = \mathcal{G}f(x) - \mu_0\,\chi_0(x)\,(f,\chi_0) = \mathcal{G}f(x)$$

כלומר $\mathcal{G}_1$ הוא צמצום של $\mathcal{G}$ לתת המרחב האורתוגונלי ל־χ_0.

לפי (8.42),

$$|\mu_1| = |(\mathcal{G}_1\chi_1,\chi_1)| = |(\mathcal{G}\chi_1,\chi_1)| \leq \sup|(\mathcal{G}f,f)| = |\mu_0|\ .$$

בשלב הבא נגדיר באופן דומה $G_2(x,t) = G_1(x,t) - \mu_1\,\chi_1(x)\,\overline{\chi_1(t)}$ ובאופן רקורסיבי

$$G_n(x,t) = G_{n-1}(x,t) - \mu_{n-1}\,\chi_{n-1}(x)\,\overline{\chi_{n-1}(t)} = G(x,t) - \sum_{k=0}^{n-1}\mu_k\,\chi_k(x)\,\overline{\chi_k(t)}$$

והאופרטור האינטגרלי המתאים

$$\mathcal{G}_n f(x) = \mathcal{G}f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\mu_k\ \big(f,\,\chi_k\big)\,\chi_k(x) \tag{8.43}$$

לכל f רציף. כמו בשלב הקודם נקבל כי ל־$\mathcal{G}_n$ יש ערך עצמי μ_n ופונקציה עצמית מנורמלת χ_n.

נניח בדרך האינדוקציה כי הפונקציות העצמיות $\chi_1,\ldots,\chi_{n-1}$ אורתונורמליות, דהיינו אורתוגונליות זו לזו ובעלות נורמת יחידה בקטע $[a,b]$. נכתוב זאת כ־

$$(\chi_j,\ \chi_k) = \delta_{jk}, \qquad 0 \leq j,k \leq n-1.$$

אז

$$(\mathcal{G}_n f,\, \chi_j) = (f,\, \mathcal{G}_n\chi_j) = (f,\, \mathcal{G}\chi_j) - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k (f,\chi_j)\cdot(\chi_j,\chi_k)$$
$$= (f,\, \mu_j\chi_j) - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k (f,\chi_j)\,\delta_{jk} = 0$$

בפרט עבור $f = \chi_n$,

$$(\mu_n\chi_n,\, \chi_j) = (\mathcal{G}_n\chi_n,\, \chi_j) = 0$$

וגם χ_n אורתוגונלי לכל קודמיו. במיוחד

$$\mathcal{G}_n\chi_n(x) = \mathcal{G}\chi_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \,\big(\chi_n,\, \chi_k\big)\,\chi_k(x) = \mathcal{G}\chi_n(x)$$

ו־$\mathcal{G}\chi_n = \mathcal{G}_n\chi_n = \mu_n\chi_n$. כלומר μ_n, χ_n הם ערך עצמי ופונקציה עצמית גם של האופרטור המקורי $\mathcal{G}$. הערכים העצמיים מקימים

$$|\mu_0| \geq |\mu_1| \geq \ldots \geq |\mu_n|$$

והפונקציות העצמיות המתקבלות אף אורתוגונליות זו לזו. השוויון $\mathcal{G}\chi_k = \mu_k\chi_k$ שקול במונחי הבעיה הדיפרנציאלית ל־$L\chi_k(x) = \lambda_k\chi_k(x)$, $\lambda_k = 1/\mu_k$.

ניתן להמשיך בתהליך זה כל עוד $||\mathcal{G}_n|| \neq 0$. אם $||\mathcal{G}_n|| = 0$ אז

$$\mathcal{G}f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \,\big(f,\, \chi_k\big)\,\chi_k(x)$$

לכל f רציף. נפעיל על שוויון זה את האופרטור הדיפרנציאלי L ונקבל כי

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \,\big(f,\, \chi_k\big)\,\chi_k(x)$$

לכל f רציף. זה כמובן בלתי אפשרי כי $C[a,b]$ אינו מרחב לינארי בעל ממד סופי. לכן התהליך נמשך ומתקבלת סדרה אינסופית של ערכים עצמיים של האופרטור האינטגרלי $\mathcal{G}$. מכאן מתקבלים גם הערכים העצמיים $\lambda_i = 1/\mu_i$ של בעיית השפה (L,U). □

בסדרת הערכים העצמיים $|\lambda_0| \leq |\lambda_1| \leq \ldots$ ייתכן שוויון, כלומר שפונקציות עצמיות בלתי תלויות מתאימות לאותו ערך עצמי. למשל עבור בעיית השפה המחזורית $-u'' = \lambda u$, $u(0) - u(2\pi) = 0,\ u'(0) - u'(2\pi) = 0$, לערך העצמי $\lambda = n^2$, $n \neq 0$ מתאימות שתי פונקציות עצמיות, $\cos nx$ ו־$\sin nx$. ראה דוגמא 8.18, ב'.

דוגמא 8.19 נסתכל בגרעין Pincherle-Goursat, $K(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x)\beta_k(t)$ ובבעיית הערכים העצמיים המתאימה

$$\int_a^b \Big(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x)\beta_k(t)\Big)u(t)\,dt = \mu u(x)\ .$$

האופרטור האינטגרלי המתאים $\mathcal{K}f(x) := \int_a^b K(x,t)f(t)\,dt$ הוא בעל טווח בעל ממד N. נכפול ב־$\beta_j(x)$, $j = 1, \ldots, N$ ונסכם עבור $a \le x \le b$:

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\int_a^b \alpha_k(x)\beta_j(x)\,dx \cdot \int_a^b \beta_k(t)u(t)\,dt \right) = \mu \int_a^b \beta_j(x)u(x)\,dx.$$

בעזרת הסימונים $z_j = \int_a^b \beta_j(t)u(t)\,dt$, $a_{kj} = \int_a^b \alpha_k(x)\beta_j(x)\,dx$ הבעיה הופכת

$$\sum_{k=1}^{N} a_{kj} z_k = \mu z_j, \qquad j = 1, \ldots, N$$

שהיא בעיית ערכים עצמיים של מטריצה $N \times N$, $\big(a_{kj}\big)$. □

לעיתים קרובות אנו מעונינים דווקא בבעיית ערכים עצמיים מהצורה

$$Lu = \lambda p(x)u, \qquad Uu = 0$$

כאשר $p(x)$ ממשי ואינו מחליף סימן, נאמר למשל כי הוא חיובי. בעיית שפה זו שקולה למשוואה האינטגרלית

$$u(x) = \lambda \int_a^b G(x,t)p(t)u(t)\,dt$$

ובעזרת ההצבה $z(x) = \sqrt{p(x)}u(x)$ המשוואה הופכת

$$z(x) = \lambda \int_a^b G(x,t)\sqrt{p(x)p(t)}\,z(t)\,dt.$$

נסמן $K(x,t) = G(x,t)\sqrt{p(x)p(t)}$ ונקבל שוב אופרטור צמוד לעצמו ולו סדרה אינסופית של ערכים עצמיים. תכונת האורתונורמליות של הפונקציות העצמיות היא

$$(z_i, z_j) = \int_a^b p\,\chi_i\,\overline{\chi}_j = \delta_{ij}.$$

ונקראת אורתונורמליות לפי משקל p.

8.6 פיתוח לטורי פונקציות אורתוגונליות

מטרת פרק זה היא להראות כי פונקציות ניתנות לייצוג בעזרת טורים אינסופיים של פונקציות עצמיות אורתוגונליות. שאלות מרכזיות בדיון הן באיזה משמעות טורים אלה מתכנסים ומהם התנאים לכך. נטפל כאן בהתכנסות במידה שווה ובהתכנסות בנורמה L^2. בדיון שלנו עסקנו בעיקר בפונקציות ב־$C[a,b]$ או $C^n[a,b]$ אולם רוב תוצאות סעיף זה חלות על פונקציות מדידות לפי לבג ואינטגרל לבג.

משפט 8.26 (אי שוויון Bessel) אם $\chi_0, \chi_1 \ldots$ סדרת פונקציות אורתונורמליות בקטע $[a,b]$ ו־$f(x)$ פונקציה המקיימת $||f|| = \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$ אז

$$\sum_{k=0}^{\infty} |(f,\,\chi_k)|^2 \le ||f||^2 \ .$$

הוכחה. בעזרת השוויון (8.37) לכל m שלם,

$$\begin{aligned} 0 \le ||f - \sum_{k=0}^{m}(f,\,\chi_k)\,\chi_k||^2 &= ||f||^2 - 2\mathcal{R}e\left(f, \sum_{k=0}^{m}(f,\,\chi_k)\,\chi_k\right) + \sum_{k=0}^{m}|(f,\,\chi_k)|^2||\chi_k||^2 \\ &= ||f||^2 - 2\sum_{k=0}^{m}(f,\,\chi_k)\,\overline{(f,\,\chi_k)} + \sum_{k=0}^{m}\ |(f,\,\chi_k)|^2 \\ &= ||f||^2 - \sum_{k=0}^{m}\ |(f,\,\chi_k)|^2 \ . \end{aligned}$$

מכאן נובעת התכנסות הטור ואי שוויון Bessel. □

הגדרה 8.27 המספרים $(f,\,\chi_k)$ נקראים מקדמי פורייה *(Fourier)*[5] של הפונקציה f ביחס לסדרת הפונקציות האורתונורמליות $\{\chi_k\}$.

נפעיל למשל את אי שוויון בסל שלעיל עבור הפונקציה $f(x) = \overline{G}(x,t)$, t קבוע. מכיוון ש־$\int_a^b \overline{G}(x,t)\overline{\chi}_k(t)\,dt = \mu\overline{\chi}_k(t)$ (μ ממשי), מקדמי פורייה של פונקציה זו הם

$$(f,\,\chi_k) = (\overline{G},\,\chi_k) = \int_a^b \overline{G}(x,t)\overline{\chi}_k(t)\,dt = \mu_k\,\overline{\chi}_k(t) \ .$$

על פי אי שוויון בסל לפונקציה f זו,

$$\sum_{k=0}^{m}\mu_k^2\,|\overline{\chi}_k(t)|^2 = \sum_{k=0}^{m}|(f,\,\chi_k)|^2 \le ||f||^2 = \int_a^b |\overline{G}(x,t)|^2\,dt$$

על ידי אינטגרציה נוספת על $a \le x \le b$,

$$\sum_{k=0}^{m}\mu_k^2 \le \int_a^b\int_a^b |\overline{G}(x,t)|^2\,dtdx \le \gamma^2(b-a)^2,$$

כאשר $\gamma = \sup|G(x,t)|$. בפרט נובע:

מסקנה 8.28 בהנחות שלמעלה סדרת הערכים העצמיים μ_k של $\mathcal{G}$ מקיימת $\lim_{k\to\infty}\mu_k = 0$.

[5] Joseph Fourier, 1768-1830

משפט 8.29 תהי $\{\chi_k(x)\}$ סדרת הפונקציות העצמיות של בעיית שפה צמודה לעצמה. אם $f \in C^n[a,b]$ ומקיים את תנאי השפה $Uf = 0$ אז

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (f,\, \chi_k)\, \chi_k(x)$$

והטור מתכנס במידה שווה בקטע $[a,b]$.

הוכחה. ראשית נוכיח כי $||f - \sum_{k=0}^{m}(f,\, \chi_k)\, \chi_k|| \to 0$ כש־$m \to \infty$ כלומר הטור הנדון מתכנס בנורמה L^2.

מכיון ש־$f \in C^n[a,b]$ נגדיר פונקציה $v(x)$ על ידי $v = Lf$. אז f הוא פתרון בעיית השפה $Uf = 0,\ Lf = v$ ולכן f נתון על ידי $f = \mathcal{G}v$. מקדמי פורייה של f הם

$$(f,\, \chi_k) = (\mathcal{G}v,\, \chi_k) = (v,\, \mathcal{G}\chi_k) = (v,\, \mu_k\chi_k) = \mu_k(v,\, \chi_k).$$

והנורמה המבוקשת היא בעזרת (8.43),

$$\begin{aligned} ||f - \sum_{k=0}^{m}(f,\, \chi_k)\, \chi_k|| &= ||\mathcal{G}v - \sum_{k=0}^{m} \mu_k(v,\, \chi_k)\chi_k|| \\ &\equiv ||\mathcal{G}_m v|| \le ||\mathcal{G}_m|| \cdot ||v|| = \mu_m||v|| \to 0\ . \end{aligned} \tag{8.44}$$

כדי להוכיח התכנסות במידה שווה של הטור יש להעריך את הסכומים החלקיים

$$\Big|\sum_{k=p}^{q}(f,\, \chi_k)\, \chi_k(x)\Big|.$$

מכיון ש־$f = \mathcal{G}v$ ומכיון שלפי (8.41) $|\mathcal{G}f(x)| \le \gamma(b-a)^{1/2}||f||$, נעריך את הסכום כ־

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{k=p}^{q}(f,\, \chi_k)\, \chi_k(x)\Big| &= \Big|\,\mathcal{G}\Big(\sum_{k=p}^{q}(v,\, \chi_k)\, \chi_k(x)\Big)\Big| \\ \le \gamma(b-a)^{1/2}\,\Big|\Big|\sum_{k=p}^{q}(v,\, \chi_k)\, \chi_k(x)\Big|\Big| &= \gamma(b-a)^{1/2}\Big(\sum_{k=p}^{q}|(v,\, \chi_k)|^2\Big)^{1/2} \end{aligned}$$

הודות לאי שוויון בסל, הסכום החלקי קטן כרצוננו עבור p, q די גדולים. בזה הוכחנו כי הטור $\sum_{k=0}^{\infty}(f,\, \chi_k)\, \chi_k(x)$ מתכנס במידה שווה וסכומו רציף. מכיוון שגם $f(x)$ רציף נובע מהנורמה (8.44) כי הטור שלנו מתכנס דווקא ל־$f(x)$. □

מסקנה 8.30 (שוויון Parseval) עבור פונקציה f כמו במשפט הקודם מתקיים השוויון

$$\sum_{k=0}^{\infty}|(f,\, \chi_k)|^2 = ||f||^2\ .$$

להוכחה נכפול את הטור המתכנס $f = \sum_{k=0}^{\infty}(f,\,\chi_k)\,\chi_k$ בצמוד המרוכב ונבצע אינטגרציה:

$$||f||^2 = \int_a^b |f|^2 = \sum_j \sum_k (f,\,\chi_j)\overline{(f,\,\chi_k)} \int_a^b \chi_j \overline{\chi_k} = \sum_k |(f,\,\chi_k)|^2 \qquad (8.45)$$

עכשיו נרחיב את משפט הפיתוח.

משפט 8.31 תהי $\{\chi_k(x)\}$ סדרת הפונקציות העצמיות של בעיית שפה צמודה לעצמה. אם $f \in L^2(a,b)$ (דהיינו f מדיד לפי לבג ו־$\int_a^b |f|^2 < \infty$), אז הטור $\sum_{k=0}^{\infty}(f,\,\chi_k)\,\chi_k(x)$ מתכנס ל־$f(x)$ ב־L^2, כלומר

$$\lim_{m\to\infty} \Big|\Big| f(x) - \sum_{k=0}^{m}(f,\,\chi_k)\,\chi_k(x)\Big|\Big| = 0.$$

יתר על כן, שוויון Parseval מתקיים.

הוכחה. כידוע אוסף פונקציות המדרגה צפוף ב־$L^2(a,b)$, כלומר לכל $f \in L^2(a,b)$ ולכל $\varepsilon > 0$ יש פונקציית מדרגה $s(x)$ כך ש־$||f - s|| < \varepsilon$. נחליק את $s(x)$ בסביבות די קטנות של נקודות הקפיצה שלו ונקבל פונקציה $\tilde{f} \in C^n$ המקיים גם $f^{(i)}(a) = f^{(i)}(b) = 0$, $i = 0, \ldots, n$, כך ש־$||s - \tilde{f}|| < \varepsilon$. $\tilde{f}$ מקיים כמובן את תנאי השפה ההומוגניים $U\tilde{f} = 0$.

נעריך את הנורמה המבוקשת על ידי

$$\begin{aligned} \Big|\Big| f - \sum_{k=0}^{m}(f,\,\chi_k)\,\chi_k\Big|\Big| \;&\le \\ \le ||f - s|| + ||s - \tilde{f}|| + \Big|\Big| \tilde{f} - \sum_{k=0}^{m}(\tilde{f},\,\chi_k)\,\chi_k\Big|\Big| &+ \Big|\Big| \sum_{k=0}^{m}(\tilde{f} - f,\,\chi_k)\,\chi_k\Big|\Big| \end{aligned}$$

כל אחד משני המחוברים הראשונים קטן מ־ε לפי בחירתנו. המחובר השלישי קטן מ־ε כאשר m די גדול לפי משפט 8.29 עבור הפונקציה $\tilde{f}$. לבסוף, למחובר הרביעי והאחרון, בדומה ל־(8.45) ולפי אי שוויון בסל,

$$\Big|\Big| \sum_{k=0}^{m}(\tilde{f} - f,\,\chi_k)\,\chi_k\Big|\Big|^2 = \sum_{k=0}^{m} |(\tilde{f} - f,\,\chi_k)|^2 \le ||\tilde{f} - f||^2 \le \varepsilon^2.$$

סך הכל קיבלנו כי

$$\Big|\Big| f(x) - \sum_{k=0}^{m}(f,\,\chi_k)\,\chi_k(x)\Big|\Big| \le 4\varepsilon,$$

ל־m די גדול, כפי שנטען.

כפי שראינו בהוכחת אי שוויון בסל, $||f - \sum_{k=0}^{m}(f,\,\chi_k)\,\chi_k||^2 = ||f||^2 - \sum_{k=0}^{m} |(f,\,\chi_k)|^2$.

שוויון Parseval מתקבל מכיוון שאגף שמאל שואף ל־0 כש־$m \to \infty$. □

אם $(f,\,\chi_k)=0$ לכל $k=0,1,\ldots$, אז לפי שוויון Parseval מתקבל כי $||f||=0$, שמשמעותו כי $f=0$ כמעט בכל מקום (כשמדובר בפונקציה מדידה לפי לבג) או $f\equiv 0$ (כשמדובר בפונקציה רציפה). בכל מקרה פרושו של דבר כי אי אפשר להוסיף לסדרה $\{\chi_k(x)\}$ אף פונקציה אורתוגונלית נוספת. לכן מגדירים:

הגדרה 8.32 סדרת פונקציות אורתוגונליות $\{\chi_k(x)\}$ נקראת שלמה *(complete)* אם $(f,\,\chi_k)=0$ לכל $k=0,1,\ldots$ גורר $f=0$ כמעט בכל מקום.

מסקנה 8.33 סדרת הפונקציות העצמית $\{\chi_k(x)\}$ של בעיה צמודה לעצמה היא סדרה שלמה.

בפרט נובע כי בתהליך שתואר במהלך פרק זה נמצאו כל הערכים העצמיים וכל הפונקציות העצמיות של בעיית השפה הצמודה לעצמה. כי לו היתה פונקציה עצמית נוספת, אז בעזרת תהליך גרם־שמידט היינו יוצרים גם פונקציה עצמית אורתוגונלית לכל ה־$\chi_k(x)$־ים הידועים.

8.7 פונקציית גרין של $Lu-\lambda u$

על פי הגדרת פונקציית גרין ומשפט 8.16, לאופרטור $L_\lambda u=Lu-\lambda u$ ותנאי השפה $Uu=0$ קיימת פונקציית גרין אם ורק אם לבעיית השפה $Lu-\lambda u=0$, $Uu=0$ אין פתרון למעט הפתרון הטריוויאלי, כלומר λ אינו ערך עצמי. נבדוק את תלות פונקציית גרין $G(x,t,\lambda)$ בפרמטר λ.

יהיו $u_1(x,\lambda),\ldots,u_n(x,\lambda)$ בסיס למרחב הפתרונות של המשוואה $Lu-\lambda u=0$ המוגדרים על ידי תנאי ההתחלה $u_i^{(j-1)}(a)=\delta_{ij}$, $i,j=1,\ldots,n$. מכיוון שהמשוואה הדיפרנציאלית תלויה באופן אנליטי ב־λ, גם הפתרונות $u_i(x,\lambda)$ הן פונקציות אנליטיות של λ לכל x קבוע. λ הוא ערך עצמי של הבעיה $Lu=\lambda u$, $Uu=0$ אם קיים פתרון לא טריוויאלי $\sum_{i=1}^n c_i u_i(x,\lambda)$ אשר מקיים את n תנאי השפה:

$$U_k u=\sum_{i=1}^{n} c_i\,U_k u_i(\,\cdot\,,\lambda)=\,0,\qquad k=1,\ldots,n.$$

התנאי לכך הוא

$$\Delta(\lambda)=\det\Big(U_k u_i(\,\cdot\,,\lambda)\Big)=\,0.$$

בפרט הערכים העצמיים $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ הם אפסי הפונקציה האנליטית השלמה $\Delta(\lambda)$. פונקציית גרין של $Lu-\lambda u=f$, $Uu=0$, קיימת בתנאי ש־λ אינו ערך עצמי, דהיינו $\Delta(\lambda)\neq 0$. בהנחה זו פונקציית גרין זו נתונה על ידי

$$G(x,t,\lambda)=\begin{vmatrix} \tilde K(x,t,\lambda) & u_1(x,\lambda) & \cdots & u_n(x,\lambda)\\ U_1\tilde K(x,t,\lambda) & U_1u_1(\cdot,\lambda) & \cdots & U_1u_n(\cdot,\lambda)\\ \vdots & & & \\ U_n\tilde K(x,t,\lambda) & U_nu_1(\cdot,\lambda) & \cdots & U_nu_n(\cdot,\lambda)\end{vmatrix}\Big/\,\big|U_ku_i(\cdot,\lambda)\big|$$

(ראה תרגיל 8.10). זו מנה של פונקציות אנליטיות של λ והמכנה שלה הוא הדטרמיננט $\Delta(\lambda)$.

התוצאה הבאה מתארת את התנהגות $G(x,t,\lambda)$ עבור λ בסביבה נקובה של ערך עצמי λ_p.

משפט 8.34 אם (L,U) בעיית שפה צמודה לעצמה אז פונקציית גרין של $Lu-\lambda u$, $Uu=0$ בסביבה נקובה של ערך עצמי λ_p הוא

$$G(x,t,\lambda) = \frac{\sum \chi_p(x)\,\overline{\chi_p(t)}}{\lambda_p - \lambda} \quad + \quad \text{פונקציה אנליטית של } \lambda$$

כשהסיכום הוא על כל הפונקציות העצמיות האורתוגונורמליות המתאימות ל־λ_p.

הוכחה. כאמור $G(x,t,\lambda)$ היא פונקציה מרומורפית (מנה של שתי פונקציות אנליטיות) והערכים העצמיים הם אפסים מבודדים של המכנה. בנקודה λ_p יש למכנה אפס מכפילות מסוימת, נאמר m. אז לכל f רציף פתרון הבעיה

$$Lu - \lambda u = f, \qquad Uu = 0$$

הוא

$$u(x,\lambda) = \int_a^b G(x,t,\lambda) f(t)\,dt = \frac{u_m(x)}{(\lambda-\lambda_p)^m} + \frac{u_{m-1}(x)}{(\lambda-\lambda_p)^{m-1}} + \cdots$$

כדי לפתח סביב λ_p, נרשום את המשוואה הדיפרנציאלית כ־

$$Lu - \lambda_p u = (\lambda - \lambda_p)u + f$$

ונציב לתוכו את טור לורן סביב λ_p:

$$\frac{Lu_m - \lambda u_m}{(\lambda-\lambda_p)^m} + \frac{Lu_{m-1} - \lambda u_{m-1}}{(\lambda-\lambda_p)^{m-1}} + \cdots = \frac{u_m}{(\lambda-\lambda_p)^{m-1}} + \frac{u_{m-1}}{(\lambda-\lambda_p)^{m-2}} + \cdots + f$$

מהשוואת חזקות של $(\lambda-\lambda_p)$,

$$\begin{aligned} Lu_m - \lambda u_m &= 0, & Uu_m &= 0,\\ Lu_{m-1} - \lambda u_{m-1} &= g_m, & Uu_{m-1} &= 0,\\ &\cdots\\ Lu_0 - \lambda u_0 &= f, & Uu_0 &= 0. \end{aligned}$$

אם $m>1$, אז מכיוון ש־L צמוד לעצמו ו־λ ממשי,

$$(u_m,\, u_m) = (u_m,\, (L-\lambda)u_{m-1}) = (\,(L-\lambda)u_m,\, u_{m-1}) = (0,\, u_{m-1}) = 0,$$

ולפיכך $u_m(x)\equiv 0$ לכל $m>1$, כלומר לפונקציית גרין $G(x,t,\lambda)$ יש קוטב פשוט ב־$\lambda=\lambda_p$: $G(x,t,\lambda)=\dfrac{g(x,t)}{\lambda-\lambda_p}+\cdots$. נחשב את $g(x,t)$, הרזידום בנקודת הקוטב. במשוואה (8.31) (תרגיל 8.10), ראינו את הייצוג

$$G(x,t,\lambda)=\tilde K(x,t,\lambda)+\begin{vmatrix} 0 & u_1(x) & \cdots & u_n(x)\\ U_1\tilde K(x,t,\lambda) & U_1u_1 & \cdots & U_1u_n\\ \vdots & & & \\ U_n\tilde K(x,t,\lambda) & U_nu_1 & \cdots & U_nu_n\end{vmatrix}\Big/\,\big|U_ku_i(.\,,\lambda)\big|$$

המחובר $\tilde K(x,t,\lambda)$ הוא פונקציה אנליטית שלמה עבור כל x קבוע. למעשה הוא זהותית 0 לכל $x<t$ ופתרון של בעיית התחלה למשוואה $Lu-\lambda u=0$ עבור $x>t$. לכן ל־G ול־$G-\tilde K$ יש אותו רזידום והוא נתון על ידי

$$g(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\oint\big[G(x,t,\lambda)-\tilde K(x,t,\lambda)\big]\,d\lambda,$$

כשהאינטגרציה נעשית על מעגל קטן סביב λ_p. מכיון ש־$G-\tilde K$ היא קומבינציה לינארית של $u_1(x,\lambda),\dots,u_n(x,\lambda)$ לכל λ קבוע, אנו מסיקים כי $g(x,t)$ היא פונקציה ב־C^n כפונקציה של x. עתה נזהה אותו.

כזכור, G מקיים לכל $x\neq t$ את המשוואה $LG-\lambda G=0$ ואת תנאי השפה $UG=0$. כמו למעלה, נכתוב את המשוואה כ־

$$LG-\lambda_pG=(\lambda-\lambda_p)G$$

ונציב לתוכו $G(x,t,\lambda)=\dfrac{g(x,t)}{\lambda-\lambda_p}+\cdots$. מהשוואת מקדם החזקה $(\lambda-\lambda_p)^{-1}$ נקבל כי $(L-\lambda_p)g(x,t)=0$ וכמו כן, $Ug=0$. אך $g(x,t)\in C^n$ כפונקציה של x ולכן היא פונקציה עצמית המתאימה לערך העצמי λ_p:

$$g(x,t)=\sum c_j(t)\,\chi_j(x).$$

מצד שני $g(x,t)=\lim\limits_{\lambda\to\lambda_p}(\lambda-\lambda_p)G(x,t,\lambda)$ לכן גם $g(x,t)$ חייב להיות סימטרי, $g(x,t)=\overline{g(t,x)}$, וצורתו

$$g(x,t)=\sum c_j\,\overline{\chi_j(t)}\,\chi_j(x)$$

כש־c_j קבועים ממשיים שעלינו לקבוע.

מ־$L\chi_i=\lambda_p\chi_i$ מקבלים לכל λ כי $(L-\lambda)\chi_i=(\lambda_p-\lambda)\chi_i$. מהגדרת פונקציית גרין $G(x,t,\lambda)$ עבור אגף ימין $f=(\lambda_p-\lambda)\chi_j$ נובע

$$\chi_i(x)=\int_a^b G(x,t,\lambda)\,\big[(\lambda_p-\lambda)\chi_i(t)\big]\,dt$$

כאשר $\lambda \to \lambda_p$, $G(x,t,\lambda)(\lambda_p - \lambda) \to -g(x,t)$ ולכן

$$\chi_i(x) = \int_a^b -g(x,t)\,\chi_i(t)\,dt.$$

כשנציב $g(x,t) = \sum c_j\,\overline{\chi_j(t)}\,\chi_j(x)$ נקבל מאורתונורמליות של הפונקציות העצמיות כי $c_j = -1$. □

8.8 אפיון ערכים עצמיים על ידי מנת Rayleigh

בסעיף זה נדון באפיון הערכים העצמיים של בעיות מהצורה

$$\begin{aligned} Lu &= \lambda p(x) u, \\ Uu &= 0. \end{aligned} \tag{8.46}$$

לכל אורך הדיון ננית כי הבעיה (L,U) צמודה לעצמה והפונקציה $p(x)$ ממשית וחיובית.

באופן אנלוגי למשפט 8.20 מתקיים הפעם:

משפט 8.35 תהי הבעיה (L,U) צמודה לעצמה והפונקציה $p(x)$ ממשית חיובית. אז הערכים העצמיים של הבעיה (8.46) ממשיים, פונקציות עצמיות u_1, u_2 השייכות לערכים עצמיים שונים מקיימות $\int_a^b p\,u_1\overline{u}_2 = 0$.

הוכחה. לערך עצמי λ ופונקציה עצמית מתאימה u,

$$0 = (Lu,\,u) - (u,\,Lu) = \int_a^b \left(\lambda p u \cdot \overline{u} - u \cdot \overline{\lambda p u}\right) dx = (\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b p|u|^2\,dx\ .$$

לפיכך $\lambda = \overline{\lambda}$.

לשני ערכים עצמיים שונים $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (וכאמור לעיל ממשיים) ופונקציות עצמיות המתאימות להם $u_1(x), u_2(x)$ קיים

$$0 = (Lu_1,\,u_2) - (u_1,\,Lu_2) = \int_a^b \lambda_1 p u_1 \cdot \overline{u}_2 - u_1 \cdot \lambda_2 p \overline{u}_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b p u_1 \overline{u}_2.$$

מ־$\lambda_1 \neq \lambda_2$ נובע ש־$\int_a^b p u_1 \overline{u_2}\,dx = 0$. יחס זה נקרא אורתוגוניות לפי משקל p. □

מכיון ש־p, λ ממשיים, ניצור מכפלה פנימית של פונקציה עצמית u במשוואה (8.46) ונקבל כי

$$\lambda = \frac{(Lu,u)}{(pu,u)}.$$

לאור שוויון זה נגדיר:

הגדרה 8.36 המנה $R[u] := \dfrac{(Lu,u)}{(pu,u)}$ נקראת מנת ריילי (Rayleigh quotient).[6]

[6] Lord Rayleigh, 1842-1919, פיזיקאי

פונקציה $u \in C^n$ המקיימת את תנאי השפה $Uu = 0$ תקרא פונקציית בוחן *(test function)*. הבעיה (L, U) נקראת מוגדרת חיובית אם $(Lu, u) > 0$ לכל פונקציית בוחן.

עבור הביטוי (Lu, u) ראה את נוסחת Dirichlet בתרגיל 8.5.

מנת ריילי מאפשרת אפיון והערכה של ערכים עצמיים של בעיית שפה צמודה לעצמה.

משפט 8.37 תהי הבעיה (L, U) צמודה לעצמה ומוגדרת חיובית, $p(x) > 0$, ולה ערכים עצמיים $0 < \lambda_0 \le \lambda_1 \le \dots$ ופונקציות עצמיות $\chi_0, \chi_1, \dots$.

א. הערך העצמי הראשון של הבעיה (8.46) מאופין על ידי

$$\lambda_0 = \min_u R[u],$$

כשהמינימום נלקח על פני כל פונקציות ההשוואה $u \in C^n[a, b]$, $Uu = 0$. הערך המינימלי מתקבל עבור פונקציה עצמית המתאימה לערך העצמי λ_0.

ב. הערך העצמי λ_r של הבעיה (8.46) מאופין על ידי

$$\lambda_r = \min_u R[u], \qquad (u, p\chi_0) = \dots = (u, p\chi_{r-1}) = 0$$

כשהמינימום נלקח על פני כל פונקציות הבוחן אשר אורתוגונליות לפי משקל p לפונקציות העצמיות הקודמות.

הוכחה. תהי $u(x)$ פונקציית בוחן כלשהי המקיימת $u \in C^n$ ואת תנאי השפה $Uu = 0$. באופן אנלוגי למשפט 8.29 גם כאן

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, \chi_k(x),$$

והטור מתכנס במידה שווה, כשהפעם מקדמי פורייה הם $c_k = (u, p\chi_k)$, מכפלות פנימיות עם משקל p.

$$\begin{aligned}(Lu, u) =& (Lu, \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, \chi_k) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, (Lu, \chi_k) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, (u, L\chi_k) \\ =& \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, (u, \lambda_k p\chi_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k c_k^2\end{aligned}$$

באופן דומה, $(pu, u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$. מכיוון ש־$\dots \le \lambda_1 \le \lambda_0$, נובע כי לכל פונקציית בוחן

$$R[u] = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \, c_k^2}{\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2} \ge \lambda_0$$

ועבור $u = c\chi_0$ מתקבל שוויון. כל פונקציית בוחן u מספקת חסם עליון ל־λ_0.

עבור פונקציות ההשוואה אשר אורתוגונליות לפי משקל p ל־r הפונקציות העצמיות הראשונות, $(pu, \chi_0) = \ldots = (pu, \chi_{r-1}) = 0$, מתקבל כי

$$R[u] = (Lu, u)/(pu, u) = \sum_{k=r}^{\infty} \lambda_k \, c_k^2 / \sum_{k=r}^{\infty} c_k^2 \geq \lambda_r .$$

אפיון זה יעיל פחות, כי כדי להשתמש בו יש לדעת מראש את הפונקציות העצמיות הראשונות.

אפיון ריילי ניתן להרחבה לאופרטורים צמודים לעצמם כלליים יותר. □

דוגמא 8.20 עבור בעיית השפה $-(ru')' = \lambda p u$, $p, r > 0$, $u(a) = u(b) = 0$, הערך העצמי הראשון נתון על ידי

$$\lambda_0 = \min_u \frac{\int_a^b r(u')^2}{\int_a^b p u^2} \ .$$

עבור הבעיה הפשוטה $-u'' = \lambda u$, $u(0) = u(1) = 0$, פונקציית ההשוואה $u(x) = x - x^2$ נותנת את החסם

$$\lambda_0 \leq \frac{\int_0^1 (u')^2}{\int_0^1 u^2} = \frac{\int_0^1 (1-2x)^2 \, dx}{\int_0^1 (x - x^2)^2 \, dx} = 10 \ ,$$

בשעה שידוע כי $\lambda = \pi^2$.

נביא הוכחה נוספת למשפט 8.37 אשר אמנם ארוכה יותר אך אינה מצריכה הכרת טורים אורתוגונליים.

הוכחה שניה. עבור פונקציית בוחן מסוימת u ומנת ריילי המתאימה $R = R[u]$ נגדיר פונקציית עזר $\eta(x) := Lu - Rp(x)u$, שתקרא פונקציית השארית (residual). ברור כי פונקציה זו אורתוגונלית ל־u. ללא הגבלת כלליות ניתן להניח כי $\eta \not\equiv 0$, כי אחרת u היתה פונקציה עצמית ו־R ערך עצמי, וכמובן $\lambda_0 \leq R$. עבור הפונקציה η נסתכל בבעיית השפה

$$Lv - \lambda p(x) v = \eta(x), \qquad Uv = 0, \tag{8.47}$$

כאשר λ פרמטר. לאופרטור $Lv - \lambda pv$ שבאגף שמאל ולכל λ שאינו ערך עצמי מתאימה פונקציית גרין $G(x, t, \lambda)$ ובעזרתה מקבלים

$$v(x, \lambda) = \int_a^b G(x, t, \lambda) \, \eta(t) \, dt.$$

מכאן מסיקים כי $v(x, \lambda)$ רציפה ב־λ פרט לערכים העצמיים. עבורם נגדיר פונקציית עזר ממשית

$$h(\lambda) := \big(\eta(x), v(x, \lambda)\big)$$

ונוכיח כי $h(\lambda)$ מונוטונית עולה בכל נקודה שאינה ערך עצמי. לכל λ^* מותאמת על ידי (8.47) פונקציה $v(x, \lambda^*)$ ובהתאם

$$h(\lambda) - h(\lambda^*) = \big(\eta(x), v(x, \lambda)\big) - \big(\eta(x), v(x, \lambda^*)\big).$$

לפי ההגדרה (8.47) ניתן לכתוב את $\eta(x)$ כ־$\eta(x) = Lv(x,\lambda) - \lambda p(x)v(x,\lambda)$ אבל גם בצורה $\eta(x) = Lv(x,\lambda^*) - \lambda^* p(x)v(x,\lambda^*)$. לכן

$$\begin{aligned} &h(\lambda) - h(\lambda^*) \\ &= \big(Lv(x,\lambda^*) - \lambda^* pv(x,\lambda^*), v(x,\lambda)\big) - \big(Lv(x,\lambda) - \lambda pv(x,\lambda), v(x,\lambda^*)\big) \\ &= \big(Lv(x,\lambda^*), v(x,\lambda)\big) - \big(Lv(x,\lambda), v(x,\lambda^*)\big) + (\lambda - \lambda^*)\big(pv(x,\lambda), v(x,\lambda^*)\big) \end{aligned}$$

סכום שני המחוברים הראשונים הוא 0 כי L צמוד לעצמו ונותר

$$h(\lambda) - h(\lambda^*) = (\lambda - \lambda^*)\big(pv(x,\lambda), v(x,\lambda^*)\big).$$

$$\lim_{\lambda^* \to \lambda} \frac{h(\lambda) - h(\lambda^*)}{\lambda - \lambda^*}) = \big(pv(x,\lambda), v(x,\lambda)\big) > 0.$$

אם בקטע $0 \le \lambda \le R$ אין אף ערך עצמי אז $h(\lambda)$ מונוטונית עולה בקטע זה. מצד שני בנקודה $\lambda = 0$, $h(0) = (Lv, v) > 0$ על פי הנחתנו. ואילו ב־$\lambda = R$, $v(x,R) \equiv u(x)$ ולפי הגדרת R,

$$h(R) = (Lu, u) - R\,(pu, u) = 0$$

זה סותר את מונוטוניות h ומוכיח כי קיים ערך עצמי קטן מ־R: $0 \le \lambda_0 \le R[u]$.

נעבור לטפל באפיון הערך העצמי λ_r.

נניח כי לערכים העצמיים $0 < \lambda_0 \le \ldots \le \lambda_{r-1}$ מתאימות פונקציות עצמיות $\chi_0, \ldots, \chi_{r-1}$. נקח פונקציית בוחן u. ללא הגבלת כלליות אפשר להניח כי u זה אורתוגונלי)לפי משקל p(ל־$\chi_0, \ldots, \chi_{r-1}$, כי אחרת נפעיל את תהליך גרם־שמידט ונחליף את u ב־

$$u - \sum_{i=0}^{r-1} \chi_i \frac{(pu, \chi_i)}{(p\chi_i, \chi_i)} \ .$$

תהי $R = R[u]$ מנת ריילי המתאימה לפונקציית בוחן u. ברור ש־$\lambda_{r-1} \le R$ כי על פי האינדוקציה λ_{r-1} מתקבל כמינימום של מנת ריילי על קבוצת פונקציות המכילה גם את u. כמו למעלה נגדיר

$$\eta(x) := Lu - Rp(x)u \ .$$

ניתן להניח כי $\eta(x) \not\equiv 0$. אחרת u היתה פונקציה עצמית עם ערך עצמי R. אך היא בודאי לא אחד מ־$\chi_0, \ldots, \chi_{r-1}$ כי היא אורתוגונלית להם, לכן $\lambda_r \le R$, כנטען.

לכל λ שאינו ערך עצמי, פתרון בעיית השפה

$$Lv - \lambda p(x)v = \eta(x), \qquad Uv = 0,$$

נתון על ידי

$$v(x,\lambda) = \int_a^b G(x,t,\lambda)\,\eta(t)\,dt = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{r-1} \frac{\chi_i(x)\,\overline{\chi_i(t)}}{\lambda_i - \lambda} + \tilde{G}(x,t,\lambda)\right] \eta(t)\,dt$$

כאשר $\tilde{G}(x,t,\lambda)$ אנליטי בנקודות $\lambda_1,\ldots,\lambda_{r-1}$. למרות המכנים, $v(x,\lambda)$ רציף גם עבור $\lambda_1,\ldots,\lambda_{r-1}$. כי p, R, λ_i ממשיים, u אורתוגונלי לפי משקל p ל־$\chi_1,\ldots,\chi_{r-1}$, וכך

$$\begin{aligned}\int_a^b \overline{\chi_i(t)}\eta(t)\,dt &= (\eta,\,\chi_i) = (Lu - Rpu,\,\chi_i) = (Lu,\,\chi_i) - R(pu,\,\chi_i)\\ &= (u,\,L\chi_i) - R(pu,\,\chi_i) = (u,\,\lambda_i p\chi_i) - R(pu,\,\chi_i) = 0.\end{aligned}$$

נשארנו עם

$$v(x,\lambda) = \int_a^b \tilde{G}(x,t,\lambda)\eta(t)\,dt$$

ופונקציה זו רציפה ב־λ גם בנקודות $\lambda_1,\ldots,\lambda_{r-1}$. בנוסף, $v(x,\lambda)$ אורתוגונלי לפונקציות $\chi_1,\ldots,\chi_{r-1}$. כי

$$\begin{aligned}\lambda(p\chi_i,\,v) &= (\chi_i,\,\lambda pv) = (\chi_i,\,Lv - y) = (\chi_i,\,Lv) - (\chi_i,\,y)\\ &= (L\chi_i,\,v) - (\chi_i,\,Lu - Rpu)\\ &= (\lambda_i p\chi_i,\,v) - (L\chi_i,\,u) + R(\chi_i,\,pu)\\ &= \lambda_i(p\chi_i,\,v) - (\lambda_i p\chi_i,\,u) + R(\chi_i,\,pu)\\ &= \lambda_i(p\chi_i,\,v)\end{aligned}$$

כי u נבחר כאורתוגונלי ל־$\chi_1,\ldots,\chi_{r-1}$. קיבלנו כך כי $(\lambda-\lambda_i)(p\chi_i,\,v)=0$ לכן מסיקים שלכל $\lambda\neq\lambda_i$, $i=1,\ldots,r-1$,

$$(p\chi_i,\,v) = 0, \qquad i = 1,\ldots,r-1.$$

מכיון ש־$v=v(x,\lambda)$ רציף ב־λ, המסקנה בתוקף גם ל־$\lambda_1,\ldots,\lambda_{r-1}$.

כמו בהוכחת המשפט הקודם נגדיר גם הפעם $h(\lambda) = (\eta,v) = (Lv,v) - \lambda(pv,v)$ ונקבל כי זו פונקציה רציפה, מונוטונית עולה לכל λ שאינו ערך עצמי.

אם בקטע $\lambda_{r-1} < \lambda \le R[u]$ אין אף ערך עצמי נוסף אז $h(\lambda)$ מונוטוני עולה שם. בנקודת הקצה $\lambda = R$, קיים $h(R)=0$ כמו במשפט הקודם. בנקודה λ_{r-1} ועבור $v = v(x,\lambda_{r-1})$ מתקבל

$$\begin{aligned}h(\lambda_{r-1}) &= (Lv - \lambda_{r-1}pv,\,v) = (Lv,\,v) - \lambda_{r-1}(pv,\,v)\\ &= (R[v] - \lambda_{r-1})(pv,\,v),\end{aligned}$$

כי $R[v] = (Lv,\,v)/(pv,\,v)$. v היא פונקציית בוחן ואורתוגונלית ל־$\chi_0,\ldots,\chi_{r-1}$, לכן $R[v(x,\lambda)] \ge \lambda_{r-1}$. המסקנה היא כי $h(\lambda_{r-1}) \ge 0$. אך זה נוגד את המונוטוניות ומוכיח כי קיים ערך עצמי $\lambda_{r-1} < \lambda_r \le R[u]$. □

פרק 9

מערכות אוטונומיות דו־ממדיות

9.1 מסלולים ונקודות קריטיות

כזכור, מערכת משוואות דיפרנציאליות נקראת אוטונומית (autonomous) אם המשתנה החפשי אינו מופיע במפורש באגף ימין שלה. במודלים של תהליכים רבים המשתנה החפשי מציין זמן ולכן מקובל לסמנו ב־t. צורת מערכת אוטונומית ב־n נעלמים היא

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1(y_1,\ldots,y_n),\\ &\vdots\\ y_n'(t) &= f_n(y_1,\ldots,y_n). \end{aligned}$$

למשל, מערכת לינארית והומוגנית עם מקדמים קבועים היא מערכת אוטונומית. בכתיב וקטורי תרשם המערכת כ־

$$\mathbf{y}\,'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}\in R^n, \quad \mathbf{f}: R^n \to R^n. \tag{9.1}$$

הפונקציה הוקטורית[1] $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \big(f_1(y_1,\ldots,y_n),\ldots,f_n(y_1,\ldots,y_n)\big)$ נקראת גם שדה וקטורי. בסעיף זה נתאר כמה תכונות כלליות של מערכת אוטונומית n־ממדית אך בסעיפים 9.3־9.7 נעסוק רק במערכת דו־ממדית

$$\begin{aligned} x'(t) &= f_1(x,\ y),\\ y'(t) &= f_2(x,\ y). \end{aligned} \tag{9.2}$$

התכונות הייחודיות של מערכות דו־ממדיות לעומת ממד $n>2$ תתבררנה בהוכחת משפט פואנקרה־בנדיקסון בסעיף 9.5.

פתרון $\mathbf{y}(t)=\big(y_1(t),\ldots,y_n(t)\big)$ של המערכת (9.1) מהווה גם תאור פרמטרי של עקום במרחב R^n: $y_1=y_1(t),\ \ldots\ ,\ y_n=y_n(t)$, $t\in I$.

[1] לשם נוחיות הדפוס נרשום מכאן ואילך את פתרונות המערכת כוקטור שורה במקום וקטור עמוד.

הגדרה 9.1 עקום שתאורו הפרמטרי $\mathbf{y}(t) = \big(y_1(t), \ldots, y_n(t)\big)$ נתון על ידי פתרון מערכת אוטונומית נקרא מסלול *(trajectory, orbit)* המתאים לפתרון. התאור הפרמטרי קובע את כיוון תנועת הנקודות על המסלול. אוסף המסלולים המתאימים לכל פתרונות המערכת הדיפרנציאלית נקרא תמונת הפאזה *(phase portrait)* של המערכת.

נדגיש כי פתרון הוא פונקציה)פונקציה וקטורית, ליתר דיוק(בעוד שמסלול הוא יצור גיאומטי ־ קו עקום.

משפט 9.2 אם $\mathbf{y}(t)$ הוא פתרון של המערכת האוטונומית (9.1), אז לכל קבוע c גם $\mathbf{y}(t+c)$ היא פתרון של אותה מערכת. לכל הפתרונות השונים האלה מתאים אותו מסלול.

הוכחה. עובדה זו מתבררת על ידי הצבה ישירה למערכת. נסמן $\mathbf{z}(t) := \mathbf{y}(t+c)$. מכיון ש־$t$ אינו מופיע במפורש בפונקציה $\mathbf{f}$ שבאגף ימין של (9.1),

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{y}(t+c)}{dt} = \mathbf{f}(\,\mathbf{y}(t+c)\,) = \mathbf{f}(\,\mathbf{z}(t)\,).$$

דהיינו גם $\mathbf{z}(t)$ פתרון של (9.1). $\mathbf{z}(t)$ מצייר את אותו מסלול ובאותה מגמה כמו הפתרון $\mathbf{y}(t)$ אך הוא עובר בכל נקודה c יחידות זמן מוקדם יותר. לכן ההתאמה בין "פתרון" ל־"מסלול" אינה חד־חד ערכית. □

משפט 9.3 אם המערכת (9.1) מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות, אז שני מסלולים שונים שלה אינם נפגשים.

הוכחה. נניח בדרך השלילה כי שני מסלולים שונים נפגשים בנקודה α. הפתרון $\mathbf{y}(t)$ המתאים למסלול הראשון עובר בנקודה זו בזמן מסוים $t = t_1$, כלומר $\mathbf{y}(t_1) = \alpha$ והפתרון $\mathbf{z}(t)$ המתאים למסלול השני עובר באותה נקודה בזמן אחר t_2, $\mathbf{z}(t_2) = \alpha$.

נגדיר פתרון שלישי $\mathbf{v}(t) = \mathbf{z}(t+t_2-t_1)$. פתרון זה מקיים $\mathbf{v}(t_1) = \mathbf{z}(t_2) = \alpha$. פרושו של דבר כי שני הפתרונות $\mathbf{y}(t)$ ו־ $\mathbf{v}(t)$, מקיימים באותו זמן t_1 את אותו תנאי התחלה ולכן על פי משפט הקיום והיחידות הם זהים: $\mathbf{z}(t+t_2-t_1) \equiv \mathbf{y}(t)$ לכל t. פרוש הדבר הוא כי הפתרון $\mathbf{z}(t)$, הוא הזזה של הפתרון $\mathbf{y}(t)$ ב־(t_2-t_1) ולשניהם מתאים מסלול זהה, בניגוד לנתון.

עד כאן התיחסנו למפגש בין שני מסלולים שונים. אם מסלול פוגש את עצמו לאחר זמן, למשל $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{y}(t_1+T)$, אז לפי הנמוק שלמעלה נובע כי $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{y}(t+T)$ לכל t. זה פתרון מחזורי עם מחזור T והמסלול חייב להיות סגור.

מההסבר שלמעלה נובע כי פתרון נקבע על ידי $n+1$ פרמטרים $t_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ בעוד שמסלול נקבע על ידי n פרמטרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ בלבד. □

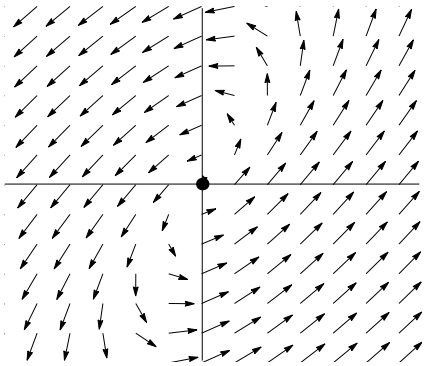
לעקום בעל תאור פרמטרי $\mathbf{y}(t) = \big(y_1(t), \ldots, y_n(t)\big)$ יש בכל נקודה וקטור משיק $\vec{\mathbf{T}} = \big(y_1'(t), \ldots, y_n'(t)\big)$ הפונה לכיוון ההתקדמות על המסלול. עבור פתרון המערכת

האוטונומית (9.1),

$$\vec{\mathbf{T}} = \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}).$$

ל־$\vec{\mathbf{T}}$ יש כיוון מוגדר היטב כל עוד $\mathbf{f}(\mathbf{y}) \neq \vec{0}$. נקודה $\mathbf{y}$ כזו נקראת נקודה רגילה. בכל נקודה רגילה $\mathbf{y}$ נצייר חץ שכוונו ככיוון השדה הוקטורי $\mathbf{f}(\mathbf{y})$. כך נקבל את שדה הכיוונים המתאים למערכת. לעומת זאת, בנקודה בה $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \vec{0}$, $\vec{\mathbf{T}}$ הוא וקטור האפס ואין לו כיוון מוגדר. נקודה כזו נקראת נקודה קריטית של המערכת.

באיור הבא מודגם שדה כיוונים המתאים למערכת אוטונומית דו־ממדית בעלת נקודה קריטית ב־$(0,0)$.



איור 9.1: שדה כיוונים של מערכת אוטונומית במישור

אם $\mathbf{y}_0$ נקודה קריטית, כלומר $\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$, אז למערכת האוטונומית (9.1) קיים הפתרון הקבוע $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{y}_0$. וכמובן גם להפך, אם למערכת יש פתרון קבוע, הנקודה המתאימה היא נקודה קריטית.

לפתרון שהוא זהותית קבוע לכל t יש תפקיד מיוחד בחקירת מערכות אוטונומיות. פתרון זה אינו זז לעולם והמסלול המתאים לפתרון כזה מורכב מנקודה אחת בודדת. בגלל משפט הקיום והיחידות אף פתרון אחר אינו נכנס אל הנקודה הקריטית ואינו יוצא ממנה עבור אף ערך של t. מסיבה זו לנקודה קריטית יש כינוי נוסף:

הגדרה 9.4 אם למערכת אוטונומית יש פתרון קבוע $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{y}_0 \in R^n$, $-\infty < t < \infty$, אז הנקודה $\mathbf{y}_0$ נקראת גם נקודת שווי משקל *(equilibrium)*.

משפט 9.5 אם פתרון מתכנס לגבול סופי כש־$t \to \infty$, למשל $\lim_{t\to\infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0$, אז $\mathbf{y}_0$ היא נקודה קריטית)נקודת שווי משקל(.

הוכחה. נניח להפך כי $\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) \neq \mathbf{0}$, אז אחד הרכיבים שונה מ־0. נאמר למשל כי זה הרכיב הראשון ו־$\lim_{t\to\infty} f_1(\mathbf{y}(t)) = f_1(\mathbf{y}_0) > 0$. לרכיב הראשון של הפתרון

$$y_1'(t) = f_1(\mathbf{y}(t)) > \frac{1}{2} f_1(\mathbf{y}_0) > 0, \qquad t > t_0.$$

לאחר אינטגרציה, $y_1(t) - y_1(t_0) > \frac{1}{2} f_1(\mathbf{y}_0)(t - t_0) \to +\infty$ כש־$t \to \infty$, בסתירה לנתון. □

9.2 דוגמאות למערכות אוטונויות

נציג עתה מספר דוגמאות הקשורות למערכות אוטונומיות דו־ממדיות מהצורה (9.2) במישור (x, y). במצב זה המישור (x, y) נקרא מישור הפאזה (phase plane).

דוגמא 9.1 למערכת $x' = -x,\ y' = -y$ הפתרונות $(x(t), y(t)) = (c_1 e^{-t}, c_2 e^{-t})$ שכולם שואפים לנקודה הקריטית $(0, 0)$ כש־$t \to +\infty$.
גם למערכת $x' = -y,\ y' = x$ אותה נקודה קריטית $(0, 0)$ אך אף אחד מפתרונותיה $(x(t), y(t)) = c_1\big(\cos(t - c_2),\ \sin(t - c_2)\big)$ אינו מתקרב אל הנקודה הקריטית. □

דוגמא 9.2 בתחום בו המערכת (9.2) מקיימת $f_1(x, y) \neq 0$, הרכיב הראשון של הפתרון $x(t)$ הוא מונוטוני, יש לו הפוך $t = t(x)$ ולכן ניתן לכתוב $y = y(t(x))$. שם

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)},$$

וזו משוואה מסדר ראשון עבור $y = y(x)$ (אך לא עבור $x(t), y(t)$!). המערכת האוטונומית

$$\begin{aligned} x'(t) &= x^2 - 6xy, \\ y'(t) &= 3y^2 - 2xy, \end{aligned} \tag{9.3}$$

מדגימה את ההבדל בין מציאת פתרון למערכת לבין מציאת המסלול המתאים לפתרון זה. בחלוקת שתי המשוואות זו בזו מתקבל

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3y^2 - 2xy}{x^2 - 6xy}.$$

אפשר לרשום זאת גם בצורה

$$(3y^2 - 2xy)\,dx + (-x^2 + 6xy)\,dy = 0.$$

זו משוואה מדויקת והפתרון הכללי שלה הוא $3xy^2 - x^2 y = \text{const}$ (בדוק!). בזה מצאנו את הגרפים של כל מסלולי המערכת (9.3). אולם דבר זה כלל אינו מסייע בידינו למצוא את פתרונות המערכת $\big(x(t), y(t)\big)$ כפונקציות של t.

המערכת (9.3) היא גם מקרה פרטי של הטענה הבאה: נתונה פונקציה $F(x, y) \in C^1$. אז המערכת האוטונומית

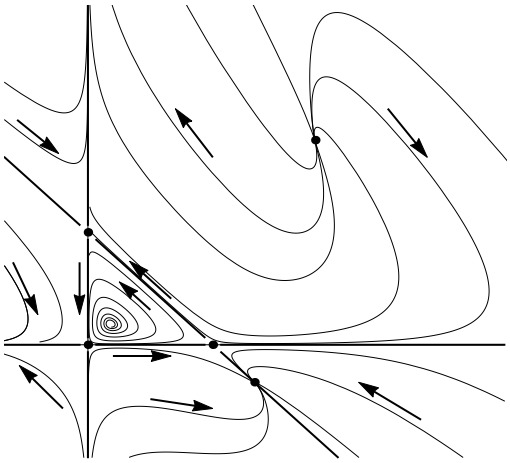
$$\begin{aligned} x'(t) &= \ \ F_y(x, y), \\ y'(t) &= -F_x(x, y), \end{aligned} \tag{9.4}$$

היא בעלת מסלולים $F(x,y)=c$, כי $\frac{d}{dt}F(x(t),y(t)) = F_x\,x' + F_y\,y' = 0$. □

דוגמא 9.3 נתונה המערכת האוטונומית

$$\begin{aligned} x' &= x(\,3 - x - 5y + xy), \\ y' &= y(-3 + y + 5x - x^2), \end{aligned} \tag{9.5}$$

ופתרונותיה הנומריים שבאיור 9.2. מצא את הנקודות הקריטיות של המערכת. הראה כי הישרים $x=0$, $y=0$, $x+y=3$ מורכבים ממסלולים של המערכת. כמה מסלולים?



איור 9.2: תמונת פאזה של מערכת (9.5)

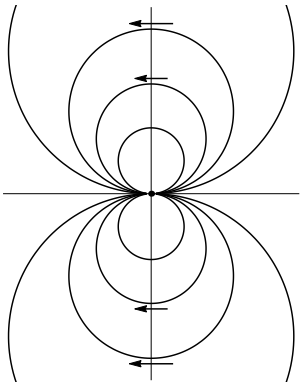
דוגמא 9.4 את שתי המשוואות האוטונומית

$$\begin{aligned} x'(t) &= x^2 - y^2, \\ y'(t) &= 2xy, \end{aligned}$$

ניתן לכתוב בעזרת המשתנה המרוכב היחיד $z = x + iy$ כ-$z' = z^2$ פתרונו הכללי הוא $z(t) = \dfrac{1}{t-(a+ib)}$ בתוספת הפתרון הסינגולרי $z(t)=0$. לכן פתרונות המערכת הם

$$x(t) = \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2}, \qquad y(t) = \frac{b}{(t-a)^2+b^2}\,,$$

וכן נקודת שווי המשקל $(x(t),y(t)) \equiv (0,0)$. את מסלולי המערכת ראה באיור 9.3.



איור 9.3: מסלולי המערכת $x' = x^2 - y^2, \quad y' = 2xy$

דוגמא 9.5 בדוגמא 1.3 הצגנו את מערכת Volterra-Lotka,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \quad ax - bxy, \\ y'(t) &= -cy + dxy, \qquad a, b, c, d > 0, \end{aligned}$$

המתארת מערכת ביולוגית המורכבת משני מיני בעלי חיים, צמחוני $(x(t))$ וטורף $(y(t))$. מערכת זו שתי נקודות קריטיות, $(0,0)$ ו־$(c/d, a/b)$.

ניתן למצוא את מסלולי המערכת במפורש על ידי חלוקת שתי המשוואות זו בזו:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{y}{x}\,\frac{c - dx}{a - by} \ .$$

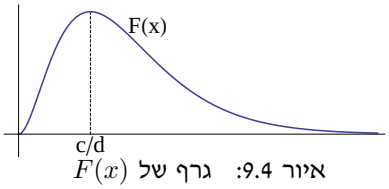
בשיטת הפרדת המשתנים מקבלים $\int \frac{c-dx}{x}\,dx + \int \frac{a-by}{y}\,dy = \text{const}$ ו־ $c\log x - d\cdot x + a\log y - b\cdot y = \log K$, K קבוע. לבסוף

$$\left(x^c e^{-dx}\right)\left(y^a e^{-by}\right) = K \ .$$

נסמן $F(x) = x^c e^{-dx},\ G(y) = y^a e^{-by}$ ונרשום את משוואת המסלולים בצורה

$$F(x)G(y) = K.$$

הגרף של $F(x)$ מוצג באיור 9.4 והגרף של $G(y)$ דומה לו.

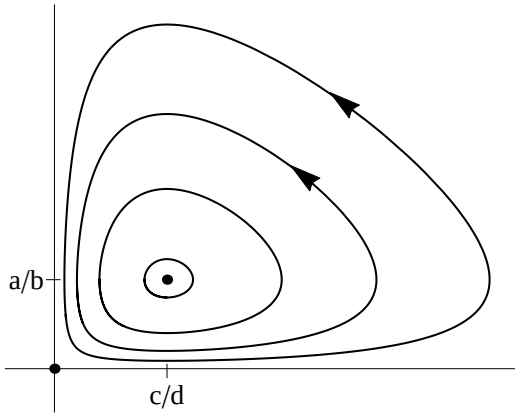


איור 9.4: גרף של $F(x)$

מכיון ש־ $\max F(x) = F(c/d),\ \max G(y) = G(a/b)$,

$$F(x) = \frac{K}{G(y)} \geq \frac{K}{G(a/b)}$$

ולכן ל־K נתון, x מוגבל לקטע $x_1 \leq x \leq x_2$ מסוים. כך גם y חסום ולכן כל מסלול של המודל חסום. כמו כן, כל ישר $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, חותך את המסלול לכל היותר פעמיים. בעזרת משפט פואינקרה־בנדיקסון)משפט 9.15(נוכל להסיק בהמשך כי כל המסלולים סגורים ומחזוריים. מסלולים אחדים של המודל מתוארים באיור 9.5. כפי שכבר הערנו זה אינו עוזר למצוא במפורש את הפתרונות $\big(x(t), y(t)\big)$. □



איור 9.5: מסלולים של מודל וולטרה־לוטקה

הדוגמא הבאה היא מודל אוטונומי בשלושה משתנים.

דוגמא 9.6 (מודל SIR להתפשטות מחלות מדבקות). נחלק את כלל האוכלוסיה לשלוש מחלקות. $s(t)$ יסמן את החלק היחסי באוכלוסיה בזמן t אשר רגיש למחלה ועלול להדבק (susceptible), ב־$i(t)$ נסמן את המדבקים (infective) וב־$r(t)$ את המורחקים מהתהליך (removed), כגון מחוסנים וחולים שנפטרו. קצב ההדבקות פרופורציוני למספר המפגשים בין פרטים מדבקים לפרטים רגישים. הנדבקים יוצאים מהמחלקה s ועוברים למחלקה i. לכן $ds/dt = -\beta si$, כשמקדם ההדבקה β הוא קבוע חיובי. השינוי ב־$i(t)$ נובע משני גורמים: הצטרפות נדבקים חדשים ויציאת מתרפאים ונפטרים מהמחלקה. מכאן $di/dt = \beta si - \gamma i$, כשהקבוע החיובי γ הוא קצב היציאה. היוצאים מ־i עוברים למחלקה r, וכך $dr/dt = \gamma i$. לסיכום, המעברים $s \longrightarrow i \longrightarrow r$ מתוארים על ידי המערכת האוטונומית

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\beta si, \\ \frac{di}{dt} &= \beta si - \gamma i, \qquad \beta, \gamma > 0, \\ \frac{dr}{dt} &= \gamma i. \end{aligned} \tag{9.6}$$

כאן $s'(t)+i'(t)+r'(t)\equiv 0$ ומשום כך הסכום $s(t)+i(t)+r(t)$ הוא קבוע, $s(t)+i(t)+r(t)\equiv 1$. מודל זה מתעלם משינויים אחרים בגודל האוכלוסיה כגון לידות ופטירות טבעיות בזמן התהליך.

בשתי המשוואות הראשונות של המערכת (9.6) מופיעים רק שני הנעלמים $s(t),i(t)$ ותחילה נחקור אותם במישור s,i. $r(t)$ נקבע על ידי $r(t)=1-s(t)-i(t)$.

המערכת (9.6) מוגדרת בכל מקום, אולם התחום המעניין עבור $s(t),i(t)$ במישור הפאזה שלהם הוא רק $D=\{s\geq 0,\ i\geq 0, s+i\leq 1\}$. בתחום D, $\frac{ds}{dt}\leq 0$ ו־$s(t)$ מונוטוני יורד. על כן

$$\frac{di}{dt}=\beta i(t)\left(s(t)-\frac{\gamma}{\beta}\right)\leq \beta i\left(s(0)-\frac{\gamma}{\beta}\right).$$

בשל זאת, אם $\gamma/\beta\geq s(0)$ אז $\frac{di}{dt}\leq 0$ ולא מתפתחת מגפה.

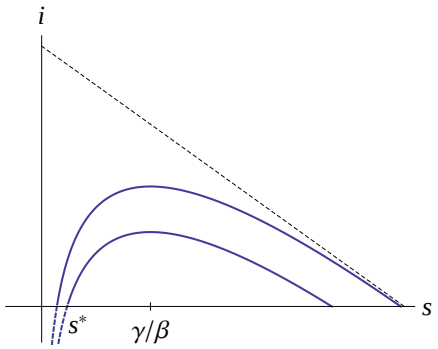
מכאן והלאה נתענין במקרה $\gamma/\beta<s(0)$. תנאי התחלה מעניינים הם $i(0)>0$, $s(0)<1$. במישור הפאזה s,i כל נקודות הישר $i=0$ הן נקודות קריטיות לא מבודדות. כאשר $i\neq 0$,

$$\frac{di}{ds}=\frac{\beta si-\gamma i}{-\beta si}=-1+\frac{\gamma}{\beta}\frac{1}{s}$$

ו־$i(s)$ מקבל את ערכו המקסימלי על כל מסילה עבור $s=\gamma/\beta$. על ידי אינטגרציה

$$i(s)=i(0)+s(0)-s+\log\big(s/s(0)\big). \tag{9.7}$$

צורת המסלולים $i=i(s)$ נתונה באיור 9.6. $i(s)$ מתאפס לכל מסלול ב־$s^*>0$ מתאים, האפס היחידי של (9.7) ב־$(0,s(0))$, כלומר בסיום המגפה עדיין נותרים באוכלוסיה פרטים הרגישים למחלה ואינם מחוסנים. □



איור 9.6: מסלולים של מודל SIR

9.3 מערכות אוטונומיות לינאריות דו־ממדיות

מערכת אוטונומית פשוטה במיוחד היא מערכת של שתי משוואות דיפרנציאליות לינאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים,

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax + by, \\ y'(t) &= cx + dy. \end{aligned} \tag{9.8}$$

נניח כי דטרמיננט מטריצת המקדמים שונה מ־0, $ad - bc \neq 0$. אז למערכת המשוואות

$$\begin{aligned} ax + by &= 0, \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

יש פתרון יחיד $(x, y) = (0, 0)$ וזו הנקודה הקריטית היחידה של (9.8). כמובן שהערכים העצמיים λ_1, λ_2 של מטריצת המקדמים שונים מ־0. הפתרון הכללי ל־(9.8) מוכר: אם ל־λ_1, λ_2 מתאימים שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ אז הפתרון הכללי הוא

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2; \tag{9.9}$$

ואם $\lambda_1 = \lambda_2$, ובעלי ריבוי גיאומטרי אחד אז

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2\Big[te^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}\Big]; \tag{9.10}$$

ואם הערכים העצמיים מרוכבים, הפתרון מכיל גם פונקציות טריגונומטריות. אולם מתברר כי גם כאשר הפתרון נתון במפורש על ידי נוסחאות מוכרות, התמונה הגיאומטרית נוחה יותר להבנת התנהגות המערכת.

כדי להבחין בין המופעים הגיאומטריים השונים, נביא בעזרת ההצבה $\mathbf{x} = T\mathbf{z}$ את המערכת $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ לצורה $\mathbf{z}' = \big(T^{-1}AT\big)\,\mathbf{z}$ בה $J = T^{-1}AT$ היא צורת ז'ורדן. החלפת משתנים זו משמרת את הערכים העצמיים. צורות ז'ורדן השונות של מערכת דו־ממדית הן

1. ערכים עצמיים שונים, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$; נבדיל בין המקרים בהם סימני הערכים העצמיים שווים או מנוגדים.
2. שני ערכים עצמיים שווים ולהם שני וקטורים עצמיים שונים, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$;
3. שני ערכים עצמיים שווים ולהם וקטור עצמי אחד בלבד, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$;
4. ערכים עצמיים מרוכבים צמודים. את צורת ז'ורדן המרוכבת $\begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$ ניתן להביא על ידי טרנספורמצית דמיון לצורה הקנונית הממשית $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$; בפרט כאשר $\alpha = \mathcal{R}e\{\lambda\} = 0$, מתקבלת מטריצה אנטי־סימטרית.

בהמשך נתאר את תמונת המערכת במישור הפאזה בכל אחד ממקרים אלה.

מקרה א. λ_1, λ_2 ממשיים, שונים, בעלי אותו סימן

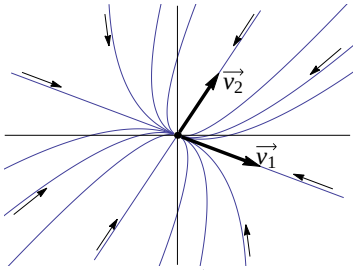
נניח למשל כי $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ ונתאר את מסלולי הפתרונות (9.9).

אם $c_1 = 0$ אז לפתרונות $\mathbf{x}(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$ מתאימים שני מסלולים המונחים על שני הקרניים בכיוונים $\pm\mathbf{v}_2$. מכיוון ש־$\lambda_2 < 0$, פתרונות אלה מתקרבים כאשר $t \to +\infty$ אל הנקודה הקריטית $(0,0)$ (שגם היא מהווה מסלול בפני עצמו). ל־ $c_2 = 0$ מתאימים שני מסלולים על הקרניים בכיוון $\pm\mathbf{v}_1$.

אם c_1, c_2 שניהם לא 0, נרשום את הפתרונות (9.9) בצורה

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_1 t}\left[c_1\mathbf{v}_1 + c_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\mathbf{v}_2\right].$$

כאשר $t \to +\infty$ המחובר $c_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\mathbf{v}_2$ זניח לעומת $c_1\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$. לפיכך עבור $t \to +\infty$ כל המסלולים האלה שואפים אל $(0,0)$ בכיוונים $\pm\mathbf{v}_1$. ראה איור 9.7.



איור 9.7: צומת

בתמונת פאזה זו נקודת שווי המשקל נקראת בשם צומת או קשר (node). המאפיין נקודה קריטית זו הוא כי כל המסלולים מתקרבים אליה בכיוון $\pm\mathbf{v}_1$ למעט שניים המתקרבים בכיוון $\pm\mathbf{v}_2$.

המצב $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ יהפוך למקרה בעל ערכים עצמיים שליליים על ידי החלפת t ב־$-t$, כלומר כיוון התנועה על כל מסלול יהיה בכיוון ההפוך ומתרחק מהנקודה הקריטית.

את הפתרון הכללי (9.9) ניתן להציג גם כ־$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$, כלומר טרנספורמציה לינארית של $\begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. מסלולים אלה הם סיבוב ועיוות של העקומים $|y| = c|x|^{\lambda_2/\lambda_1}$.

מקרה ב. λ_1, λ_2 ממשיים, בעלי סימנים הפוכים

נניח למשל כי $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. כש־ $c_1 = 0$ מסלולי הפתרונות $\mathbf{x}(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$ מונחים על שני הקרניים בכיוונים $\pm\mathbf{v}_2$ ומכיוון ש־$\lambda_2 < 0$, המסלולים מתקרבים אל הנקודה הקריטית $(0,0)$. כש־ $c_2 = 0$, ל־$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1$ מתאימים שני מסלולים על הקרניים בכיוון $\pm\mathbf{v}_1$ המתרחקים מהנקודה הקריטית.

כש־$(c_1, c_2) \neq (0,0)$ ו־$t \to +\infty$, נרשום את הפתרון (9.9) כ־

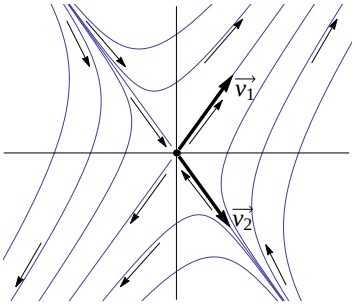
$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_1 t}\left[c_1\mathbf{v_1} + c_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\mathbf{v_2}\right].$$

מכיון ש־$\lambda_2 - \lambda_1 < 0$, המחובר $c_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\mathbf{v_2}$ זניח לעומת $c_1\mathbf{v_1}$. לכן כאשר $t \to +\infty$, המסלול מתרחק באינסוף לקרן בכיוון $\mathbf{v}_1$ או $-\mathbf{v}_1$.

לעומת זאת כאשר $t \to -\infty$ עדיף לרשום את הפתרונות דווקא בצורה

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_2 t}\left[c_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2}\right].$$

הפעם $c_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\mathbf{v_1}$ הוא הזניח לעומת $c_2\mathbf{v_2}$ כש־$t \to -\infty$, לכן הפתרון מגיע מאינסוף מכווני $\mathbf{v}_2$ או $-\mathbf{v}_2$. תמונת הפאזה נקראות במקרה זה בשם אוכף (saddle). ראה איור 9.8.



איור 9.8: אוכף

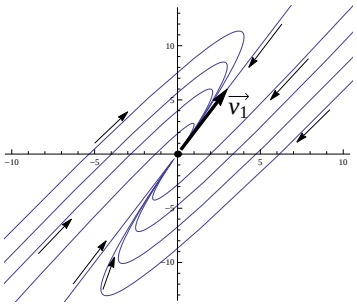
מקרה ג. $\lambda_1 = \lambda_2$, ריבוי גיאומטרי 1.

במקרה זה נרשום את הפתרון (9.10) בצורה

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_1 t}\left[(c_1 + c_2 t)\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{u}\right], \tag{9.11}$$

כאשר $\mathbf{v}_1$ הוא וקטור עצמי ו־$\mathbf{u}$ הוא וקטור עצמי מוכלל. נניח כי $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$.

עבור $c_2 = 0$ מסלולי הפתרונות $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1$ מונחים על הקרניים בכיוונים $\pm\mathbf{v}_1$. כש־$c_2 \neq 0$ ו־$t \to \pm\infty$, התקרבות או התרחקות הפתרון מהנקודה הקריטית $(0,0)$ נקבעת בעיקר על ידי הגורם הסקלרי $e^{\lambda_1 t}$. כיוון תנועתו עבור ערכי $|t|$ גדולים נקבע בעיקר על ידי הוקטור הדומיננטי $c_2 t\,\mathbf{v}_1$. וקטור זה מחליף את כוונו בין $t \to -\infty$ ל־$t \to +\infty$ ולכן המסלול מבצע כעין "פניית פרסה" ביניהם. נקודה קריטית זו, לה מתאים וקטור עצמי יחיד, נקראת בשם צופת מנוון (improper node). המאפיין נקודה קריטית זו הוא כי כל המסלולים מתקרבים אליה בכווני $\pm\mathbf{v}_1$.



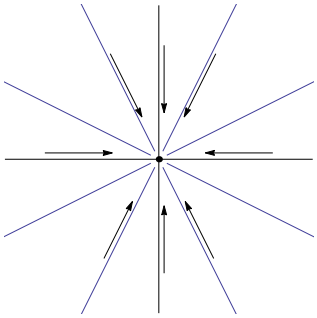
איור 9.9: צומת מנוון

מקרה ד. $\lambda_1 = \lambda_2$, ריבוי גיאומטרי 2.

אם ל־$\lambda_1 = \lambda_2$ מתאימים שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, אז הפתרון הכללי הוא

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_2 = e^{\lambda_1 t}\left[c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2\right].$$

הוקטורים $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ פורשים את כל המישור ולכן יש מסלול לאורך כל כיוון בקרבת הנקודה הקריטית. כיוון ההתקדמות לאורך המסלול תלוי בסימן הערך העצמי. מצב זה מתרחש למעשה אך ורק עבור המטריצות $A = \lambda_1 I$. תמונת פאזה זו נקראת בשם כוכב (star). ראה איור 9.10.



איור 9.10: כוכב

מקרה ה. λ_1, λ_2 מרוכבים צמודים.

נניח כי למערכת ממשית יש שני ערכים עצמיים מרוכבים צמודים $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. $\alpha \neq 0$ ללא הגבלת כלליות נניח כי $\beta > 0$. למערכת הדיפרנציאלית שני פתרונות וקטוריים מרוכבים צמודים $e^{\lambda t}\mathbf{v}$, $e^{\overline{\lambda} t}\overline{\mathbf{v}}$ ומהם נקבל שני פתרונות ממשיים

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v} + e^{\overline{\lambda} t}\overline{\mathbf{v}}\right) = \mathcal{R}e\left\{e^{\lambda t}\mathbf{v}\right\}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \frac{1}{2i}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v} - e^{\overline{\lambda} t}\overline{\mathbf{v}}\right) = \mathcal{I}m\left\{e^{\lambda t}\mathbf{v}\right\}.$$

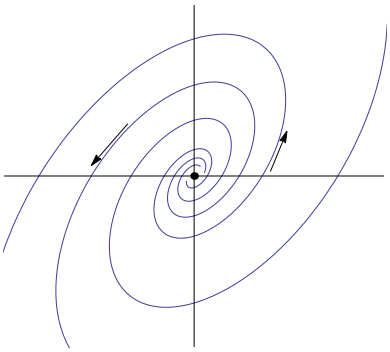
באופן מפורש:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(1)}(t) &= \mathcal{R}e\left\{e^{(\alpha+i\beta)t}\begin{pmatrix}p+iq\\ r+is\end{pmatrix}\right\} = e^{\alpha t}\mathcal{R}e\left\{(\cos\beta t + i\sin\beta t)\begin{pmatrix}p+iq\\ r+is\end{pmatrix}\right\}\\ &= e^{\alpha t}\begin{pmatrix}p\cos\beta t - q\sin\beta t\\ r\cos\beta t - s\sin\beta t\end{pmatrix},\\ \mathbf{x}^{(2)}(t) &= \mathcal{I}m\left\{e^{(\alpha+i\beta)t}\begin{pmatrix}p+iq\\ r+is\end{pmatrix}\right\} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix}p\sin\beta t + q\cos\beta t\\ r\sin\beta t + s\cos\beta t\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

שים לב כי $c_1\mathbf{x}^{(1)},\ c_2\mathbf{x}^{(2)}$ משרטטות את אותן משפחות עקומים במישור הפאזה. $\mathbf{x}^{(1)}(t-\frac{\pi}{2\beta}) \equiv e^{\pi\alpha/2\beta}\,\mathbf{x}^{(2)}(t)$, לכן שתי משפחות הפתרונות

המשוואות הפרמטריות $(x_1(t), x_2(t)) = (p\cos\beta t - q\sin\beta t,\ r\cos\beta t - s\sin\beta t)$ בעלות מחזור $2\pi/\beta$ ולכן מתארות עקום סגור. העקום סימטרי כלפי הראשית מכיוון ש־ $x_i(t+\pi/\beta) = -x_i(t)$. לפיכך לפנינו עקום סגור, סימטרי המקיף את הראשית. למעשה זו האליפסה $(r^2+s^2)x^2 - 2(pr+qs)xy + (p^2+q^2)y^2 = (qr-ps)^2$ (אמת על ידי חישוב ישיר!)

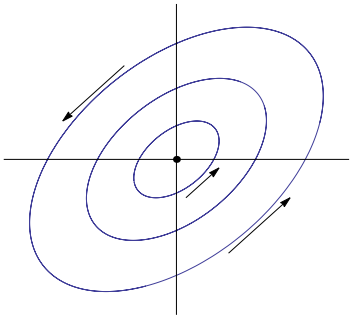
כאשר t גדל ב־$2\pi/\beta$, נקודות $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ משלימות הקפה של הראשית, אך הודות לגורם $e^{\alpha t}$, מרחק נקודות העקום מן הראשית יגדל או יקטן בהתאם אם $\alpha = \mathcal{R}e\{\lambda_1\}$ חיובי או שלילי. לכן כל המסלולים הם ספירליס. זהו גם שם תמונת הפאזה. (שם נוסף לנקודה קריטית מסוג זה הוא focus). ראה איור 9.11. כאשר $\beta < 0$, כיוון סבוב הספירל הוא הפוך, כמובן.



איור 9.11: ספירל

מקרה ו. λ_1, λ_2 מדומים טהורים.

כאשר $\lambda_1 = i\beta, \lambda_2 = -i\beta$, זה מקרה פרטי של המודל הקודם ללא הגורם $e^{\alpha t}$. כפי שאמרנו שם, כל פתרון הוא מחזורי והעקומים הם מסלולים סגורים סימטריים, המקיפים את הראשית. ראה איור 9.12. מסיבות ברורות תמונת פאזה זו נקראת מרכז (center).



איור 9.12: מרכז

הערה. כאשר לפחות ערך עצמי אחד מתאפס, אז $\lambda_1\lambda_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$. המשוואות

$$ax + by = 0,$$
$$cx + dy = 0,$$

תלויות לינארית וכל נקודות הישר $ax + by = 0$ הן נקודות קריטיות של המערכת הדיפרנציאלית (9.8). הן כמובן אינן נקודות קריטיות מבודדות. למשל, למערכת המשוואות

$$x' = -x - 2y,$$
$$y' = -x - 2y,$$

יש ערכים עצמיים $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -3$ ופתרון כללי

$$x(t) = 2c_1 + c_2e^{-3t},$$
$$y(t) = -c_1 + c_2e^{-3t}.$$

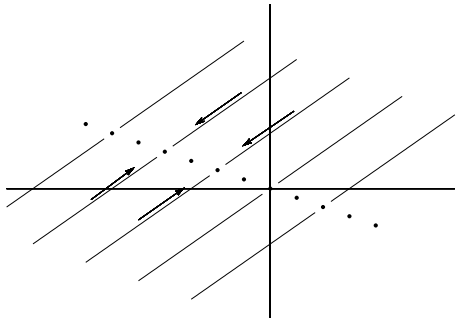
הנקודות הקריטיות הן כל הנקודות מהצורה $(2c_1, -c_1)$ וכל אחת מהן מהווה מסלול מלא. מסלול של כל פתרון עם $c_2 \neq 0$ מונח על ישר $x - y = 3c_1$ ומתקרב אל אחת מהנקודות הקריטיות. ראה איור 9.13. □

פרק 10 דן בשאלת היציבות של מערכות משוואות דיפרנציאליות. משפט 10.6 קובע את יציבות תמונות הפאזה של מערכות לינאריות אוטונומיות n־ממדיות. עבור מערכות דו־ממדיות המתוארות באיורים 9.7–9.12 התוצאות מסוכמות בטבלה 10.1.

9.4 לינאריזציה ליד נקודה קריטית

בסעיף זה נדון בהתנהגות פתרונות המערכת האוטונומית הדו־ממדית (9.2),

$$x'(t) = f_1(x,\ y),$$
$$y'(t) = f_2(x,\ y).$$



איור 9.13: רצף של נקודות קריטיות

בקרבת נקודה קריטית (x_0, y_0) בה $f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) = 0$. לשם הפשטות נניח כי $(x_0, y_0) = (0, 0)$. אם הפונקציות f_1, f_2 דיפרנציאביליות, ניתן לכתוב סביב $(0, 0)$

$$f_1(x,\ y) = ax + by + h_1(x,\ y),$$
$$f_2(x,\ y) = cx + dy + h_2(x,\ y),$$

כאשר

$$a = f_{1,x}(0,0),\ b = f_{1,y}(0,0),\ c = f_{2,x}(0,0),\ d = f_{2,y}(0,0),$$

ו־$h_1, h_2 = o(r)$ כש־ $r = (x^2 + y^2)^{1/2} \to 0$. בסימונים אלה המערכת (9.2) הופכת ל־

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax + by + h_1(x,\ y), \\ y'(t) &= cx + dy + h_2(x,\ y), \end{aligned} \tag{9.12}$$

המזכירה את המערכת האוטונומית הלינארית

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax + by, \\ y'(t) &= cx + dy. \end{aligned} \tag{9.13}$$

המערכת (9.13) נקראת הלינאריזציה של (9.12); ובכיוון הפוך, (9.12) מכונה הפרעה של (9.13). מטרתנו היא לקבוע איזה תכונות של המערכת הפשוטה (9.13) משותפות גם למערכת הבלתי לינארית (9.12) בקרבת הנקודה הקריטית $(0, 0)$. כמו בדיון במערכות לינאריות בסעיף 9.3 נסתפק בסעיף זה בחקירת המקרים בהם

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{1,x} & f_{1,y} \\ f_{2,x} & f_{2,y} \end{vmatrix} (0,0) \neq 0.$$

נחפש נקודות קריטיות של (9.12). בנקודה קריטית

$$ax + by + h_1(x,\ y) = 0,$$
$$cx + dy + h_2(x,\ y) = 0.$$

אם $ad - bc \neq 0$, אז

$$x = \begin{vmatrix} h_1 & b \\ h_2 & d \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = o(r), \quad y = \begin{vmatrix} a & h_1 \\ c & h_2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = o(r),$$

ו־$r = (x^2+y^2)^{1/2} = o(r)$! זה בלתי אפשרי בסביבה די קטנה של הראשית אלא אם כן $r = 0$. לכן $(x,y) = (0,0)$ היא נקודה קריטית מבודדת של המערכת (9.12).

נעזר בקואורדינטות קטביות $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ ונציג את הפתרונות בצורה $x(t) = r(t)\cos\theta(t),\ y(t) = r(t)\sin\theta(t)$.

הגדרה 9.6 הנקודה הקריטית $(0,0)$ נקראת שקע (atrractor) אם יש סביבה שלה כך שכל פתרון העובר בה מקיים $r(t) \to 0$ כאשר $t \to +\infty$ (או $t \to -\infty$).
הנקודה הקריטית נקראת נקודת ספירל אם $r(t) \to 0$, $|\theta(t)| \to \infty$ כאשר $t \to +\infty$ (או $t \to -\infty$).
הנקודה נקראת קשר אם $r(t) \to 0$, $\theta(t) \to c$, c קבוע.
הנקודה נקראת כוכב אם $r(t) \to 0$ ולכל קבוע c יש פתרון שעבורו $\theta(t) \to c$.
הנקודה הקריטית נקראת מרכז אם יש סדרת מסלולים סגורים המקיפים אותה כך שקוטריהם שואפים ל־0.
נקודה קריטית נקראת אוכף אם יש שני מסלולים המתקרבים אליה לאורך כיוונים נגדיים וכל פתרון אחר המתחיל די קרוב לאחד ממסלולים אלה ולנקודה הקריטית מתרחק מהם כש־$t \to +\infty$.
עבור מערכת לינארית, הגדרות אלה של סוגי הנקודה הקריטית מזדהות עם אלה של סעיף 9.3.

משפט 9.7 אם נקודת הראשית היא שקע עבור המערכת הלינארית (9.13) אז היא שקע גם עבור המערכת הבלתי לינארית (9.12).

הוכחה. זהו בעצם משפט על "יציבות אסימפטוטית" והוא מקרה פרטי של משפט 10.7 שיוכח בפרק על יציבות. משפט 10.7 דן במערכות לאו דווקא אוטונומיות $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(x,\mathbf{y})$, בה A מטריצה קבועה $n \times n$ ולכל ערכיה העצמיים $\mathcal{R}e\{\lambda_i\} < 0$. □

נבדוק האם נקודות קריטיות משמרות את אופיין תחת הפרעה קטנה.

משפט 9.8 אם נקודת הראשית היא ספירל עבור המערכת הלינארית (9.13) אז היא ספירל גם עבור המערכת (9.12).

הוכחה. אם המערכת הלינארית (9.13) היא מטיפוס ספירל כלומר בעלת ערכים עצמיים מרוכבים $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$, נביא אותה על ידי טרנספורמציה לינארית לצורתה הקנונית

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y, \\ y' &= -\beta x + \alpha y, \end{aligned} \tag{9.14}$$

המתוארת בעמוד 252. אותה טרנספורמציה תביא את המערכת (9.12) לצורה

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + g_1(x,\ y), \\ y' &= -\beta x + \alpha y + g_2(x,\ y). \end{aligned} \tag{9.15}$$

עם $g_1, g_2 = o(r)$. נניח ש־$\alpha = \mathcal{R}e\{\lambda_i\} < 0$. אז הנקודה $(0,0)$ היא שקע עבור המערכת הלינארית (9.14) ולפי משפט 9.7, גם עבור המערכת (9.15).

ובמקרה שלנו $\theta(t) = \arctan(y(t)/x(t))$ מקיים $\theta'(t) = (y'x - x'y)/(x^2+y^2)$

$$r^2\theta'(t) = y'x - x'y = -\beta(x^2+y^2) + xg_2 - yg_1 = -\beta r^2 + o(r^2).$$

הודות לשקע, לכל פתרון המתחיל די קרוב לראשית קיים $r(t) \to 0$ כש־$t \to \infty$. לכן $\theta'(t) = -\beta + o(1)$ וכך $\theta(t) = -\beta t + o(t)$ והראשית היא נקודת ספירל. □

משפט 9.9 אם הראשית היא נקודה קריטית מסוג כוכב עבור המערכת הלינארית (9.13) ואם $f_1(x,y), f_2(x,y) = O\big(r^{1+\varepsilon}\big)$ בסמיכות שווה ב־θ כאשר $r \to 0$, אז גם המערכת (9.12) היא מסוג כוכב ב־$(0,0)$.

הוכחה. לפי הנתון המערכת הלינארית (9.13) היא בעלת ערכים עצמיים ממשיים שונים, נאמר $\lambda < 0$. על ידי טרנספורמציה לינארית נביא אותה לצורתה הקנונית $x' = \lambda x,\ y' = \lambda y$, ואת המערכת הבלתי לינארית (9.12) לצורה

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x + g_1(x,\ y),\\ y' &= \lambda y + g_2(x,\ y), \end{aligned}$$

כאשר $g_1, g_2 = O\big(r^{1+\varepsilon}\big)$. במקרה זה

$$\begin{aligned} r^2\theta' &= y'x - x'y = xg_2 - yg_1 = O\big(r^{2+\varepsilon}\big),\\ rr' &= xx' + yy' = \lambda r^2 + xg_2 + yg_1 = \lambda r^2 + O(r^{2+\varepsilon}). \end{aligned} \tag{9.16}$$

לפי משפט 9.7, אם מסלול מתחיל די קרוב לראשית אז $r(t) \to 0$. יתר על כן, הודות ל־$\lambda < 0$, $r(t)$ יורד באופן מונוטוני ל־0. לאור זאת נניח כי לפתרון המתחיל בנקודה (r_1, θ_1) יש ל־ $r(t)$ פונקציה הפוכה $t = t(r)$. מסלול הפתרון בקואורדינטת קטביות הוא $\theta = \theta(t(r))$ והוא מקיים את המשוואה הדיפרנציאלית

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{dt}\Big/\frac{dr}{dt} = \frac{xg_2 - yg_1}{r(\lambda r^2 + xg_2 + yg_1)}, \qquad (x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta).$$

נסמן את אגף ימין של המשוואה ב־$G(r,\theta)$. על ידי אינטגרציה

$$\theta_1 - \theta(r) = \int_r^{r_1} G(r, \theta(r))\, dr.$$

לפי (9.16), $G(r,\theta) = \dfrac{O\big(r^{2+\varepsilon}\big)}{r\big(\lambda r^2 + O(r^{2+\varepsilon})\big)} = O\big(r^{-1+\varepsilon}\big)$ כאשר $r \to 0$. על כן $G(r,\theta)$ אינטגרבילי ליד $r = 0$, הגבול

$$\theta(0^+) = \lim_{r\to 0^+} \theta(r) = \theta_1 - \int_0^{r_1} G(r, \theta(r))\, dr$$

קיים וסופי והמסלול מתקרב לנקודה הקריטית בכיוון θ מוגדר.

נותר להוכיח כי בכל כיוון נתון יש פתרון המתקרב אל הנקודה הקריטית. נחזיק את r_1 קבוע. אז $\theta(0^+)$ תלוי באופן רציף בתנאי ההתחלה θ_1. מצד שני, כש־$\theta_1 \to \pm\infty$ אז $\theta(0^+) \to \pm\infty$ ומקבל את כל ערכי הביניים. לכן בכל כיוון מגיע מסלול אל הנקודה הקריטית, כנדרש.

אם במערכת המשוואות המקורית (9.2) f_1, f_2 בעלות 3 נגזרות אז $g_1, g_2 = O\big(r^2\big)$ ותנאי המשפט בוודאי מתקיימים. □

דוגמא 9.7 במשפט 9.9 לא ניתן להחליף את ההנחה $g_1, g_2 = O\big(r^{1+\varepsilon}\big)$ בהנחה $g_1, g_2 = o(r)$. נסתכל למשל במערכת

$$x' = -x + y/\log(r), \quad y' = -y + x/\log r, \qquad r = (x^2+y^2)^{1/2}.$$

בקואורדינטות קטביות זה

$$rr' = (xx' + yy') = -r^2, \qquad r^2\theta' = y'x - x'y = r^2/\log r,$$

כלומר $r(t) = c_1 e^{-t}$, $\theta'(t) = 1/\log r = 1/(\log c_1 - t)$. מתקבל כי

$$\theta(t) = c_2 - \log\big|\log c_1 - t\big| \to -\infty, \qquad t \to \infty.$$

תמונת הפאזה היא שקע בצורת ספירל בעוד שהלינאריזציה שלו, $x' = -x,\ y' = -y$ היא כוכב. □

תמונת פאזה מסוג "מרכז" רגישה מאד והפרעות קטנות יכולות לשנות את אפיה. המערכת הלינארית $x' = y,\ y' = -x$ היא מרכז ומסלוליה מעגלים. לעומת זאת הפרעה קטנה שלה

$$x' = y - xr^n, \quad y' = -x - yr^n,$$

הופכת בקואורדינטות קטביות ל־$\theta'(t) = -1,\ r' = -r^{n+1}$ שפתרונה $\theta(t) = -t + c_1$, $r(t) = (nt + c_2)^{-1/n}$, שהיא ספירל.

משפט 9.10 אם הראשית היא נקודה קריטית מסוג קשר (צומת) עבור המערכת הלינארית (9.13) אז היא קשר גם עבור המערכת (9.12), כלומר כל מסלול העובר די קרוב לראשית, שואף לראשית בכיוון מוגדר.
ליתר פרוט, אם הערכים העצמיים הם $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ והוקטורים העצמיים המתאימים הם $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$, אז לפחות מסלול אחד מתקרב לראשית בכל אחד מהכיוונים $\mathbf{v}_2$, $-\mathbf{v}_2$ ואינסוף מסלולים מתקרבים בכיוונים $\mathbf{v}_1$, $-\mathbf{v}_1$.

הוכחה. נניח כי המערכת הלינארית (9.13) הובאה על ידי טרנספורמציה לינארית לצורתה הקנונית $x' = \lambda_1 x$, $y' = \lambda_2 y$, וכי $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. מסלולי המערכת הם $y = c|x|^{\lambda_2/\lambda_1}$. אותה טרנספורמציה הופכת את (9.12) לצורה

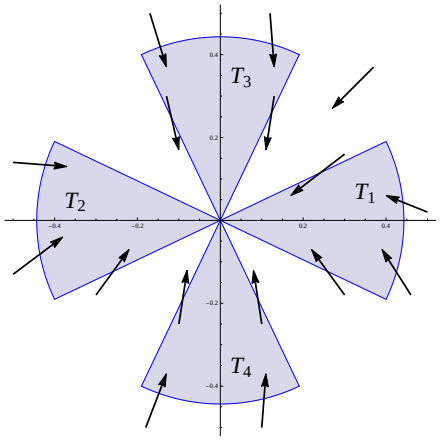
$$x' = \lambda_1 x + g_1(x,\ y), \qquad y' = \lambda_2 y + g_2(x,\ y), \qquad g_1, g_2 = o(r),$$

והוקטורים העצמיים המתאימים הם $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. במקרה זה נוכיח כי כל מסלול המתחיל בקרבת הראשית שואף ל־$(0,0)$ באחד מארבעת הכיוונים $0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$. בכיוונים $0,\ \pi$ מתקרבים לראשית אינסוף מסלולים ובכל אחד מהכיוונים $\pi/2,\ 3\pi/2$ מתקרב לפחות מסלול אחד.

לפי משפט 9.7, אם מסלול מתחיל די קרוב לראשית, אז $r(t) \to 0$. בקואורדינטות קטביות

$$r^2\theta' = y'x - x'y = (\lambda_2 - \lambda_1)xy + xg_2 - yg_1 = (\lambda_2 - \lambda_1)r^2\cos\theta\sin\theta + o(r^2),$$
$$\theta' = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\sin 2\theta + o(1), \qquad r \to 0.$$

לכל $\varepsilon > 0$ נגדיר ארבע גזרות $T_1 = \{\ |\theta| < \varepsilon\ \}, \quad T_2 = \{\ |\theta - \pi| < \varepsilon\ \}, \quad T_3 = \{\ |\theta - \pi/2| < \varepsilon\}, \quad T_4 = \{\ |\theta - 3\pi/2| < \varepsilon\}$. ראה איור 9.14.



איור 9.14: נקודה קריטית מסוג קשר

על הקרן $\theta = \varepsilon$ ועבור r די קטן, $\theta' < 0$ ועל $\theta = -\varepsilon$ מתקבל $\theta' > 0$, כי $\sin 2\varepsilon > 0$, $\lambda_2 < \lambda_1$. לכן כל מסלול המגיע לשפת T_1 נכנס לגזרה זו ואינו עוזב אותה יותר. למעשה לכל $\varepsilon > 0$ ול־r די קטן מתאים, T_1 הוא "משפך" במובן המתואר במשפט 3.22.

תופעה דומה מתרחשת גם בגזרה T_2. לעומת זאת סימן θ' על שפת הגזרות T_3 ו־T_4 מראה כי מסלול דרכן חייב לצאת מגזרות אלה.

כל מסלול המתקרב לראשית ואינו בפנים T_3 או T_4 חייב להכנס לבסוף לתוך T_1 או T_2. כי כל עוד המסלול מחוץ לארבעת הגזרות, קיים

$$|\theta'| \geq \frac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{2}\sin 2\varepsilon + o(1) \geq \frac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{4}\sin 2\varepsilon > 0$$

ולכן תוך פרק זמן סופי $\theta(t)$ חייב להכנס ל־T_1 או T_2. זה נכון לכל $\varepsilon > 0$ ולכן כל המסלולים האלה יכולים להתקרב לראשית רק באחת מארבעת הזויות $0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$.

בזה הראינו כי כל מסלול המתחיל בנקודה עם $|\theta - \pi/2| \geq \varepsilon$, $|\theta - 3\pi/2| \geq \varepsilon$ ו־r די קטן, שואף לראשית בכיוון 0 או π.

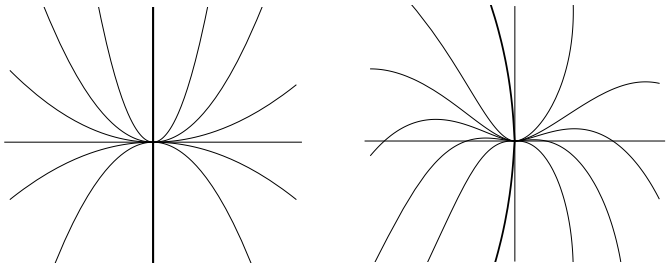
נותר להראות כי קיימים לפחות שני פתרונות המגיעים לראשית בכיוונים $\pi/2$ ו־$3\pi/2$. עבור r די קטן הגזרה T_3 מתנהגת כמו "משפך הפוך" ולפי משפט 3.23 יש בגזרה זו לפחות מסלול אחד γ ששואף לראשית. נקח עכשיו גזרה כלשהי T_3' הדומה ל־T_3 אך מתאימה לזוית ε', $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ ו־r די קטן, מתאים. המסלול γ חייב להיות לבסוף גם בפנים T_3', אחרת לפי הפיסקה הקודמת הוא היה שואף לראשית בכיוון 0 או π ולכן עוזב לבסוף גם את T_3, בנגוד להגדרתו. זה נכון לכל $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ לכן γ שואף לראשית בכיוון $\pi/2$.

נימוק דומה המופעל על T_4 מבטיח קיום מסלול המתקרב מכיוון $3\pi/2$. □

דוגמא 9.8 באיור 9.15 מתוארות המערכת

$$\begin{aligned} x' &= -x + y^2, \\ y' &= -2y + 2x^2 \end{aligned} \tag{9.17}$$

והלינאריזציה שלה $x' = -x$, $y' = -2y$. לשניהם נקודה הקריטית מסוג קשר ב־$(0,0)$.



איור 9.15: נקודה קריטית מסוג קשר של המערכת 9.17 (מימין) והלינאריזציה שלה

משפט 9.11 אם הראשית היא נקודת אוכף עבור המערכת הלינארית (9.13) אז היא אוכף גם עבור המערכת (9.12).
ליתר דיוק, אם הערכים העצמיים הם $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ והוקטורים העצמיים הם $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ בהתאמה, אז כש־$t \to +\infty$, לפחות מסלול אחד מתקרב לראשית בכל אחד מהכיוונים $\mathbf{v}_1$, $-\mathbf{v}_1$ וכל מסלול אחר העובר קרוב לראשית מתרחק ממנו. בנוסף, לפחות מסלול אחד מתקרב לראשית בכיוונים $\mathbf{v}_2$, $-\mathbf{v}_2$ כאשר $t \to -\infty$.

הוכחה. נניח כי המערכת הלינארית (9.13) הובאה על ידי טרנספורמציה לינארית לצורתה הקנונית $x' = \lambda_1 x$, $y' = \lambda_2 y$, עם $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. אותה טרנספורמציה הופכת את (9.12) לצורה

$$x' = \lambda_1 x + g_1(x,\ y), \qquad y' = \lambda_2 y + g_2(x,\ y), \qquad g_1, g_2 = o(r).$$

נוכיח כי יש לפחות מסלול אחד המתקרב לראשית בכל אחד מהכיוונים 0, π כש־$t \to +\infty$ וכל מסלול אחר העובר קרוב לראשית מתרחק ממנו.

נבחר קבוע חיובי שרירותי k שלא ישתנה לכל אורך הוכחת המשפט ונצייר את שני הקווים הישרים $y = kx$, $y = -kx$. נבחר גם $x_0 > 0$, $y_0 = kx_0$ ונצייר מלבן שקדקדיו הם $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_0, -y_0)$, $C = (-x_0, y_0)$, $D = (-x_0, -y_0)$, אלכסוניו הם הישרים $y = \pm kx$ ומרכזו יסומן ב־O.

נתבונן בהתנהגות פתרונות המערכת במלבן כאשר x_0, y_0 די קטנים. על הקטע האנכי AB קיים $x = x_0$, $|y| \le kx_0$ ולכן עבור x_0 די קטן,

$$x' = \lambda_1 x + g_1(x,\ y) = \lambda_1 x_0 + g_1(x_0,\ y) < \lambda_1 x_0/2 < 0. \tag{9.18}$$

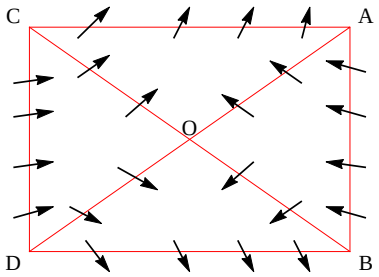
על הקטע האלכסוני OA שבו $y = kx$, $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\big(y/x\big)' &= \big(xy' - yx'\big)/x^2 = \big(x(\lambda_2 y + g_2) - y(\lambda_1 x + g_1)\big)/x^2 \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)(y/x) + \big(g_2 - (y/x)g_1\big)/x \\ &= k(\lambda_2 - \lambda_1) + \big(g_2 - kg_1\big)/x\end{aligned}$$

בנוסף, $x = r/\sqrt{k^2+1}$ ולפיכך עבור x די קטן $\big(g_2 - kg_1\big)/x \to 0$ ו־

$$\big(y/x\big)' > k(\lambda_2 - \lambda_1)/2 > 0.$$

לכן $\theta\,'(t) > 0$ על הקטע (הפתוח) OA. על הקטע האלכסוני OB בו $y = -kx$, מקבלים כי $\big(y/x\big)' < -k(\lambda_2 - \lambda_1)/2 < 0$. ראה איור 9.16.



איור 9.16: שדה כיוונים סביב נקודה קריטית מסוג אוכף

המשולש OAB יוצר "משפך הפוך", בדומה לתחום T_3 בהוכחת משפט 9.10, לכן קיים לפחות מסלול אחד שאינו עוזב את המשולש ושואף אל הראשית כאשר $t \to +\infty$. דיון זה נכון לכל קבוע חיובי k ולמשולש OAB בעל זוית O כלשהי, לכן המסלול שמצאנו מתקרב לראשית בכיוון זוית $\theta = 0$. באופן דומה במשולש OCD יש מסלול המתקרב אל הראשית בכיוון הזוית $\theta = \pi$.

נעבור למשולש OAC. על הקטע האפקי AC קיים $y = y_0$, $|x| \le y_0/k$ ולכן עבור y_0 די קטן,

$$y' = \lambda_2 y + g_2(x,\ y) = \lambda_2 y_0 + g_2(x_0,\ y) > \lambda_2\, y_0/2 > 0.$$

כל מסלול העובר בנקודה של OA או OC (הפתוח), נכנס למשולש OAC וחייב לעזוב אותו דרך AC. לכן מסלולים אלה מתרחקים מהראשית כאשר t גדל.

דרך אחרת להגיע לאותה מסקנה היא להחליף את t ב־$(-t)$, ההופך את כיוון התנועה על המסלולים. כך תפקידי המשולשים OAB ו־OAC מתחלפים. כך גם נגיע למסקנה כי לפחות מסלול אחד המתחיל בנקודה של AC שואף אל הראשת כאשר $t \to -\infty$.

נעבור להוכחת היחידות של המסלולים המתקרבים אל הראשית. יהי $x = x(t),\ y = y(t)$ מסלול שאינו עוזב את המשולש OAB ושואף אל הראשית כאשר $t \to +\infty$, שקיומו הוכח למעלה. כמו ב־(9.18), מסלול זה מקיים בקרבת הראשית

$$x'(t) = \lambda_1 x + g_1(x,\ y) < \lambda_1 x/2 < 0,$$

את $x = x(t)$ המונוטוני ניתן להפוך כ־$t = t(x)$ ולהציג את המסלול כ־$y = y(t(x))$ ואז

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\lambda_2 y + g_2(x,y)}{\lambda_1 x + g_1(x,y)}\ . \tag{9.19}$$

נניח בדרך השלילה כי יש שני מסלולים כאלה, $y = y_1(x)$ ו־$y = y_2(x)$ השואפים לראשית ואינם עוזבים את המשולש OAB, $|y_1(x)|, |y_2(x)| < kx$. בסימון

$$\begin{aligned} g_1(x,y_1) = g_{11},\quad g_1(x,y_2) = g_{12},\quad g_2(x,y_1) = g_{21},\quad g_2(x,y_2) = g_{22},\\ \frac{d}{dx}(y_1 - y_2) &= \frac{\lambda_2 y_1 + g_{21}}{\lambda_1 x + g_{11}} - \frac{\lambda_2 y_2 + g_{22}}{\lambda_1 x + g_{12}} \\ &= \frac{\lambda_2(y_1 - y_2) + (g_{21} - g_{22}) + (\lambda_2 y_2 + g_{22})}{\lambda_1 x + g_{11}} - \frac{\lambda_2 y_2 + g_{22}}{\lambda_1 x + g_{12}} \\ &= \frac{\lambda_2(y_1 - y_2) + (g_{21} - g_{22})}{\lambda_1 x + g_{11}} + \frac{(\lambda_2 y_2 + g_{22})(g_{12} - g_{11})}{(\lambda_1 x + g_{11})(\lambda_1 x + g_{12})} \end{aligned} \tag{9.20}$$

נסמן $z(x) = y_1(x) - y_2(x)$. מכיוון ששני המסלולים אינם נחתכים, $z(x) \neq 0$ ונניח כי $z(x) > 0$ עבור $0 < x \le x_0$.

נעריך את אברי (9.20). מכיוון ש־$y_1(x), y_2(x)$ מתקרבים לראשית מכיוון הזוית $\theta = 0$, קיים $y_2(x) = o(x)$. מ־$g_1, g_2 = o(r)$ נובע בפרט כי במשולש $g_1, g_2 = o(x)$.

$$\begin{aligned} g_{11} - g_{12} = g_1(x,y_1) - g_1(x,y_2) = \frac{\partial g_1(x,\xi_1)}{\partial y}\, z(x), \qquad |\xi_1| < kx,\\ g_{21} - g_{22} = g_2(x,y_1) - g_2(x,y_2) = \frac{\partial g_2(x,\xi_2)}{\partial y}\, z(x), \qquad |\xi_2| < kx. \end{aligned}$$

$\partial g_1/\partial y,\ \partial g_2/\partial y \to 0$ כאשר $x \to 0$ וכך $g_{11} - g_{12},\ g_{21} - g_{22} = o(z)$. לסיכום, (9.20) ניתן להכתב כ־

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{\lambda_2 z + o(z)}{\lambda_1 x + o(x)} + \frac{\big(\lambda_2 \cdot o(x) + o(x)\big)\cdot o(z)}{\big(\lambda_1 x + o(x)\big)\big(\lambda_1 x + o(x)\big)} \\ &= \frac{z}{x}\cdot\frac{\lambda_2 + o(1)}{\lambda_1 + o(1)} + \frac{z}{x}\cdot o(1) = \frac{z}{x}\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + o(1)\right]. \end{aligned}$$

לפי הנחותינו $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, לכן עבור $0 < x \le x_0$, x_0 די קטן, $\dfrac{dz}{dx} \le \dfrac{z}{x} \cdot \dfrac{\lambda_2}{2\lambda_1} < 0$.
נבצע אינטגרציה של $\dfrac{dz}{z} \le \dfrac{\lambda_2}{2\lambda_1}\dfrac{dx}{x}$ על $[x, x_0]$:

$$\log z(x_0) - \log z(x) \le \frac{\lambda_2}{2\lambda_1}\big(\log x_0 - \log x\big),$$

כלומר $z(x) \ge z(x_0)\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{-\lambda_2/2\lambda_1}$. מכיון ש־$\lambda_2/\lambda_1 < 0$, $z(x) \to \infty$ כש־$x \searrow 0$, סתירה. בזה הוכח כי במשולש OAB יש מסלול יחיד השואף אל הראשית כאשר $t \to +\infty$.

נסמן מסלול זה כ־L_1. כפי שראינו קודם, כל מסלול היוצא מנקודה של OAB המונח מעל L_1, חייב לעזוב את המשולש דרך הקטע OA. משנכנס ל־OAC, הוא חייב לעזוב משולש זה דרך נקודה של הקטע AC. באופן דומה, מסלול המתחיל תחת L_1 יגיע לבסוף לקטע BD. L_1 המפריד בין מסלולים המתנהגים באופן שונה, נקרא קו מפריד (separatrix).

דוגמא 9.9 למערכת

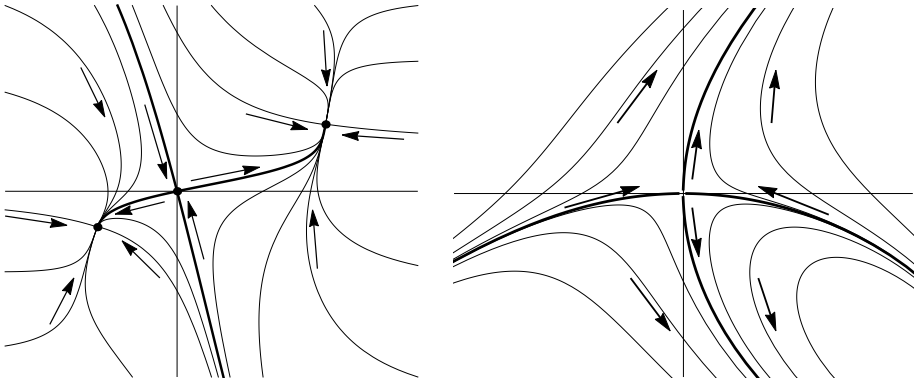
$$\begin{aligned} x' &= -x + 3y^2, \\ y' &= 2y + 3x^2 \end{aligned} \tag{9.21}$$

יש נקודת אוכף ב־ $(0,0)$ וארבעה קוים מפרידים, שניים מהם מתקרבים לנקודה הקריטית כש־$t \to +\infty$ ושניים כאשר $t \to -\infty$. ראה איור 9.17, א'.

למערכת

$$\begin{aligned} x' &= -2x + y - x^2 + x^3, \\ y' &= x - 2y \end{aligned} \tag{9.22}$$

שתי נקודות קריטית מסוג קשר ונקודת אוכף אחת. ראה איור 9.17, ב'.



איור 9.17: א. נקודת אוכף של (9.22) ב. שתי נקודות קשר ואוכף אחד של (9.21)

9.5 משפט Poincaré-Bendixson

בפעיף זה מטרתנו היא לתאר את ההתנהגות ארוכת הטווח של פתרונות ומסלולים של המערכת האוטונומית הדו־ממדית (9.2),

$$x' = f_1(x,\ y),$$
$$y' = f_2(x,\ y)$$

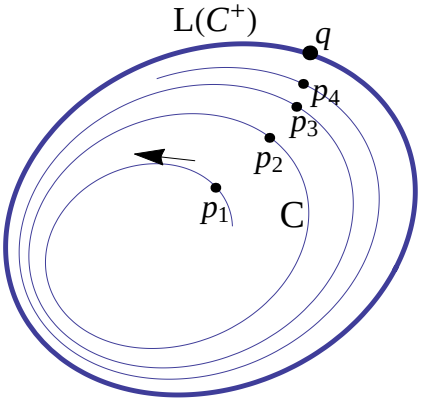
במישור (x, y). נניח כי המערכת מקיימת תנאי משפט קיום ויחידות, למשל משפט 3.9.

הצעדים הראשונים אינם ייחודיים דווקא למערכות דו־ממדיות, אלא מתאימים לממד כלשהו. יהי $\mathbf{y}(t) \in R^n$ פתרון של המערכת (9.1), $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$. אם הפתרון מוגדר עבור $t_0 \le t < \infty$, נסמן חצי מסלול (semi-orbit)

$$C^+ = \{\mathbf{y}(t) \mid t_0 \le t < \infty\}.$$

כדי להבחין בין פתרון לבין המסלול המתאים לו, נסמן את נקודות המסלול כ־$\mathbf{p}(t)$. באופן דומה מגדירים חצי מסלול שלילי $C^- = \{\mathbf{y}(t) \mid -\infty < t \le t_0\}$.

הגדרה 9.12 נקודה $\mathbf{q} \in R^n$ נקראת נקודת גבול של חצי המסלול C^+ אם קיימת סדרה $t_n \to +\infty$ כך ש־$\lim_{n\to\infty} \mathbf{p}(t_n) = \mathbf{q}$. אוסף נקודות הגבול נקרא קבוצת הגבול *(limit set)* ומסומן ב־$L(C^+)$. בספרים מסוימים הקבוצה נקראת בשם *ω-limit set*.



איור 9.18: סדרת נקודות על מסלול C השואפות אל נקודת גבול $\mathbf{q} \in L(C^+)$

נעיר כי כאשר $t \to \infty$, הפתרון $\mathbf{y}(t)$ אינו חייב להתכנס לשום נקודה ספציפית של קבוצת הגבול ו־$\lim_{t\to\infty} \mathbf{y}(t)$ לאו דווקא קיים, אלא אם כן קבוצת הגבול מורכבת מנקודה יחידה.

נמנה מספר תכונות של קבוצת גבול של מסלול.

למה 9.13 א. קבוצת הגבול $L(C^+)$ היא קבוצה סגורה.
ב. מסלול המתחיל בנקודה של $L(C^+)$ מוגדר לכל t ומוכל כולו ב־$L(C^+)$. תכונה זו נקראת האינווריאנטיות של $L(C^+)$.

הוכחה. א. כדי להוכיח כי $L(C^+)$ סגור, נראה כי כל נקודת הצטברות שלו שייכת אף היא ל־$L(C^+)$. תהי $\mathbf{q}$ נקודת הצטברות של $L(C^+)$. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N(\varepsilon)$ כך שעבור $n > N(\varepsilon)$ יש $\mathbf{q}_n \in L(C^+)$, $d(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}) < \varepsilon/2$, $d(\ ,\ )$ מסמן את המרחק בין הנקודות. מצד שני $\mathbf{q}_n$ נקודת גבול של C^+, כלומר יש t_n כך ש־$d(\mathbf{p}(t_n), \mathbf{q}_n) < \varepsilon/2$. ביחד

$$d(\mathbf{p}(t_n), \mathbf{q}) \le d(\mathbf{p}(t_n), \mathbf{q}_n) + d(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}) < \varepsilon \ ,$$

לכן $\mathbf{q}$ נקודת הצטברות גם של C^+, כלומר שייכת ל־$L(C^+)$.

ב. נסמן את הפתרון היוצר את המסלול C^+ ב־ $\mathbf{y}(t)$. תהי $\mathbf{q} \in L(C^+)$. נסמן ב־$\hat{\mathbf{y}}(t)$ את הפתרון המוגדר על ידי תנאי ההתחלה $\hat{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{q}$ וב־Γ את המסלול המתאים לו. עלינו להוכיח כי $\Gamma \subset L(C^+)$.

הנקודה $\mathbf{q} \in L(C^+)$ היא גבול של סדרה $\mathbf{p}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}(t_n) \to \mathbf{q}$, $t_n \to \infty$. גם ההזזות

$$\mathbf{y}_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}(t + t_n)$$

הן פתרונות של המערכת האוטונומית,)ולכל אחד מהם מתאים אותו מסלול C^+(והן מקיימות את תנאי ההתחלה $\mathbf{y}_n(0) = \mathbf{y}(t_n) = \mathbf{p}_n$. אך לפי משפט 3.20 פתרונות תלויים בתנאי ההתחלה באופן רציף במידה שווה בכל קטע סופי. במקרה שלנו, הודות ל־$\mathbf{p}_n \to \mathbf{q}$, מקבלים כי $\mathbf{y}_n(t) \to \hat{\mathbf{y}}(t)$, במידה שווה בכל קטע סופי. במילים אחרות, לכל t קבוע,

$$\mathbf{y}(t + t_n) \to \hat{\mathbf{y}}(t), \qquad n \to \infty.$$

זה אומר כי כל נקודה $\hat{\mathbf{y}}(t)$ של המסלול Γ היא נקודת גבול של C^+, כלומר $\Gamma \subset L(C^+)$.

למה 9.14 אם C^+ חצי מסלול המוכל בקבוצה קומפקטית $K \in R^n$ אז קבוצת הגבול $L(C^+)$ אינה ריקה והיא קשירה.

הוכחה. לסדרת נקודות $\mathbf{p}(t_n) \in C^+$, $t_n \to \infty$, המוכלת בקבוצה הקומפקטית K יש תת סדרה מתכנסת וגם גבולה מוכל ב־K. לפיכך $L(C^+)$ אינו ריק וגם הוא מוכל ב־K.

כדי להוכיח ש־$L(C^+)$ קשיר, נניח בדרך השלילה כי הוא איחוד של שתי קבוצות לא־ריקות, זרות וסגורות M ו־N. מכיון שהקבוצות חסומות וסגורות, המרחק ביניהן חיובי

$$\delta = \inf\{\ d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \mid \mathbf{p}_1 \in M,\ \mathbf{p}_2 \in N\} > 0.$$

M מורכבת מנקודות גבול של C^+ , לכן קיימים $t_n \to \infty$ כך ש־$d(\mathbf{p}(t_n), M) < \dfrac{\delta}{2}$. מאותה סיבה יש גם $t'_n \to \infty$ כך ש־$d(\mathbf{p}(t'_n), N) < \dfrac{\delta}{2}$ ולפיכך

$$d(\mathbf{p}(t'_n), M) \ge d(N, M) - d(\mathbf{p}(t'_n), N) > \frac{\delta}{2} \ .$$

אבל $d(\mathbf{p}(t), M)$ פונקציה רציפה של t, וכך קיימת סדרה $t''_n \to \infty$ כך שבדיוק $d(\mathbf{p}(t''_n), M) = \frac{\delta}{2}$. סדרת הנקודות $\mathbf{p}(t''_n)$ מוכלת ב־K ולכן יש לה תת סדרה המתכנסת לנקודה מסוימת $\mathbf{q}$. לפי צורת הבניה $\mathbf{q}$ היא נקודת גבול של C^+. אך ברור ש־$\mathbf{q}$ מקיים

$$d(\mathbf{q}, M) = \frac{\delta}{2}$$

וגם

$$d(\mathbf{q}, N) \geq d(N, M) - d(\mathbf{q}, M) = \frac{\delta}{2} \ .$$

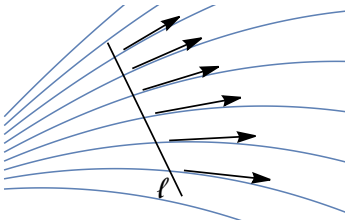
מצאנו אם כן נקודת גבול $\mathbf{q} \in L(C^+)$ שאינה שייכת לא ל־M ולא ל־N, סתירה. □

כל השיקולים עד כאן נכונים ל־R^n כלשהו. עכשיו אנו מוכנים לנסח את משפט פואנקרה־בנדיקסון[2] המתאר את קבוצת הגבול של מסלול מישורי חסום.

משפט 9.15 *(Poincaré-Bendixson)* יהי C^+ חצי מסלול חסום של המערכת (9.2) המוכל בקבוצה קומפקטית K במישור. אם $L(C^+)$ מכיל אך ורק נקודות רגילות, אז קורה אחת מן השתיים:
(i) המסלול C^+ מחזורי ו־$L(C^+) \equiv C^+$, או
(ii) $L(C^+)$ מסלול מחזורי.

סדרת הטענות הבאות תביא אותנו להוכחת משפט פואנקרה־בנדיקסון. מכשיר חשוב בהוכחת המשפט הוא המושג "קטע חותך":

הגדרה 9.16 קטע חותך *(transversal)* במישור פאזה של מערכת (9.2) הוא קטע סגור וסופי ℓ שכל נקודותיו הן נקודות רגילות של המערכת וכוונו בכל נקודותיו שונה מזה של שדה הכיוונים (f_1, f_2).



איור 9.19: ℓ שדה כיוונים וקטע חותך

בלמה הבאה נסכם את התכונות הנחוצות לנו של קטעים חותכים.

[2] Henri Poincaré, 1854-1912, Ivar Bendixson, 1861-1935

למה 9.17 א. זרך כל נקודה רגילה אפשר להעביר קטע חותך ואפשר לבחור אותו בכל כיוון השונה מזה של שדה הכיוונים (f_1, f_2). כל מסלול שפוגש את הקטע החותך, חוצה אותו באותו כוון.

ב. אם p_0 נקודה פנימית של קטע חותך ℓ אז לכל $\varepsilon > 0$ יש עגול סביב p_0 כך שכל מסלול העובר בעגול ברגע $t = 0$ חותך את ℓ תוך זמן $|t| < \varepsilon$.

ג. קטע מסלול סופי וסגור $\mathbf{p}(t)$, $a \le t \le b$, פוגש בקטע חותך ℓ רק במספר סופי של נקודות.

הוכחה. א. תהי p_0 נקודה רגילה, $(f_1, f_2)(p_0) \neq (0,0)$. נבחר ישר כלשהו דרך p_0 שכוונו שונה מכיוון $(f_1, f_2)(p_0)$. הודות לרציפות, כיוון הישר יהיה שונה מכיוון השדה בסביבה קטנה של p_0 וכך נקבע קטע חותך ℓ. מכיוון ששדה הכוונים $(f_1, f_2)(p)$ רציף ואינו משיק ל־ℓ באף נקודה, הוא חוצה את ℓ בכל נקודה באותו כוון.

ב. בלי הגבלת כלליות נוכל להניח)על ידי סיבוב מערכת הצירים והזזתו(כי הקטע החותך ℓ מונח על ציר y ו־$x' = f_1(x,y) \neq 0$ על כל ℓ. תהי p_0 נקודה פנימית של ℓ, ו־$|f_1(p_0)| = k > 0$. הודות לרציפות F_1, יש סביבה של p_0 בה $|x'| = |f_1(x,y)| > k/2$. אם נקטין סביבה זו לעגול ברדיוס $\frac{k}{2}\varepsilon$ אז כל מסלול העובר ברגע מסוים בעגול זה יחצה את ℓ תוך זמן t, $|t| < \varepsilon$.

ג. אם קשת $\mathbf{p}(t)$ חותכת את ℓ בסדרת נקודות אינסופית $\mathbf{p}(t_n) = (x(t_n), y(t_n))$, $a \le t_n \le b$, אז לסדרה t_n יש תת־סדרה מתכנסת (שתסומן אף היא כ־t_n), $t_n \to \hat{t} \in [a,b]$ ו־ $\mathbf{p}(t_n) \to \mathbf{q} = (x(\hat{t}), y(\hat{t})) \in \ell$. המנה $\dfrac{y(t_n) - y(\hat{t})}{x(t_n) - x(\hat{t})}$ היא שיפוע ℓ אולם מצד שני גבולו הוא גם

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(y(t_n) - y(\hat{t}))/(t_n - \hat{t})}{(x(t_n) - x(\hat{t}))/(t_n - \hat{t})} = \frac{y'(\hat{t})}{x'(\hat{t})} = \frac{f_2}{f_1},$$

שיפוע השדה ב־$\mathbf{q}$, בסתירה להגדרת קטע חותך. □

הנה תכונות נוספות של קטע חותך העובר דרך נקודת גבול של מסלול.

למה 9.18 תהי $\mathbf{q}$ נקודה רגילה בקבוצת הגבול $L(C^+)$ ו־ℓ קטע חותך דרך $\mathbf{q}$. אז קיימת סדרה מונוטונית $t_n \to \infty$ כך ש־$\mathbf{p}(t_n)$ הן בדיוק נקודות החיתוך של C^+ עם ℓ.

א. אם $\mathbf{p}(t_1) = \mathbf{p}(t_2)$ אז $\mathbf{p}(t_n) = \mathbf{p}$ לכל n והמסלול C^+ מחזורי.

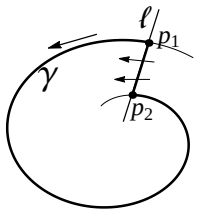
ב. אם $\mathbf{p}(t_1) \neq \mathbf{p}(t_2)$ אז כל נקודות החיתוך $\mathbf{p}(t_n)$ שונות זו מזו ועל הקטע ℓ הן מתכנסות באופן מונוטוני אל הנקודה $\mathbf{q}$.

הוכחה. מכיוון ש־$\mathbf{q}$ נקודת גבול של C^+, בכל סביבה שלה יש אינסוף נקודות $\mathbf{p}(t)$ של C^+. לפי למה 9.17, סעיף ב', עם $\varepsilon = 1$, יש סביב $\mathbf{q}$ עגול S כך שכל מסלול העובר בו חותך את ℓ תוך פרק זמן $|t| < 1$. נסמן את נקודות החיתוך ב־$\mathbf{p}(t_n)$.

א. תהיינה $\mathbf{p}(t_1), \mathbf{p}(t_2)$, $t_1 < t_2$, שתי נקודות חיתוך עוקבות של המסלול עם הקטע החותך ℓ. אם $\mathbf{p}(t_1) = \mathbf{p}(t_2)$ אז הודות ליחידות, הפתרון מחזורי עם מחזור $t_2 - t_1$ והמסלול C^+

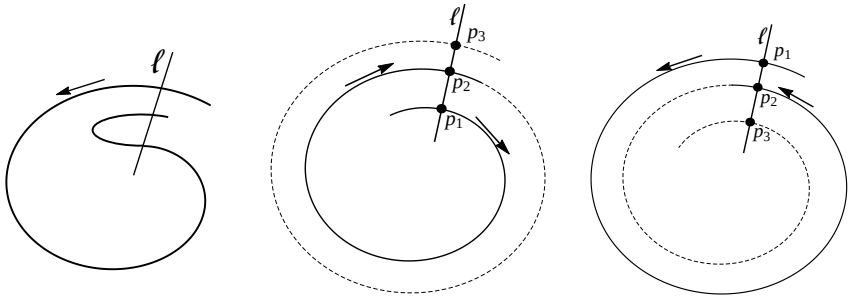
סגור. הודות למחזוריות $\mathbf{p}(t_n) = \mathbf{p}(t_1) = \mathbf{q}$ לכל n. במקרה זה $L(C^+) \equiv C^+$ וזהו מקרה א' במשפט פואנקרה־בנדיקסון.

ב. נבדוק עכשיו את האפשרות $\mathbf{p}(t_1) \neq \mathbf{p}(t_2)$. העקום γ המורכב מקשת המסלול C^+ מ־$\mathbf{p}(t_1)$ אל $\mathbf{p}(t_2)$ בתוספת חלק הקטע החותך ℓ ביניהם הוא עקום ז'ורדן)עקום מישורי סגור שאינו חותך את עצמו(ועל פי משפט ז'ורדן, הוא מחלק את המישור לשתי קבוצות זרות, פנים וחוץ. ראה איור 9.20. השימוש במשפט ז'ורדן מגביל את מסקנותינו למישור דו־ממדי בלבד.



איור 9.20: מסלול וקטע חותך יוצרים עקום ז'ורדן

נסתכל בהמשך המסלול שלנו מעבר ל־t_2. נניח למשל כי עבור $t > t_2$ וקרוב ל־t_2 הנקודה $\mathbf{p}(t)$ מונחת בפנים של γ, כמו באיור 9.21, ימין. (המקרה בו הנקודה $\mathbf{p}(t)$, $t > t_2$ מונחת מחוץ ל־γ, מתואר באיור 9.21, מרכז.) המשך המסלול אינו יכול לחתוך את עצמו בגלל משפט הקיום והיחידות, בפרט לא את הקשת מ־$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}(t_1)$ אל $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}(t_2)$. המשך המסלול גם אינו חותך את הקטע של ℓ בין $\mathbf{p}(t_2)$ ל־$\mathbf{p}(t_1)$, כי מסלול יכול לחצות את ℓ רק בכיוון שנקבע בלמה 9.17, סעיף א. לכן המסלול שלנו נשאר בפנים γ לכל $t > t_2$ ו־γ משמש "מלכודת" להמשכו. השווה גם עם איור 9.21, שמאל.



איור 9.21: מסלול וקטע חותך מצב בלתי אפשרי

אם המסלול נחתך פעם נוספת עם ℓ, זה יקרה בנקודה $\mathbf{p}(t_3)$ בפנים γ עם $t_1 < t_2 < t_3$. לכן נקודות החיתוך מונחות על הקטע ℓ בסדר זהה לסדרן על המסלול C^+,

$$\mathbf{p}(t_1) \to \mathbf{p}(t_2) \to \mathbf{p}(t_3).$$

תכונה זו נקראת תכונת המונוטוניות של נקודות החיתוך.

אותו נימוק חל על כל סדרת נקודות החיתוך $\mathbf{p}(t_n)$ של C^+ עם ℓ: אם $t_1 < t_2 < \cdots$ אז כל הנקודות $\mathbf{p}(t_n)$ מסודרות גם על ℓ על פי הסדר $\mathbf{p}(t_1) \to \mathbf{p}(t_2) \to \cdots \to \mathbf{p}$. □

לאחר הכנות אלה על קטעים חותכים, ניגש להוכחת משפט פואנקרה־בנדיקסון.

למה 9.19 תהי $\mathbf{p}$ נקודה רגילה בקבוצת הגבול $L(C^+)$ ו־ℓ קטע חותך דרך $\mathbf{p}$. אז ℓ פוגש את $L(C^+)$ אך ורק בנקודה אחת, $\mathbf{p}$.

הוכחה. אם הקטע ℓ פוגש את הקבוצה $L(C^+)$ בשתי נקודות שונות $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ אז קיימות שתי סדרות מונוטוניות של נקודות חיתוך של C^+ עם ℓ המתכנסות לשני הגבולות שונים, $\mathbf{p}(t_n) \to \mathbf{p}$, $\mathbf{q}(\tilde{t}_n) \to \mathbf{q}$. מתוך סדרות הזמנים $t_n, \tilde{t}_n$ אפשר לבחור שלשה ערכים $t_i < \tilde{t}_j < t_k$ כך שנקודות החיתוך $\mathbf{p}(t_i), \mathbf{q}(\tilde{t}_j), \mathbf{p}(t_k)$ אינן מסודרות על ℓ באופן מונוטוני, בסתירה ללמה 9.18, ב'. □

שתי הטענות הבאות תשלמנה את הוכחת משפט פואנקרה־בנדיקסון.

טענה 9.20 אם קבוצת הגבול $L(C^+)$ חסומה ומכילה רק נקודות רגילות אז פתרון המערכת העובר דרך נקודה של $L(C^+)$ הוא מחזורי.

הוכחה. נקח פתרון המתחיל בנקודה $\mathbf{p} \in L(C^+)$ ונסמן את המסלול המתאים לו ב־Γ. על פי למה 9.13, ב', פתרון כזה מוגדר לכל t ומסלולו Γ מוכל כולו ב־$L(C^+)$. מכיוון ש־$L(C^+)$ קבוצה סגורה וחסומה, גם כל נקודת גבול של Γ מוכלת ב־$L(C^+)$, כלומר $L(\Gamma^+) \subset L(C^+)$. מכיוון ש־$L(C^+)$ מכילה רק נקודות רגילות, כך גם $L(\Gamma^+)$. דרך נקודה רגילה $\mathbf{q} \in L(\Gamma^+) \subset L(C^+)$ נעביר קטע חותך ℓ. לפי למה 9.19, $L(C^+)$ יכול לחצות את ℓ רק בנקודה אחת. בפרט גם המסלול $\Gamma \subset L(C^+)$, חוצה את ℓ רק בנקודה אחת והיא $\mathbf{q}$. לפי למה 9.18 זה גורר כי Γ מסלול מחזורי, כפי שנטען. □

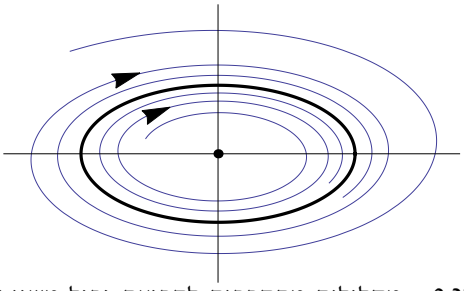
למה 9.21 אם $L(C^+)$ מכיל מסלול מחזורי Γ, אז $L(C^+) \equiv \Gamma$.

הוכחה. אם $L(C^+) \neq \Gamma$ אז ניתן להציג את $L(C^+)$ כאחוד של קבוצות לא ריקות, Γ ו־$L(C^+) \setminus \Gamma$. בלמה 9.14 הוכח ש־$L(C^+)$ קשיר, לכן $L(C^+) \setminus \Gamma$ אינו יכול להיות סגור. מכאן נובע כי קיימת נקודה $\mathbf{q} \in \Gamma$ שהיא גבול של סדרת נקודות $\mathbf{q}_n \in L(C^+) \setminus \Gamma$. נעביר דרך $\mathbf{q}$ קטע חותך ℓ. בסביבה קטנה של $\mathbf{q}$, המסלולים דרך $\mathbf{q}_n$ חותכים את ℓ. אולם כל המסלולים האלה נמצאים בתוך $L(C^+)$ ו־ℓ פוגש את $L(C^+)$ ביותר מנקודה אחת, סתירה.

סתירה זו מוכיחה כי $L(C^+)$ זהה למסלול המחזורי Γ. טענה זו משלימה את הוכחת משפט פואנקרה־בנדיקסון. □

הערה. הוכחת משפט פואנקרה־בנדיקסון מראה כי אם המסלול C עצמו אינו מחזורי אז C^+ מתקרב אל מסלול הגבול המחזורי שלו כספירל, מבחוץ או מבפנים. ראה המערכת

$$\begin{aligned} x' &= 4y + (1 - x^2 - 4y^2)x, \\ y' &= -x + (1 - x^2 - 4y^2)y \end{aligned}$$



איור 9.22: מסלולים מתקרבים לקבוצת גבול משני צדדיו

ומסלוליו באיור 9.22.

הטענה הבאה מכלילה את משפט פואנקרה־בנדיקסון למקרה בו $L(C^+)$ מכיל מספר סופי של נקודות קריטיות.

משפט 9.22 יהי C^+ חצי מסלול המוכל בקבוצה קומפקטית K במישור ומכיל רק מספר סופי של נקודות קריטיות. אז קורה אחת מן הבאות:

(i) $L(C^+)$ מורכב מנקודה יחידה שהיא נקודה קריטית של המערכת, ו־C^+ מתקרב לנקודה זו כאשר $t \to +\infty$, או

(ii) $L(C^+)$ מחזורי, או

(iii) $L(C^+)$ מורכב ממספר סופי של נקודות קריטיות ומקבוצת מסלולים שכל אחד מהם שואף לאחד מנקודות קריטיות אלה כאשר $t \to \pm\infty$.

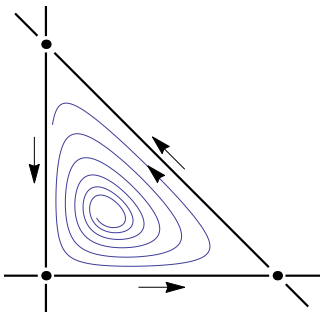
הוכחה. אם $L(C^+)$ אינו מכיל אף נקודה רגילה אז, בהיותו קשיר, הוא מכיל רק נקודה קריטית אחת. ברור כי C^+ מתקרב לנקודה זו כאשר $t \to +\infty$.

לפי תכונת האינווריינטיות (למה 9.13), מסלול העובר דרך נקודה רגילה של $L(C^+)$ מוכל כולו ב־$L(C^+)$. לכן $L(C^+)$ הוא איחוד של נקודות קריטיות ומסלולים. יהי Γ מסלול המוכל ב־$L(C^+)$. אם נקודת גבול של Γ היא נקודה רגילה, אז כמו בהוכחת 9.18 מתקבל כי Γ מחזורי ו־ $\Gamma \equiv L(C^+)$.

אחרת, כל נקודת גבול של המסלול Γ כש־$t \to \infty$ היא נקודה קריטית יחידה. אותה מסקנה נובעת, כמובן, כאשר $t \to -\infty$. ייתכן כי נקודות הגבול כש־$t \to \pm\infty$ תהיינה שוות.

כאשר מסלול מתקרב אל אותה נקודת גבול עבור $t \to \infty$ וגם עבור $t \to -\infty$, המסלול נקרא הומוקליני (homoclinic). ראה איור 9.24. כאשר מסלול מתקרב אל שתי נקודות גבול שונות עבור $t \to \pm\infty$, המסלול נקרא הטרוקליני (heteroclinic) (איור 9.23). □

נדגים קבוצות גבול אפשריות שונות. באיור 9.11 קבוצת הגבול היא נקודה קריטית ובאיור 9.22 מסלולים ספיראליים מתכנסים לגבול שהוא מסלול מחזורי. באיור 9.23 מוצגת קבוצת גבול המורכבת מאחוד של נקודות קריטיות ומסלולים הטרוקליניים המקשרים ביניהן. במערכת (9.23) ואיור 9.24 קבוצת הגבול מורכבת מנקודה קריטית ושני מסלולים הומוקליניים.

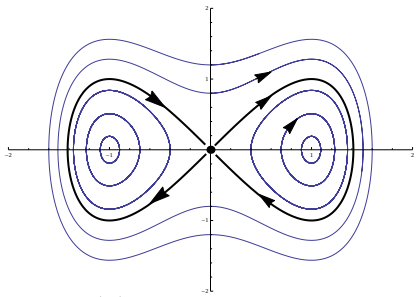


איור 9.23: קבוצת הגבול של המערכת (9.5): צלעות המשולש ושלושת קדקדיו

דוגמא 9.10 הראה כי למערכת

$$\begin{aligned} x' &= 2y, \\ y' &= 4x - 4x^3. \end{aligned}$$

פתרון כללי $y^2 - 2x^2 + x^4 = C$. בפרט העקום $y^2 - 2x^2 + x^4 = 0$ מורכב מנקודה קריטית ושני מסלולים הומוקליניים. גם מערכת זו היא מטיפוס דוגמא (9.4). ראה איור 9.24.



איור 9.24: נקודה קריטית ושני מסלולים הומוקליניים

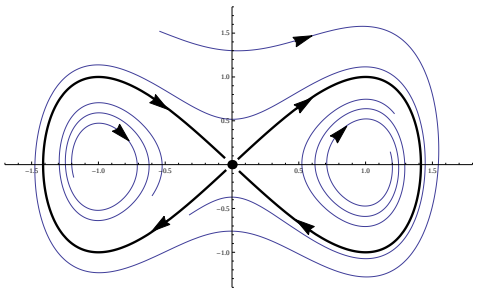
עכשיו נתבונן במערכת

$$\begin{aligned} x' &= 2y + m(y^2 - 2x^2 + x^4)(4x - 4x^3), \\ y' &= 4x - 4x^3 - m(y^2 - 2x^2 + x^4)2y. \end{aligned} \tag{9.23}$$

בדוק באופן ישיר כי העקום $y^2 - 2x^2 + x^4 = 0$ מהווה פתרון גם למערכת זו. אמת כי

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(y^2 - 2x^2 + x^4\big) &= 2yy' + (-4x + 4x^3)x' \\ &= -4m\big(y^2 - 2x^2 + x^4\big)\big(y^2 + 4x^2(1 - x^2)^2\big) \end{aligned}$$

ולפיכך עבור $m > 0$, מחוץ ל"לולאות" ההומוקליניות מתקיים $y^2 - 2x^2 + x^4 > 0$ ו- $\big(y^2 - 2x^2 + x^4\big)' < 0$, ולהפך בתוך הלולאות. הסק כי המסלולים מתכנסים לקבוצת הגבול המורכבת מנקודה קריטית ושני מסלולים הומוקליניים. ראה איור 9.25. □



איור 9.25: מסלולים וקבוצת גבול של מערכת 9.23 עבור $m > 0$

משפט 9.23)הקריטריון השלילי של בנדיקסון(אם $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}$ בעל סימן קבוע בתחום פשוט קשר במישור, אז למערכת (9.2) אין שום מסלול מחזורי המוכל בתחום זה.

הוכחה. אם למערכת מסלול סגור C המתאים לפתרון $(x(t), y(t))$, אז לפי משפט גרין

$$\oint_C -f_2\,dx + f_1\,dy = \iint_{C \text{ פנים}} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) dxdy \neq 0.$$

אך מצד שני,

$$\oint_C -f_2\,dx + f_1\,dy = \int_C (-f_2 x' + f_1 y')\,dt = \int_C (-f_2 f_1 + f_1 f_2)\,dt = 0,$$

סתירה. □

קריטריון בנדיקסון הוכלל על ידי H. Dulac: אם קיימת פונקציה $\varphi(x, y)$ כך ש־ $\dfrac{\partial(\varphi f_1)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\varphi f_2)}{\partial y}$ בעל סימן קבוע בתחום פשוט קשר, אז למערכת (9.2) אין מסלול מחזורי בתחום. הפעם נשתמש בזהות

$$\oint_C \varphi(-f_2\,dx + f_1\,dy) = \iint \Big((\varphi f_1)_x + (\varphi f_2)_y\Big) dxdy.$$

9.6 משוואת Liénard

המשוואה $x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0$, $\mu > 0$, הוצעה על ידי הפיזיקאי ב. ואן דר פול[3] לתאור מעגלים חשמליים המכילים שפופרת ואקום (טריאודה). הוא גילה כי למשוואה לא־לינארית זו יש פתרון מחזורי יציב.

[3] Balthasar van der Pol, 1889-1959

משוואת ואן דר פול הוכללה על ידי A. Liénard[4] למשוואות מהצורה

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \tag{9.24}$$

בה $g(x)$ פונקציה איזוגית ו־$f(x)$ פונקציה זוגית. על ידי ההצבה $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ המשוואה תכתב כ־

$$\frac{d}{dt}\big(x' + F(x)\big) = -g(x).$$

ההגדרה $y := x' + F(x)$ מתרגמת את 9.24 למערכת הדו־ממדית

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - F(x), \\ \frac{dy}{dt} &= -g(x). \end{aligned} \tag{9.25}$$

משפט 9.24 נניח את ההנחות הבאות:

1. $f(x)$ רציף, זוגי לכל x.
2. $F(x) < 0$ עבור $0 < x < a$; $F(x) > 0$ ועולה עבור $a < x < \infty$; $F(x) \to \infty$ כאשר $x \to +\infty$. (כמובן ש־$F(x)$ איזוגי לכל x).
3. $g(x)$ רציף, איזוגי לכל x ומקיים תנאי ליפשיץ בכל קטע סופי; $g(x) > 0$ לכל $0 < x$.

אז למערכת (9.25) יש פתרון מחזורי יחיד והוא יציב באופן אסימפטוטי.

הוכחה. לפי הנחותינו המערכת מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות. מכיון ש־$g(x) \neq 0$ לכל $x \neq 0$, $(0,0)$ היא הנקודה הקריטית היחידה של המערכת. שדה הכיוונים של המערכת מתואר באופן סכמטי באיור 9.26.

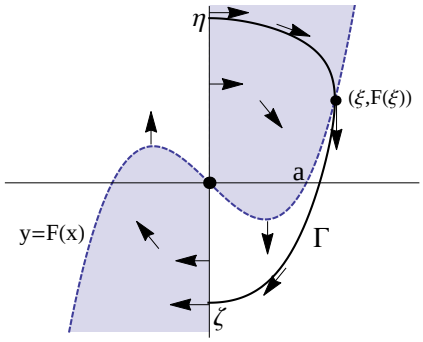
דרך הנקודה $(0,\eta)$, $\eta > 0$, נעביר מסלול של המערכת. לפי הנחותינו $x'(t) > 0$, $y'(t) < 0$ בתחום $\{x > 0,\ y > F(x)\}$ (הצבוע באיור 9.26), עד לפגישת המסלול עם העקום $y = F(x)$, בנקודה שתסומן $(\xi, F(\xi))$. מכאן המסלול עובר אל התחום $\{x > 0,\ y < F(x)\}$, שם $x'(t) < 0$, $y'(t) < 0$, עד לפגישתו בציר y השלילי, נאמר בנקודה $(0,\zeta)$, $\zeta < 0$. מכאן המסלול עובר לחצי המישור השמאלי. את קטע המסלול מ־η אל ζ נסמן ב־Γ. לנקודות Γ קיים $\xi \le x \le 0$, $\eta \le y \le \zeta$.

נסתכל על הנקודות η, ζ כפונקציות של ξ, $\eta(\xi)$ ו־$\zeta(\xi)$. מכיון שמסלולים אינם נחתכים, $\eta(\xi)$ היא פונקציה עולה ו־$\zeta(\xi)$ פונקציה יורדת של ξ והמסלול Γ נקבע באופן חד ערכי. המערכת (9.25) איזוגית, לפיכך אם $(x(t), y(t))$ פתרון, כן גם $(-x(t), -y(t))$. על כן מסלול Γ נסגר אם ורק אם $\zeta(\xi) = -\eta(\xi)$.

נגדיר $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ ואת "פונקציית האנרגיה" $H(x,y) = y^2/2 + G(x)$. בסימונים אלה התנאי $\zeta(\xi) = -\eta(\xi)$ שקול ל־

$$\frac{1}{2}\Big(\zeta^2(\xi) - \eta^2(\xi)\Big) = H(0,\zeta(\xi)) - H(0,\eta(\xi)) = 0$$

[4] Alfred-Marie Liénard, 1869-1958



איור 9.26: שדה כיוונים למשוואת ליאנרד וקטע של מסלול

נסמן

$$\phi(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Gamma dH = H(0,\zeta) - H(0,\eta).$$

אז התנאי המבוקש הוא $\phi(\xi) = 0$. מכאן והלאה מטרתנו היא להוכיח כי קיים ξ אחד ויחיד שעבורו $\phi(\xi)$ מתאפס. לשם זה נראה כי אם $0 \le \xi \le a$, אז $\phi(\xi)$ חיובי ואילו עבור $a < \xi$, $\phi(\xi)$ מונוטוני יורד ושואף ל־$-\infty$.

לאורך מסלול של פתרון

$$\frac{dH}{dt} = y\frac{dy}{dt} + g(x)\frac{dx}{dt} = y\big(-g(x)\big) + g(x)\big(y - F(x)\big) = -g(x)F(x).$$

לכן

$$\phi(\xi) = \int_\Gamma dH = \int \big(-g(x)F(x)\big)\,dt. \tag{9.26}$$

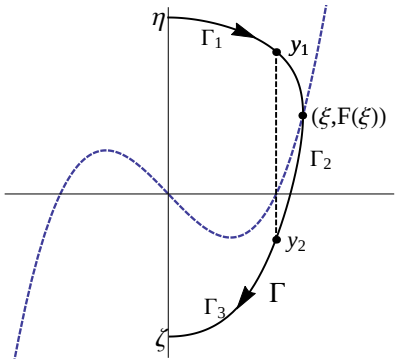
אם $a \le \xi$ אז כל המסלול Γ מונח בפס $0 \le x \le a$ ונוח לחשב את $\phi(\xi)$ על ידי פרמטריזציה בעזרת המשתנה y,

$$\phi(\xi) = \int \big(-g(x)F(x)\big)\,\frac{dt}{dy}\,dy = \int_\eta^\zeta F(x)\,dy.$$

בפס $0 < x < a$ מתקיים $F(x) < 0$ וכמובן $\zeta < \eta$, ולכן $\phi(\xi) > 0$.

אם $a < \xi$ אז חלק מהמסלול Γ מונח מימין ל־$x = a$. נפצל את Γ לשלושה תת קטעים $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Γ_1 הוא החלק מהנקודה $(0,\eta)$ עד הישר $x = a$; החלק שמימין ל־$x = a$ יסומן כ־ Γ_2 ; והחלק מהישר $x = a$ ועד $(0,\zeta)$ ייקרא Γ_3. ראה איור 9.27. אז

$$\phi(\xi) = \int_\Gamma dH = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} dH.$$



איור 9.27: Γ_1, Γ_2, Γ_3 וחלקיו Γ קטע המסלול

על Γ_1 נוח לבחור בפרמטריזציה של העקום בעזרת המשתנה x,

$$\int_{\Gamma_1} dH = \int \big(-g(x)F(x)\big)\frac{dt}{dx}\,dx = \int_0^a \frac{-g(x)F(x)}{y-F(x)}\,dx\ .$$

כאן $-g(x)F(x) > 0$, $y - F(x) > 0$ והאינטגרל חיובי. כאשר ξ גדל, הטווח $0 \le x \le a$ נשאר ללא שינוי אך הקשת Γ_1 מתרוממת ו־y גדל. לכן $\int_{\Gamma_1} dH$ יורד באופן מונוטוני עם ξ.

באופן דומה גם האינטגרל $\int_{\Gamma_3} dH$ חיובי ויורד באופן מונוטוני עם ξ , כי כאן $y - F(x) < 0$ ו־

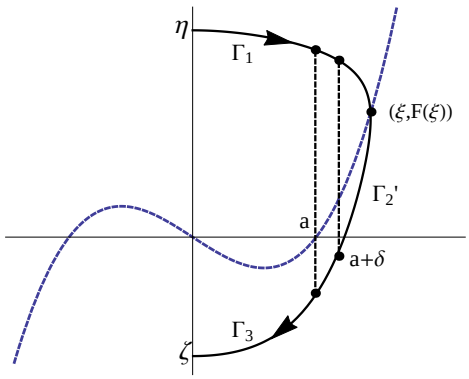
$$\int_{\Gamma_3} dH = \int_a^0 \frac{-g(x)F(x)}{y-F(x)}\,dx = \int_0^a \left|\frac{-g(x)F(x)}{y-F(x)}\right| dx > 0.$$

על המקטע Γ_2 נוח להשתמש במשתנה y לפרמטריזציה. כאשר $y_1 > 0 > y_2$ מציינים את קצוות המקטע Γ_2,

$$\int_{\Gamma_2} dH = \int_{y_1}^{y_2} F(x)\,dy = -\int_{y_2}^{y_1} F(x)\,dy < 0,$$

כי $F(x) < 0$ עבור $x > a$. כש־ξ גדל, כל מקטע המסלול Γ_2 נע ימינה. ערכי x המתאימים ל־$y \in [y_2, y_1]$ גדלים, וערכי $F(x)$ המתאימים חיוביים וגדלים. עם תזוזת Γ_2 ימינה אף הקטע $[y_2, y_1]$ גדל. אי לכך $\int_{\Gamma_2} dH$ נעשה שלילי יותר ו־$\phi(\xi)$ פונקציה מונוטונית יורדת של ξ.

נותר להראות כי $\phi(\xi) \to -\infty$ כש־$\xi \to \infty$. כפי שראינו למעלה, $\int_{\Gamma_1} dH$ ו־$\int_{\Gamma_3} dH$ יורדים ועל כן חסומים מלמעלה. נבחר קבוע חיובי δ קטן ונחלק את Γ_2 לקטע המסלול Γ_2 המונח ימינה ל־$x = a + \delta$ וליתרות הקשת $\Gamma_2 \setminus \Gamma_2'$ המונחות ברצועה $a \le x \le a + \delta$. ראה איור 9.28.



איור 9.28: $\phi(\xi)$ חישוב

תרומת האינטגרל $\int_{\Gamma_2 \setminus \Gamma_2'} dH$ ל־$\phi(\xi)$ היא שלילית, ובפרט חסומה מלמעלה. כי בחלקו העליון של $\Gamma_2 \setminus \Gamma_2'$

$$\int dH = \int_a^{a+\delta} \frac{-g(x)F(x)}{y - F(x)}\, dx < 0,$$

ובאופן דומה בחלק התחתון.

נעריך את האינטגרל $\int_{\Gamma_2'} dH = -\int F(x)\, dy$. על קשת זו $a + \delta \le x \le \xi$, קיים $F(x) \ge F(a+\delta)$ ותחום האינטגרציה מכיל את הקטע $0 \le y \le F(\xi)$. לכן

$$\int_{\Gamma_2'} dH = \int_{\Gamma_2'} F(x)\, dy < F(a+\delta) \int_{F(\xi)}^{0} dy = -F(a+\delta)F(\xi) \to -\infty$$

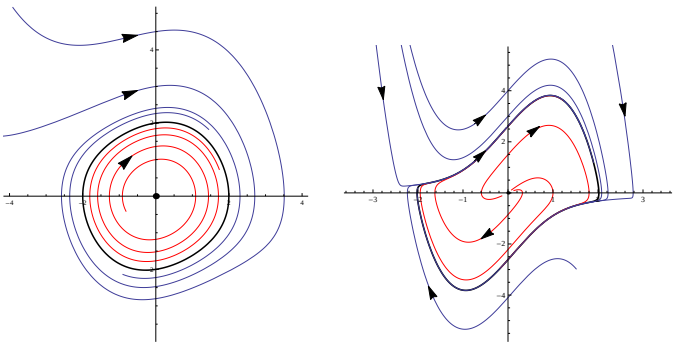
בזה הוכח כי $\phi(\xi)$ יורד באופן מונוטוני מערכים חיוביים אל $-\infty$ ולכן הוא מתאפס בדיוק פעם אחת. □

נחזור אל משוואת ואן דר פול, $x'' + \mu(x^2-1)x' + x = 0$, אשר מקיימת את הנחות משפט ליאנרד ומסקנותיו. עבור $\mu = 0$ זהו האוסצילטור ההרמוני $x'' + x = 0$ שכל פתרונותיו מחזוריים. כש־$\mu > 0$ המחובר הנוסף $\mu(x^2-1)x'$ מאט את תנודות המערכת עבור $x^2 > 1$ ומגביר אותם עבור $x^2 < 1$.

בניגוד למשוואת ליאנרד, נפעיל על המשוואה למערכת את ההצבה הפשוטה $y = x'$ ונקבל

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -x - \mu(x^2-1)y\ . \end{aligned} \tag{9.27}$$

באיור 9.29 מודגמים באופן נומרי פתרונות משוואת ואן דר פול עבור ערך חיובי, קטן של μ ועבור ערך גדול שלו.



איור 9.29: משוואת ואן דר פול עבור $\mu = 2$ (מימין) ו־$\mu = 0.2$

9.7 אינדקס

יהי $\mathbf{f}(x,y) = \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big)$ שדה וקטורי דו־ממדי ו־γ עקום ז'ורדן שאינו עובר דרך אף נקודה קריטית של השדה. תהי θ הזוית שיוצר השדה $\mathbf{f}(x,y)$ עם כיוון קבוע, למשל כיוון ציר x. זוית זו היא משתנה באופן רציף כשהנקודה (x,y) נעה לאורך γ. נבחר על העקום γ נקודה $p_1 = (x,y)$ ונסמן את זוית השדה שם ב־θ_1. כאשר הנקודה (x,y) מקיפה את העקום γ בכיוון השעון וחוזרת לנקודת ההתחלה, θ מקבל ערך θ_2 אשר יכול להיות שונה מ־θ_1, כך שהשינוי הכללי $\theta_2 - \theta_1$ הוא כפולה שלמה של 2π. המספר

$$I_{\mathbf{f}}(\gamma) = (\theta_2 - \theta_1)/2\pi$$

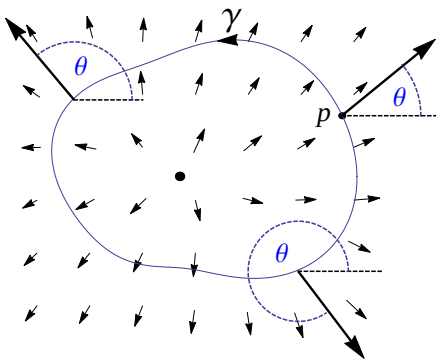
נקרא האינדקס של γ ביחס לשדה $\mathbf{f}$ והוא שלם חיובי, שלילי או אפס. ראה איור 9.30.

מכיון ש־$\theta = \arctan(f_2/f_1)$, הרי

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{f}}(\gamma) &= \frac{1}{2\pi}\int_\gamma d\left(\arctan\frac{f_2}{f_1}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{f_1\,df_2 - f_2\,df_1}{f_1^2+f_2^2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{f_1 f_{2,x} - f_2 f_{1,x}}{f_1^2+f_2^2}\,dx + \frac{f_1 f_{2,y} - f_2 f_{1,y}}{f_1^2+f_2^2}\,dy. \end{aligned} \tag{9.28}$$

משפט 9.25 אם אין אף נקודה קריטית של השדה $\mathbf{f}$ על עקום ז'ורדן γ או בפנימו אז $I_{\mathbf{f}}(\gamma) = 0$.

הוכחה. ההוכחה דומה לזה של משפט Cauchy בתורת הפונקציות האנליטיות. נחתוך את העקום γ ואת פנימו על ידי רשת קווים המקבילים לצירים. בצורה זו יצרנו אוסף קווי ז'ורדן

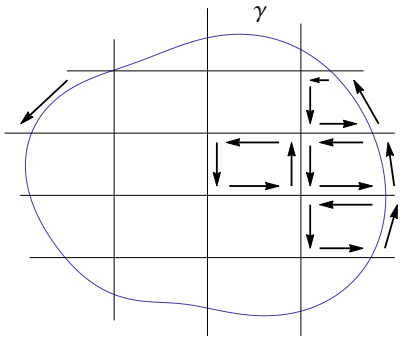


איור 9.30: שדה וקטורי ושינוי כוונו לאורך עקום ז'ורדן

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ קטנים יותר - חלקם מלבנים וחלקם בנויים מקטעי γ ומקטעי ישרים. ראה איור 9.31. כשעוברים על עקומים אלה בכיוון השעון, מתקבל

$$I_{\mathbf{f}}(\gamma) = I_{\mathbf{f}}(\gamma_1) + \cdots + I_{\mathbf{f}}(\gamma_n) \tag{9.29}$$

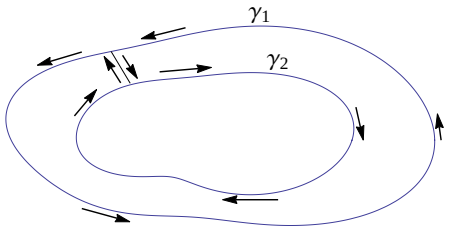
כי על כל קטע פנימי אנו עוברים פעמיים בכיוונים הפוכים ושינויי זוית השדה עליהם מבטלים זה את זה. השדה $\mathbf{f}$ רציף לכן נעדן את החלוקה כך שקוטר כל γ_i יהיה כה קטן שהשינוי בזוית השדה על γ_i ובפנימו יהיה קטן מ־2π. במצב זה חייב להיות $I_{\mathbf{f}}(\gamma_i) = 0$ והודות ל־(9.29) מתקבל $I_{\mathbf{f}}(\gamma) = 0$. □



איור 9.31: חלוקה לעקומי ז'ורדן קטנים

משפט 9.26 אם עקום ז'ורדן γ_2 מוכח בפנים של עקום ז'ורדן γ_1 ואם אין אף נקודה קריטית על העקומים או בטבעת שביניהם אז $I_{\mathbf{f}}(\gamma_1) = I_{\mathbf{f}}(\gamma_2)$.

הוכחה. גם הוכחה זו דומה להוכחות מתורת הפונקציות. ראשית נצייר חתך ישר בין העקומים γ_1 ל־γ_2. נתחיל לעקוב אחר שינוי כיוון השדה כשנקודה עוברת לאורך γ_1 נגד כיוון השעון, משם נעבור דרך החתך אל γ_2 ונקיף אותו בכיוון השעון. לבסוף נחזור לאורך החתך שוב אל γ_1 ונשלים את הקפתו. ראה איור 9.32. במעברים הלוך וחזור דרך החתך, השינויים בכיוון השדה מבטלים זה את זה. בפנים העקום הסגור שעברנו אין אף נקודה קריטית, לכן לפי המשפט הקודם $I_{\mathbf{f}}(\gamma_1) + I_{\mathbf{f}}(-\gamma_2) = 0$. □



איור 9.32: טבעת בין שני עקוי ז'ורדן

אם p היא נקודה קריטית מבודדת של שדה $\mathbf{f}$ אז לפי משפט 9.26, לכל עקום ז'ורדן המקיף את p בסביבה די קטנה יש את אותו אינדקס. מספר שלם זה תלוי רק ב־p והוא נקרא האינדקס של הנקודה הקריטית p ביחס לשדה הוקטורי ויסומן ב־ $I_{\mathbf{f}}(p)$.

משפט 9.27 אם עקום ז'ורדן γ מקיף מספר סופי של נקודות קריטיות $p_1, \ldots, p_m$ אז

$$I_{\mathbf{f}}(\gamma) = I_{\mathbf{f}}(p_1) + \cdots + I_{\mathbf{f}}(p_m).$$

הוכחה. נחלק את פנים γ למספר סופי של תחומים קטנים כך ששפת כל אחד מהתחומים הוא עקום ז'ורדן שאינו עובר דרך אף נקודה קריטית וכל תחום מכיל לכל היותר נקודה קריטית אחת. אז הטענה נובעת מהשוויון (9.29). □

עד כאן עסקנו בעקומי ז'ורדן כלשהם בשדה וקטורי. הטענה הבאה עוסקת במסלול סגור של מערכת המשוואות (9.2) המתאים לשדה הוקטורי $\mathbf{f} = \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big)$.

משפט 9.28 אם C מסלול סגור של מערכת המשוואות (9.2) אז $I_{\mathbf{f}}(C) = +1$.

הוכחה. המסלול C הוא כמובן עקום ז'ורדן. כיוון השדה $\mathbf{f}$ הוא ככיוון המשיק ל־C וזה משלים סיבוב אחת בכיוון החיובי כאשר אנו מקיפים את C נגד כיוון השעון. לכן $I_{\mathbf{f}}(C) = +1$.

זו הוכחה אינטואיטיבית לטענה. בספרים מתקדמים מופיעות הוכחות פורמליות מדויקות יותר. □

מסקנה 9.29 אם C מסלול סגור של המערכת (9.2) אז בפנים של C יש לפחות נקודה קריטית אחת. אם בפנים של C יש מספר סופי של נקודות קריטיות אז סכום האינדקסים שלהן הוא $+1$.

דוגמא 9.11 נחשב את האינדקס של הנקודה הקריטית של המערכת הלינארית (9.8), $x' = ax + by,\ y' = cx + dy$. כדי למצוא את האינדקס של הנקודה הקריטית $(0,0)$, מספיק להקיף את הנקודה על מעגל יחידה $x = \cos\theta,\ y = \sin\theta$:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{f}}(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_\gamma d\left(\arctan\frac{cx+dy}{ax+by}\right) \\ &= \frac{ad-bc}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a\cos\theta+b\sin\theta)^2+(c\cos\theta+d\sin\theta)^2} \end{aligned}$$

אגף ימין היא פונקציה רציפה של a,b,c,d כל עוד $ad-bc\neq 0$, כי אז המכנה של האינטגרל אינו מתאפס כלל. מצד שני $I_{\mathbf{f}}$ חייב להיות מספר שלם, לכן הוא נשאר קבוע.

אם $ad-bc>0$ ו־$ad>0$, ניקח $d\to a$, $a,c\to 0$ ונקבל כי במקרה זה $I_{\mathbf{f}}(0)=+1$. אם $ad-bc>0$ ו־$ad<0$, אז נגדיל את ad עד שיקבל ערך חיובי. אז נמשיך כמקודם ונסיק כי שוב $I_{\mathbf{f}}(0)=+1$. לבסוף, אם $ad-bc<0$ נקבל באופן דומה כי $I_{\mathbf{f}}(0)=-1$. אך $ad-bc=\lambda_1\lambda_2$ ועל פי המקרים שנדונו בסעיף 9.3 אנו רואים כי $I_{\mathbf{f}}(0)=-1$ עבור אוכף ו־$(+1)$ לכל הטיפוסים האחרים. □

9.8 מיפוי פואנקרה

נקודות קריטיות הן ה"מסלולים" בעלי המבנה הפשוט ביותר של מערכת אוטונומית ובסעיפים הקודמים למדנו על התנהגות מערכת דו־ממדית בקרבתן. האלמנטים הבאים מבחינת פשטות הם מסלולים סגורים אשר מתאימים לפתרונות מחזוריים. בסעיף זה נבדוק את יציבותם בעזרת המושג "מיפוי פואנקרה" (Poincaré map) במערכות אוטונומיות n־ממדיות.

נסמן את פתרון המערכת האוטונומית ה־n־ממדית (9.1), $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt}=\mathbf{f}(\mathbf{y})$ המקיים את בעיית ההתחלה $\mathbf{y}(0)=\xi$ ב־$\mathbf{y}(t,\xi)$. נניח כי למערכת (9.1) יש פתרון מחזורי $\mathbf{p}(t)$ בעל מחזור מינימלי ω. נבחר על מסלול הפתרון המחזורי נקודה ξ_0. כך הפתרון המחזורי ניתן להצגה כפתרון היוצא מנקודת ההתחלה ξ_0 והוא יכתב כ־$\mathbf{p}(t)=\mathbf{y}(t,\xi_0)$ ומקיים $\mathbf{p}(0)=\mathbf{p}(\omega)=\xi_0$, (כלומר $\mathbf{y}(0,\xi_0)=\mathbf{y}(\omega,\xi_0)=\xi_0$).

דרך הנקודה ξ_0 נעביר על־מישור $n-1$ ממדי Σ אשר אורתוגונלי למשיק למסלול, $(\mathbf{y}-\xi_0)\perp\mathbf{p}\,'(0)$. משוואת Σ היא

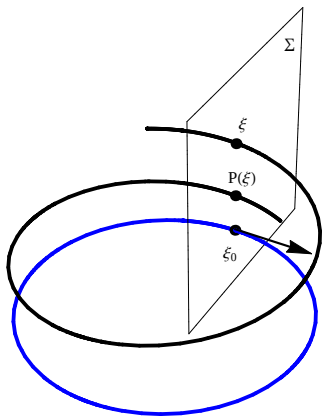
$$\Sigma: \qquad (\mathbf{y}-\xi_0)\cdot\mathbf{f}(\xi_0)=0.$$

הודות לתלות הרציפה של פתרונות בתנאי ההתחלה, לנקודה ξ_0 יש סביבה $U\subset R^n$ כך שפתרון $\mathbf{y}(t,\xi)$ היוצא מכל $\xi\in U$, נשאר קרוב לפתרון (המחזורי) $\mathbf{y}(t,\xi_0)$. בפרט הוא

פוגש במישור Σ לאחר פרק זמן $t(\xi)$ הקרוב ל־ω, כלומר $\mathbf{y}(t(\xi),\xi) \in \Sigma$. כך מתקבל מיפוי מ־$U$ אל Σ המוגדר על ידי

$$P(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}(t(\xi),\xi).$$

כמובן ש־$t(\xi_0) = \omega$, $P(\xi_0) = \xi_0$. אם נצמצם את מבטנו רק לנקודות ξ במישור Σ, מתקבל מיפוי $P : U \cap \Sigma \to \Sigma$. משמעות המיפוי P על המישור Σ ברורה: בנקודה $\xi \in \Sigma$ מתחיל הפתרון $\mathbf{y}(t,\xi)$ ו־$P(\xi)$ היא הנקודה בה הוא פוגש שוב את המישור Σ בקרבת $t = \omega$. ראה איור 9.33. מיפוי זה נקרא מיפוי פואנקרה (Poincaré map, succession function, first return map).



איור 9.33: מיפוי פואנקרה בקרבת פתרון מחזורי

יש קשר ברור בין פתרונות המערכת האוטונומית (9.1) ב־R^n לבין לבין מיפוי פואנקרה ב־Σ: הפתרון $\mathbf{y}(t,\xi)$ דרך הנקודה ξ מחזורי אם ורק אם נקודה זו היא נקודת שבת של המיפוי P, כלומר $P(\xi) = \xi$.

נתאר תכונות של מיפוי פואנקרה:

משפט 9.30 בסביבה די קטנה U של ξ_0 מיפוי פואנקרה P הוא חד־חד ערכי, הוא והיפוכו P^{-1} בעלי נגזרות רציפות.

הוכחה. ראשית נוכיח כי קיימת פונקציה יחידה $t(\xi)$ כך ש־$\mathbf{y}(t(\xi),\xi) \in \Sigma$, היא בעלת נגזרת רציפה ו־$t(\xi_0) = \omega$. נסיק זאת ממשפט הפונקציות הסתומות. נסתכל במשוואה

$$G(t,\xi) := \Big(\mathbf{y}(t,\xi) - \xi_0\Big) \cdot \mathbf{f}(\xi_0) = 0.$$

עבור $(t,\xi) = (\omega,\xi_0)$ המשוואה מתקיימת כי $\mathbf{y}(\omega,\xi_0) = \mathbf{y}(0,\xi_0) = \xi_0$, ונגזרתה לפי t היא

$$\frac{\partial G}{\partial t}\Big|_{(t,\xi)=(\omega,\xi_0)} = \mathbf{y}'(\omega,\xi_0)\cdot\mathbf{f}(\xi_0) = \mathbf{y}'(0,\xi_0)\cdot\mathbf{f}(\xi_0) = ||\mathbf{f}(\xi_0)||^2 \neq 0.$$

מכאן נובעת הטענה אודות $t(\xi)$ וגזירות $P(\xi)=\mathbf{y}(t(\xi),\xi)$ בסביבה מסוימת של ξ_0.

הפיכות P מתקבלת מתוך הליכה על המסלולים בכיוון ההפוך מ־$P(\xi)$ אל ξ. כלומר אם $\eta=P(\xi)=\mathbf{y}(t(\xi),\xi)$ אז $P^{-1}(\eta)=\mathbf{y}(-t(\xi),\eta)=\xi$. כזכור, מיפוי חד־חד ערכי שהוא והיפוכו דיפרנציאביליים נקרא דיפאומורפיזם. □

חישוב מפורש של מיפוי פואנקרה אינו פשוט והוא מצריך ידיעה של כל פתרונות המערכת.

דוגמא 9.12 המערכת האוטונומית הדו־ממדית

$$\begin{aligned} x'(t) &= -y + x(1-x^2-y^2),\\ y'(t) &= \ \ x + y(1-x^2-y^2), \end{aligned}$$

הופכת בקואורדינטות קטביות ל־$r'(t)=r(1-r^2)$, $\theta'(t)=1$ ופתרונה הכללי הוא

$$r(t)=\left(1+(r_0^{-2}-1)e^{-2t}\right)^{-1/2}, \qquad \theta(t)=t+\theta_0\ .$$

המעגל $r(t)\equiv 1$ הוא מסלול סגור. נבחר כישר חותך Σ את ציר x החיובי או $\theta=0$. זמן החזרה אל Σ של כל מסלול הוא 2π ומיפוי פואנקרה $P:R^+\to R^+$ הוא

$$P(r)=\left(1+(r^{-2}-1)e^{-4\pi}\right)^{-1/2}. \qquad \square$$

בדיון הבא נצביע על הקשר בין הלינאריזציה של המערכת האוטונומית בקרבת פתרון מחזורי לבין הלינאריזציה של מיפוי פואנקרה וננצל אותו לחקירת היציבות של פתרון מחזורי.

כדי למצוא את הלינאריזציה של $P(\xi)=\mathbf{y}\big(t(\xi),\xi\big)$ בנקודה ξ_0 נחשב תחילה באמצעות כלל השרשרת את מטריצת היעקוביאן של $\mathbf{y}(t(\xi),\xi)$ עבור $\xi\in U\subset R^n$ (לא דווקא ב־Σ).

$$\begin{aligned} D_\xi\ \mathbf{y}\big(t(\xi),\xi\big) &= \frac{d\mathbf{y}}{dt}\big(t(\xi),\xi\big)\ D_\xi\ t(\xi) + D_\xi\ \mathbf{y}\big(t(\xi),\xi\big)\\ &= \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \left(\frac{\partial t}{\partial \xi_1},\cdots,\frac{\partial t}{\partial \xi_n}\right) + \left(\frac{\partial y_i}{\partial \xi_k}\right)_{i,k=1}^{n} \qquad (9.30)\\ &= \left(f_i(\xi)\,\frac{\partial t}{\partial \xi_k}\right)_{i,k=1}^{n} + \left(\frac{\partial y_i}{\partial \xi_k}\right)_{i,k=1}^{n}\Bigg|_{(t(\xi),\xi)} \end{aligned}$$

כדי לחשב את $D_\xi P\big|_{\xi_0}$ נצמצם את ξ למישור Σ ונציב $\xi=\xi_0$, $t(\xi_0)=\omega$. ללא הגבלת כלליות אפשר להניח כי כיוון המשיק לפתרון המחזורי $\mathbf{p}(t)=\mathbf{y}(t,\xi_0)$ בנקודה ξ_0 הוא כיוון הקואורדינטה y_1, כלומר

$$\mathbf{y}'(\omega,\xi_0)=\mathbf{y}'(0,\xi_0)=\mathbf{f}(\xi_0)=\big(f_1(\xi_0),0,\ldots,0\big)^T$$

והמישור האורתוגונלי לכיוון זה הוא $\Sigma = \{\xi_1 \equiv 0\}$. לפי הנחות אלה $f_i(\xi_0) = 0$, $i = 2, \ldots, n$ והשורות המתאימות במטריצה הראשונה מתאפסות. יתר על כן, במישור Σ, הפונקציות $\mathbf{y}, t(\xi\,)$ אינן תלויות במשתנה ξ_1 ונגזרותיהן לפי ξ_1 מתאפסות. מ־(9.30) נשאר, אם כן

$$\begin{pmatrix} 0 & f_1(\xi_0)\dfrac{\partial t}{\partial \xi_2} & \cdots & f_1(\xi_0)\dfrac{\partial t}{\partial \xi_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial y_1}{\partial \xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & & & \\ 0 & \dfrac{\partial y_n}{\partial \xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial \xi_n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \\ 0 & \dfrac{\partial y_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial \xi_n} \\ \vdots & & & \\ 0 & \dfrac{\partial y_n}{\partial \xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial \xi_n} \end{pmatrix} \big(\omega, \xi_{\mathbf{0}}\,\big). \tag{9.31}$$

אם נביט על מיפוי פואנקרה רק במישור Σ ה־$n-1$ ממדי, הלינאריזציה שלו היא המטריצה $(n-1)\times(n-1)$

$$D_\xi\ P(\xi_0) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial \xi_k}(\omega, \xi_0)\right)_{i,k=2}^{n}. \tag{9.32}$$

מצד שני הלינאריזציה של המערכת האוטונומית (9.1), $d\mathbf{y}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ סביב הפתרון המחזורי $\mathbf{y}(t, \xi_0)$ היא המערכת הלינארית ("הווריאציה הראשונה")

$$\mathbf{z}\,' = D_{\mathbf{y}}\,\mathbf{f}\big(\mathbf{y}(t, \xi_0)\big)\,\mathbf{z}, \tag{9.33}$$

דהיינו $\mathbf{z}\,' = D_{\mathbf{y}}\,\mathbf{f}\big(\mathbf{p}(t)\big)\,\mathbf{z}$. ראה (3.27). כפי שהוכח במשפט 3.21, המטריצה

$$Z(t) = D_\xi\,\mathbf{y}(t, \xi_0) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial \xi_k}\right)_{i,k=1}^{n}$$

היא מטריצה יסודית של (9.33) המקיימת את תנאי ההתחלה $Z(0) = I_{n\times n}$.

מכיון ש־$\mathbf{p}(t) = \mathbf{y}(t, \xi_0)$ פתרון מחזורי, המערכת (9.33) בעלת מקדמים מחזוריים. לפי תורת Floquet ניתן לרשום את המטריצה היסודית $Z(t)$ כ־$Z(t) = K(t)\exp(tR)$ בה $K(t)$ פונקציה מחזורית בעלת מחזור ω, $K(\omega) = K(0) = I$ ו־R מטריצה קבועה. בפרט,

$$Z(\omega) = K(\omega)\exp(\omega R) = \exp(\omega R).$$

זו מטריצת המונודרומיה של המערכת (9.33)(והערכים העצמיים שלה הם הכופלים האופייניים (characteristic multipliers) של המערכת (9.33). ראה סעיף 6.8. ערכים עצמיים אלה אינם

תלויים בבחירת מערכת הצירים. כי אם ב־(9.33) מחליפים את $\mathbf{z}$ ב־$Q\mathbf{z}$, המטריצה היסודית $Z(\omega)$ תוחלף ל־$Q^{-1}Z(\omega)Q$ ולשניהם אותם ערכים עצמיים. במקרה שלנו המערכת (9.33) נקבעת על ידי הפתרון המחזורי $\mathbf{p}(t)$ (ואינה תלויה בבחירת הנקודה ξ_0), לכן הערכים העצמיים נקראים הכופלים האופייניים של הפתרון המחזורי $\mathbf{p}(t)$.

נראה כי אחד הערכים העצמיים של $Z(\omega)$ הוא 1. $\mathbf{y}(t,\xi_0)$ הוא פתרון מחזורי של המערכת האוטונומית (9.1),

$$\mathbf{y}\,'(t,\xi_0) = \mathbf{f}(\mathbf{y}\,(t,\xi_0)).$$

נגזור לפי t, ($'= d/dt$), ונקבל

$$\big(\mathbf{y}\,'(t,\xi_0)\big)' = D_\xi\,\mathbf{f}\big(\mathbf{y}\,(t,\xi_0)\big)\;\mathbf{y}\,'(t,\xi_0), \qquad \mathbf{y}\,'(0,\xi_0) = \mathbf{f}(\xi_0).$$

לכן $\mathbf{y}\,'(t,\xi_0)$ הוא פתרון המשוואה הבלתי־אוטונומית (9.33) המקיים את תנאי ההתחלה $z(0) = \mathbf{f}(\xi_0)$. אך $Z(t)$ מטריצה יסודית של המערכת הלינארית (9.33) המקיימת $Z(0) = I$ ולכן, לפי (6.10),

$$\mathbf{y}\,'(t,\xi_0) = Z(t)\,\mathbf{y}\,'(0,\xi_0).$$

כעבור מחזור שלם $t = \omega$, $\mathbf{y}\,'(\omega,\xi_0) = \mathbf{y}\,'(0,\xi_0) = \mathbf{f}(\xi_0)$ ולכן

$$Z(\omega)\,\mathbf{f}(\xi_0) = \mathbf{f}(\xi_0).$$

זה מראה כי למטריצת המונודרומיה $Z(\omega) = \exp(\omega R)$ יש ערך עצמי 1 ומתאים לו וקטור עצמי $\mathbf{f}(\xi_0)$. כיון שסובבנו את הצירים כך ש־$\mathbf{f}(\xi_0) = \big(f_1(\xi_0),0,\dots,0\big)^T$, העמוד הראשון של $Z(\omega)$ הוא $\big(1,0,\dots,0\big)^T$ וצורתו

$$Z(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & \\ 0 & \dfrac{\partial y_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial \xi_n} \\ \vdots & & & \\ 0 & \dfrac{\partial y_n}{\partial \xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial \xi_n} \end{pmatrix} \big(\omega, \boldsymbol{\xi_0}\big). \tag{9.34}$$

מהשוואת המטריצות (9.34), (9.32) מתקבל המשפט הבא:

משפט 9.31 נסתכל בלינאריזציה (9.33) בסביבת הפתרון המחזורי $\mathbf{p}(t)$ ועליו נקודה ξ_0. אחד מ־n הכופלים האופייניים המתאימים לפתרון זה (דהיינו הערכים העצמיים של $Z(\omega)$) הוא 1 ו־$(n-1)$ האחרים הם הערכים העצמיים של הלינאריזציה של מיפוי פואנקרה, $D_\xi\,P(\xi_0)$.
יתר על כן, אם מערכת הצירים נבחרת כך ש־$\mathbf{f}(\xi_0)$ הוא בכיוון הקואורדינטה הראשונה אז $D_\xi\,P(\xi_0)$ מתקבל על ידי מחיקת השורה והעמודה הראשונות של מטריצת המונודרומיה של (9.33).

מסקנה 9.32 מכיוון שהלינאריזציה (9.33) נקבעת על ידי הפתרון המחזורי $\mathbf{p}(t)$ ואינה תלויה בבחירת הנקודה ξ_0, הערכים העצמיים של $D_\xi\ P(\xi_0)$ אינם תלויים בבחירת הנקודה ξ_0.

מסקנה 9.33 דטרמיננט המטריצה היסודית $Z(t) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial \xi_k}\right)_{i,k=1}^{n}$ של המערכת הלינארית (9.33), הוא

$$\det Z(t) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{div}\mathbf{f}(\mathbf{p}(s))\,ds\right), \tag{9.35}$$

כאשר $\operatorname{div}\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial \xi_i} = \operatorname{trace}\left(D_{\mathbf{y}}\,\mathbf{f}(\mathbf{y})\right)$. בפרט עבור $t=\omega$,

$$\det D_\xi\ P(\xi_0) = \exp\left(\int_0^\omega \operatorname{div}\mathbf{f}(\mathbf{p}(s))\,ds\right),$$

וזו גם מכפלת הערכים העצמיים של הלינאריזציה של מיפוי פואנקרה.

(9.35) היא מסקנה מנוסחת ליוביל (6.9) ותנאי ההתחלה $Z(0)=I$. □

באופן אינטואיטיבי אפשר לשער כי אם כל הערכים העצמיים של המטריצה $D_\xi\ P(\xi_0)$ קטנים בערכם המוחלט מ־1, אז מיפוי פואנקרה מתקרב לנקודת שבת. כדי להוכיח זאת, נסתמך על תוצאה מתורת המטריצות.

למה 9.34 נתונה מטריצה A ולה ערכים עצמיים λ_i ורדיוס ספקטרלי $\rho(A) = \max_i\{|\lambda_i|\}$. אז לכל $\rho(A)<\alpha$ קיימת נורמה מטריצית $||\,.\,||$ שעבורה $||A||<\alpha$.

הוכחה. נרשום את A בצורת ז'ורדן כ־

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_r)\end{pmatrix}$$

בה כל $J(\lambda_i)$ הוא בלוק ז'ורדן מהצורה (6.20). נבחר מטריצת בלוקים אלכסונית בעלת ממדי בלוקים שווים לאלו של צורת ז'ורדן,

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_r\end{pmatrix}$$

בה $Q_i = \operatorname{diag}\{1,\varepsilon,\ldots,\varepsilon^{m_i-1}\}$. בעזרת חישוב ישיר מתקבל כי $Q_i^{-1}J(\lambda_i)Q_i$ הוא בצורת בלוק ז'ורדן בו המספר 1 באלכסון המשני הוחלף ב־ε. ראה תרגיל 6.19. עתה נגדיר נורמה על מרחב המטריצות על ידי

$$||M|| \stackrel{\text{def}}{=} ||Q^{-1}T^{-1}MTQ||_1.$$

למעשה מדובר בהצגה של M במערכת צירים חדשה שהתקבלה מהצירים הנתונים על ידי הפעלת הטרנספורמציה TQ. בכל עמודה של המטריצה $(TQ)^{-1}A(TQ)$ מופיעים לכל היותר שני אברים $\lambda_i,\ \varepsilon$ נבחר $\varepsilon > 0$ כך ש־$\max_i\{|\lambda_i|\} + \varepsilon < \alpha$. אז

$$||A|| = ||Q^{-1}T^{-1}ATQ||_1 = \max_i(|\lambda_i| + \varepsilon) < \alpha. \qquad \square$$

משפט 9.35 אם $(n-1)$ כופלים אופייניים של הלינאריזציה (9.33) של (9.1) בקרבת הפתרון המחזורי $\mathbf{y}\,(t, \xi_0)$ הם בעלי ערך מוחלט קטן מ־1 (וה־n־י הוא כמובן 1), אז כל פתרון של (9.1) שמתחיל בקרבת הפתרון המחזורי, שואף אליו כש־$t \to \infty$.

הוכחה. לנקודה ξ_0 על מסלול מחזורי קיים $P(\xi_0) = \xi_0$. $P(\xi\,)$ דיפרנציאבילי, לכן בקרבת ξ_0,

$$P(\xi\,) - \xi_0 = P(\xi\,) - P(\xi_0) = D_\xi\ P(\xi_0)(\xi - \xi_0) + o(\xi - \xi_0).$$

לכל $\varepsilon_1 > 0$ קיים $\delta_1 > 0$ כך שבסביבה $||\xi - \xi_0|| < \delta_1$,

$$||P(\xi\,) - \xi_0|| \le (||D_\xi\ P(\xi_0)|| + \varepsilon_1)\,||\xi - \xi_0||.$$

לפי הנתון ובעזרת משפט 9.31, גם כל $(n-1)$ הערכים העצמיים λ_i של $D_\xi\ P(\xi_0)$ קטנים בערכם המוחלט מ־1. נקח איפוא $\max_i|\lambda_i| < \alpha < 1$. לפי הלמה הקודמת והנורמה המתאימה, $||D_\xi\ P(\xi_0)|| < \alpha$. נקח עכשיו ε_1 כך ש־$0 < \varepsilon_1 < \alpha - ||D_\xi\ P(\xi_0)||$. אז בסביבה $||\xi - \xi_0|| < \delta_1$,

$$||P(\xi\,) - \xi_0|| < \alpha||\xi - \xi_0||.$$

נחזור על כך עבור הנקודה $P(\xi)$ ונקבל

$$||P\big(P(\xi\,)\big) - \xi_0|| \le \alpha||P(\xi\,) - \xi_0|| \le \alpha^2||\xi - \xi_0||.$$

ולאחר k איטרציות, $||P^k(\xi\,) - \xi_0|| \le \alpha^k||\xi - \xi_0||$. מכיון ש־$\alpha < 1$, זה מאשר כי $P^k(\xi\,) \to \xi_0$ כש־$k \to \infty$.

לבסוף, כל נקודה על הפתרון המחזורי יכולה להבחר כ־ξ_0 (למשל על ידי הזזת t בקבוע), לכן כל פתרון בעל ערך התחלי בקרבת הפתרון המחזורי שואף אליו כאשר $t \to \infty$. $\square$

עבור המערכת האוטונומית הדו־ממדית (9.2),

$$x' = f_1(x,\ y),$$
$$y' = f_2(x,\ y),$$

מיפוי פואנקרה היא העתקה $R^1 \to R^1$ ו־$D_\xi\ P(\xi_0)$ הופך ל־$P'(\xi_0)$. לכן מתקבלת תוצאה פשוטה במיוחד.

משפט 9.36 נגזרת מיפוי פואנקרה עבור המערכת הדו־ממדית (9.2) סביב הפתרון המחזורי $\mathbf{p}(t)$ היא

$$P'(\xi_0) = \exp\left(\int_0^\omega \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\big(\mathbf{p}(s)\big)\, ds\right).$$

אם

$$\int_0^\omega \big(f_{1,x} + f_{2,y}\big)\big(\mathbf{p}(s)\big)\, ds < 0$$

אז כל פתרון שמתחיל בקרבת הפתרון המחזורי, שואף אליו כש־$t \to \infty$.

הוכחה. הכופלים האופייניים לפתרון המחזורי הם הערכים העצמיים של $Z(\omega)$ וכפי שהוכחנו אחד מהם הוא $\lambda_1 = 1$ והשני יסומן ב־λ_2. מכפלתם שווה לדטרמיננט של $Z(\omega)$ ובעזרת מסקנה 9.33

$$1 \cdot \lambda_2 = \det Z(\omega) = \exp\left(\int_0^\omega \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\big(\mathbf{p}(s)\big)\, ds\right) < 1.$$

מ־ $0 < \lambda_2 < 1$ נובעת המסקנה. □

מפאת חשיבותו המיוחדת של המקרה הדו־ממדי נציג הוכחה נוספת, ישירה יותר לטענה האחרונה.

הוכחה נוספת למשפט 9.36. ההוכחה השניה שנציג היא בעלת אופי יותר גיאומטרי. יהי $\mathbf{p}(t) = \big(\varphi(t), \psi(t)\big)$ פתרון מחזורי של (9.2) במישור (x, y), $\mathbf{p}(t+\omega) = \mathbf{p}(t)$. נגדיר קואורדינטות חדשות (τ, v) על ידי

$$\begin{aligned} x &= \varphi(\tau) - v\psi'(\tau), \\ y &= \psi(\tau) + v\varphi'(\tau). \end{aligned} \tag{9.36}$$

הטרנספורמציה מחזורית ב־τ ונסתפק ב־$0 \le \tau \le \omega$. כש־τ קבוע ו־v משתנה, (9.36) מתאר ישר בכיוון $\big(-\psi'(\tau), \varphi'(\tau)\big)$ המאונך למסלול הפתרון המחזורי. $\tau = 0$ ו־$\tau = \omega$ מתארים כמובן את אותו ישר. $v = 0$ מתאים לפתרון המחזורי הנתון, כל v קבוע אחר מתאים לעקום "מקביל" למסלול המחזורי.

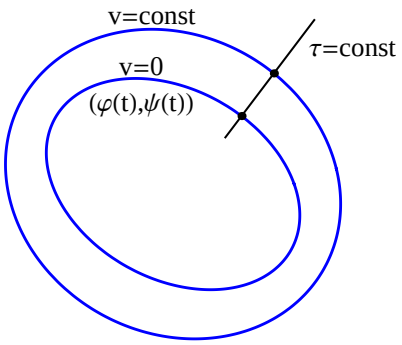
היעקוביאן של החלפת המשתנים הוא

$$\begin{aligned} J(\tau, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\tau, v)} &= \begin{vmatrix} \varphi'(\tau) - v\psi''(\tau) & -\psi'(\tau) \\ \psi'(\tau) + v\varphi''(\tau) & \varphi'(\tau) \end{vmatrix} \\ &= \varphi'^2(\tau) + \psi'^2(\tau) - v\Big(\varphi'(\tau)\psi''(\tau) - \psi'(\tau)\varphi''(\tau)\Big) \end{aligned}$$

עבור $v = 0$ (המסלול המחזורי),

$$J(\tau, 0) = \varphi'^2(\tau) + \psi'^2(\tau) = f_1'^2(\varphi(\tau), \psi(\tau)) + f_2'^2(\varphi(\tau), \psi(\tau)) \ge c > 0$$

לכל $0 \le \tau \le \omega$. לכן $J(\tau, v) \ne 0$ עבור $0 \le \tau \le \omega$ ו־$|v| < \delta$, δ די קטן, והטרנספורמציה (9.36) חד־חד ערכית באופן לוקלי במלבן צר זה.



איור 9.34: מערכת קואורדינטות חדשה למיפוי פואנקרה

כדי תרגם את המערכת האוטונומית למשתנים החדשים τ, v, נגזור את (9.36) לפי t ונציב למערכת הדיפרנציאלית.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt} = f_1(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi'),$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt} = f_2(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi'),$$

דהיינו

$$\Big(\varphi'(\tau) - v\psi''(\tau)\Big)\frac{d\tau}{dt} - \psi'(\tau)\frac{dv}{dt} = f_1(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi'),$$
$$\Big(\psi'(\tau) + v\varphi''(\tau)\Big)\frac{d\tau}{dt} + \varphi'(\tau)\frac{dv}{dt} = f_2(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi').$$

נפתור עבור $\tau'(t), v'(t)$ במלבן בו דטרמיננט המערכת $J(\tau, v)$ שונה מ־0 ונקבל את המערכת האוטונומית במונחי המשתנים τ, v:

$$\frac{d\tau}{dt} = \begin{vmatrix} f_1 & -\psi' \\ f_2 & \varphi' \end{vmatrix} / J(\tau, v), \qquad \frac{dv}{dt} = \begin{vmatrix} \varphi' - v\psi'' & f_1 \\ \psi' + v\varphi'' & f_2 \end{vmatrix} / J(\tau, v). \tag{9.37}$$

עבור $v = 0$, $d\tau/dt \neq 0$ כי

$$\begin{vmatrix} f_1 & -\psi' \\ f_2 & \varphi' \end{vmatrix} (\tau, 0) = f_1(\varphi, \psi)\varphi' + f_2(\varphi, \psi)\psi' = \varphi'^2(\tau) + \psi'^2(\tau) \neq 0.$$

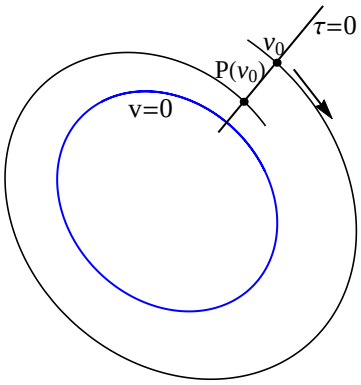
הודות לרציפות, כך יהיה גם לערכי v די קטנים, $0 \leq \tau \leq \omega$. במלבן זה מתקבל

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{dv/dt}{d\tau/dt} = \frac{f_2 \cdot (\varphi' - v\psi'') - f_1 \cdot (\psi' + v\varphi'')}{f_1\varphi' + f_2\psi'} \tag{9.38}$$

הפתרונות $v(\tau)$ של המשוואה הדיפרנציאלית (9.38) מתווים את המסלולים המתאימים לפתרונות $(\tau(t), v(t))$ של (9.37). נשים לב כי $v \equiv 0$ הוא פתרון המשוואה (9.38) כי עבור

$v=0$ המונה של המשוואה הוא $f_2\varphi' - f_1\psi' \equiv 0$. מתלות רציפה בתנאי ההתחלה נובע כי עבור $v(0)=v_0$ די קטן, הפתרון $v(\tau)$ יהיה קטן בקטע $0 \le \tau \le \omega$, כלומר ישאר בטבעת צרה סביב הפתרון המחזורי. למעשה $v(\tau) = O(|v_0|)$.

נתבונן בפתרון $v(\tau)$ שמקיים את תנאי ההתחלה $v(0)=v_0$, ז"א יוצא מהנקודה $(0, v_0)$ שעל הישר $\tau = 0$ אשר חותך בניצב את המסלול הסגור הנתון. החיתוך העוקב שלו עם אותו ישר הוא עבור $\tau = \omega$ ומגדיר את מיפוי פואנקרה על ידי $P(v_0) = v(\omega)$.



איור 9.35: מיפוי פואנקרה סביב פתרון מחזורי במישור

נחשב קירוב למשוואה (9.37) ליד $v=0$. בהנחה ש-$f_1, f_1 \in C^2$,

$$\begin{aligned} f_1(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi') &= f_1(\varphi,\psi) + \Big[f_{1,x}(-\psi') + f_{1,y}\varphi'\Big]v + O(v^2) \\ &= \varphi' + \Big[f_{1,x}(-\psi') + f_{1,y}\varphi'\Big]v + O(v^2), \\ f_2(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi') &= \psi' + \Big[f_{2,x}(-\psi') + f_{2,y}\varphi'\Big]v + O(v^2), \end{aligned}$$

כאשר $f_{1,x} = f_{1,x}(\varphi(\tau), \psi(\tau))$ וכולי. המכנה של (9.38) הוא

$$\begin{aligned} f_1\cdot\varphi' - f_2\cdot\psi' &= \Big[\varphi' + \big[-f_{1,x}\psi' + f_{1,y}\varphi'\big]v + O(v^2)\Big]\varphi' \\ &\quad + \Big[\psi' + \big[-f_{2,x}\psi' + f_{2,y}\varphi'\big]v + O(v^2)\Big]\psi' \\ &= \varphi'^{\,2} + \psi'^{\,2} + \Big[f_{1,y}\varphi'^{\,2} + (-f_{1,x} + f_{2,y})\varphi'\psi' - f_{2,x}\psi'^{\,2}\Big]v + O(v^2). \end{aligned}$$

המונה שלו הוא

$$\begin{aligned} & f_2\cdot(\varphi' - v\psi'') - f_1\cdot(\psi' + v\varphi'') \\ &= \Big[\psi' + \big[-f_{2,x}\psi' + f_{2,y}\varphi'\big]v + O(v^2)\Big](\varphi' - v\psi'') \\ &\quad - \Big[\varphi' + \big[-f_{1,x}\psi' + f_{1,y}\varphi'\big]v + O(v^2)\Big](\psi' + v\varphi'') \\ &= \Big[f_{2,y}\varphi'^{\,2} - (f_{2,x} + f_{1,y})\varphi'\psi' + f_{1,x}\psi'^{\,2} - (\psi'\psi'' + \varphi'\varphi'')\Big]v + O(v^2). \end{aligned} \tag{9.39}$$

מגזירת המשוואות $\varphi' = f_1(\psi,\varphi),\ \psi' = f_2(\varphi,\psi)$ מתקבל

$$\varphi'' = f_{1,x}\varphi' + f_{1,y}\psi', \qquad \psi'' = f_{2,x}\varphi' + f_{2,y}\psi'.$$

נציב לתוך (9.39) $f_{2,x}\varphi' = \psi'' - f_{2,y}\psi',\ f_{1,y}\psi' = \varphi'' - f_{1,x}\varphi'$, אז המשכו הוא

$$\begin{aligned}
&= \Big[f_{2,y}\varphi'^{\,2} - (\psi'' - f_{2,y}\psi')\psi' - (\varphi'' - f_{1,x}\varphi')\varphi' + f_{1,x}\psi'^{\,2} - (\psi'\psi'' + \varphi'\varphi'')\Big]v + O(v^2)\\
&= \Big[\big(f_{1,x} + f_{2,y}\big)(\varphi'^{\,2} + \psi'^{\,2}) - 2(\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'')\Big]v + O(v^2)
\end{aligned}$$

לסיכום,

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{d\tau} &= \frac{\Big[\big(f_{1,x} + f_{2,y}\big)(\varphi'^{\,2} + \psi'^{\,2}) - 2(\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'')\Big]v + O(v^2)}{\varphi'^{\,2} + \psi'^{\,2} + O(v)}\\
&= \Big[f_{1,x} + f_{2,y} - \frac{(\varphi'^{\,2} + \psi'^{\,2})'}{\varphi'^{\,2} + \psi'^{\,2}}\Big]v + O(v^2)
\end{aligned}$$

נחלק ב־v ונעשה אינטגרציה על $[0,\omega]$:

$$\log v(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\omega} = \int_0^{\omega} \big(f_{1,x} + f_{2,y}\big)\,d\tau - \log(\varphi'^{\,2} + \psi'^{\,2})\Big|_0^{\omega} + O(v_0).$$

$\varphi(\tau),\psi(\tau)$ בעלי מחזור ω, לכן נשאר רק

$$\log\frac{v(\omega)}{v_0} = \int_0^{\omega} \big(f_{1,x} + f_{2,y}\big)\,d\tau + O(v_0)$$

ומיפוי פואנקרה $P(v_0) = v(\omega)$ הוא

$$P(v_0) = \exp\left(\int_0^{\omega} \operatorname{div}\mathbf{f}\left(\mathbf{p}\left(\tau\right)\right)d\tau\right)v_0 + O(v_0^2).$$

מייצוג זה מתקבל כי

$$P'(0) = \exp\left(\int_0^{\omega} \operatorname{div}\mathbf{f}\left(\mathbf{p}\left(\tau\right)\right)d\tau\right)$$

וטענת משפט 9.36 נובעת כמקודם. □

פרק 10

יציבות

10.1 הגדרות ודוגמאות

שאלת היציבות של פתרון מערכת משוואות דיפרנציאלית עוסקת בהתנהגות ארוכת הטווח של הפתרונות המתחילים בקרבתו. כמו בפרק 9 גם בפרק זה נסמן את המשתנה החפשי באות t. נתחיל בכמה הגדרות פורמליות.

הגדרה 10.1 נסתכל במערכת המשוואות

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \tag{10.1}$$

כאשר $\mathbf{y} \in R^n$, $\mathbf{f} : [0, \infty) \times R^n \to R^n$. פתרון $\mathbf{y}_0(t)$ של המערכת המוגדר ב־$[t_0, \infty)$ נקרא **יציב** *(stable)* אם לכל $\varepsilon > 0$ נתון קיים $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ כך שכל פתרון $\mathbf{y}(t)$ המקיים בנקודה t_0

$$||\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{y}_0(t_0)|| < \delta,$$

מוגדר לכל $t_0 \le t < \infty$ ומקיים

$$||\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)|| < \varepsilon, \qquad t_0 \le t < \infty.$$

זו נקראת **יציבות במובן של ליאפונוב**[1] *(stability in the sense of Lyapunov)*. נדגיש כי בהגדרה זו δ תלוי בנקודת ההתחלה t_0.

אם $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ רציף ומקיים תנאי ליפשיץ ופתרון $\mathbf{y}_0(t)$ יציב ב־$[t_0, \infty)$ אז עצם היציבות לא תושפע אם עבור t_1 קבוע, $t_1 \ge t_0$, נחליף את t_0 ו־$\mathbf{y}_0(t_0)$ ב־t_1 ו־$\mathbf{y}_0(t_1)$. כי לפי (3.20),

$$||\mathbf{y}(t_1) - \mathbf{y}_0(t_1)|| \le ||\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{y}_0(t_0)||\, e^{L|t_1 - t_0|}$$

ופתרונות הקרובים זה לזה ב־t_0 קרובים גם בנקודה t_1. δ שבהגדרה יהיה כמובן תלוי ב־t_1.

[1] Aleksandr Lyapunov, 1857-1918

הגדרה 10.2 אם בנוסף לאמור בהגדרה 10.1 גם $\lim_{t\to\infty} ||\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)|| = 0$ אז הפתרון $\mathbf{y}_0(t)$ נקרא **יציב באופן אסימפטוטי** *(asymptotically stable)*.

באמצעות ההצבה $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0(t)$ המערכת (10.1) הופכת ל־

$$\mathbf{z}\,' = \mathbf{y}\,' - \mathbf{y_0}\,' = \mathbf{f}(t, \mathbf{z} + \mathbf{y}_0(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_0(t)).$$

אם נסמן את אגף ימין ב־$\mathbf{g}(t,\mathbf{z})$ אז $\mathbf{g}(t,\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ ולמערכת $\mathbf{z}\,' = \mathbf{g}(t,\mathbf{z})$ פתרון $\mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{0}$ המתאים לפתרון $\mathbf{y}_0(t)$ של המערכת המקורית. מסיבה זו יש ספרים המסתפקים בחקירת יציבות של פתרון זהותית אפס.

דוגמא 10.1 א. פתרונות המשוואה $y' = 0$ הם $y(t) = \text{const}$. כל פתרון יציב ב־$[0,\infty)$ אך אינו יציב באופן אסימפטוטי.

ב. פתרונות המשוואה $y' = y$ הם $y(t) = ce^t$. הפתרון $y_0(t) \equiv 0$ אינו יציב ב־$[0,\infty)$ כי כל "שכניו" מתרחקים ממנו. לעומת זאת פתרונות $y' = -y$ הם $y(t) = ce^{-t}$ ועבור משוואה זו $y_0(t) \equiv 0$ הוא פתרון יציב באופן אסימפטוטי. למעשה כל פתרון של $y' = -y$ יציב באופן אסימפטוטי.

ג. פתרונות $y' = p(t)y$ הם $y(t) = c\exp\left(\int_0^t p(s)\,ds\right)$. הפתרון $y_0(t) \equiv 0$ יציב אם ורק אם $\int_0^t p(s)\,ds$ חסום מלמעלה על $[0,\infty)$ והוא יציב באופן אסימפטוטי אם ורק אם

$$\int_0^t p(s)\,ds \to -\infty \quad \text{כאשר} \quad t \to \infty.$$

ד. פתרונות $y' = y^2$ הם מהצורה $y(t) = c/(1-ct)$ בתוספת פתרון האפס $y_0(t) \equiv 0$. פתרון האפס אינו יציב ב־$[0,\infty)$ כי גם אם $||y(0) - y_0(0)|| = c$ קטן כרצוננו, הפתרון $y(t)$ אינו מוגדר ב־ $[0,\infty)$ אלא ב־$[0,1/c)$ בלבד.

ה. במשוואה הלוגיסטית $y' = ky(1-y/L)$ עסקנו פעמים אחדות. ראה למשל דוגמא 2.1 ואיור 2.2, וכן דוגמא 3.19. במקרה זה הפתרון $y_0(t) = L$ יציב באופן אסימפטוטי והפתרון $y_1(t) = 0$ לא יציב.

ו. גם אם כל פתרונות מערכת שואפים לנקודה אחת, נקודה זו אינה בהכרח יציבה. כל הפתרונות $(x(t), y(t))$ של המערכת הדו־ממדית המתוארת בדוגמא 9.4 שואפים כאשר $t \to \infty$ אל הפתרון הטריויאלי $(x(t), y(t)) \equiv (0,0)$. ראה איור 9.3. אך פתרון זה אינו יציב כי לא קיימת שום סביבה ברדיוס δ של הראשית כך שכל פתרון $(x(t), y(t))$ המתחיל בו ישאר בהמשך בתוך סביבה ברדיוס ε נתון.

למען הנוחיות ננהל את הדיון מן הקל אל הכבד: נתחיל במערכות לינאריות, נעבור למערכות לא לינאריות אוטונומיות ולבסוף למערכות לא אוטונומיות.

10.2 יציבות מערכות ומשוואות לינאריות

סעיפים א,ב,ג של דוגמא 10.1 עסקו במשוואות לינאריות. נתבונן בתכונות היציבות של מערכת לינארית

$$\mathbf{y}\,' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \qquad \mathbf{y} \in R^n.$$

כאשר $A(t), \mathbf{b}(t)$ רציפים ב־$[t_0, \infty)$, קיום כל הפתרונות בקטע זה מובטח. לפיכך פתרון $\mathbf{y}_0(t)$ יציב אם כל פתרון אחר $\mathbf{y}(t)$ המקיים $||\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{y}_0(t_0)|| < \delta$, מקיים בכל האינטרוול $[t_0, \infty)$ כי $||\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)|| < \varepsilon$. תנאים אלה אפשר לרשום גם בצורה

$$||\Big(\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{y}_0(t_0)\Big) - \mathbf{0}|| < \delta \quad \Longrightarrow \quad ||\Big(\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)\Big) - \mathbf{0}|| < \varepsilon.$$

אך ההפרש $\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)$ הוא פתרון המערכת ההומוגנית

$$\mathbf{y}\,' = A(t)\mathbf{y} \tag{10.2}$$

ואי־השוויונות שלמעלה הם בדיוק התנאי ליציבות הפתרון הטריוויאלי $\mathbf{0}$ של המערכת ההומוגנית. לכן כל הפתרונות של מערכת לינארית (הומוגנית או לא הומוגנית) יציבים ביחד ונאמר כי **המערכת יציבה**. במצב זה מספיק לחקור רק את יציבות)או אי היציבות(של הפתרון הטריוויאלי של (10.2).

נאפיין את היציבות של (10.2) בעזרת מטריצה יסודית שלו. כזכור, מטריצה יסודית בנויה מ־n פתרונות (וקטורי עמוד) בלתי תלויים $\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)$ של המערכת ההומוגנית הרשומים זה לצד זה,

$$Y(t) = \Big(\mathbf{y}_1(t) \vdots\, \mathbf{y}_2(t) \vdots\, \cdots \vdots\, \mathbf{y}_n(t)\Big).$$

משפט 10.3 תהי $Y(t)$ מטריצה יסודית של (10.2).

א. המערכת (10.2) יציבה אם ורק אם קיים קבוע K כך ש־$||Y(t)|| \le K$ לכל $t \ge t_0$.

ב. המערכת (10.2) יציבה באופן אסימפטוטי אם ורק אם $||Y(t)|| \to 0$ כש־$t \to \infty$.

הוכחה. א. על פי הזהות (6.10), פתרון שערכו ההתחלי הוא $\mathbf{y}(t_0)$ נתון על ידי $\mathbf{y}(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)\,\mathbf{y}(t_0)$. נשתמש בנורמת המקסימום

$$||\mathbf{y}||_\infty = \max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}, \quad ||A||_\infty := \max_{1\le k\le n} \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}|.$$

אם $||Y(t)|| \le K$ אז

$$||\mathbf{y}(t)|| \le ||Y(t)||\ ||Y^{-1}(t_0)||\ ||\mathbf{y}(t_0)|| \le KL||\mathbf{y}(t_0)||$$

כאשר $L = ||Y^{-1}(t_0)||$. לפיכך $||\mathbf{y}(t)|| < \varepsilon$ לכל $||\mathbf{y}(t_0)|| < \delta \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon/(KL)$. אך זו בדיוק הגדרת היציבות של הפתרון הטרוויאלי $\mathbf{0}$, על כן המערכת (10.2) יציבה. נדגיש כי L ולכן גם $\delta = \varepsilon/(KL)$ תלויים ב־t_0.

ולהפך, תהי (10.2) יציבה, כלומר $||\mathbf{y}(t)|| = ||Y(t)\,Y^{-1}(t_0)\,\mathbf{y}(t_0)|| < \varepsilon$ כאשר $||\mathbf{y}(t_0)||$ די קטן. בפרט נבחר $\mathbf{y}(t_0) = Y(t_0)\big(\delta,\ldots,\delta\big)^T$. עבור בחירה זו

$$||Y(t)\,\big(\delta,\ldots,\delta\big)^T|| = ||Y(t)||\delta < \varepsilon$$

ומתקבל כי $||Y(t)|| < \varepsilon/\delta$. הוכחת ב' דומה. □

מסקנה 10.4 המערכת הלינארית והומוגנית (10.2) יציבה אם ורק אם כל פתרונותיה חסומים. המערכת יציבה באופן אסימפטוטי אם ורק אם כל פתרונותיה שואפים לאפס.

תרגיל 10.2 הראה בעזרת אי שוויון גרונוול כי כל פתרון של המערכת (10.2) מקיים

$$||\mathbf{y}(t)|| \le ||\mathbf{y}(t_0)|| \exp\left(\int_{t_0}^{t} ||A(s)||\,ds\right).$$

עבור מערכת לינארית אוטונומית (מערכת עם מקדמים קבועים),

$$\mathbf{y}\,' = A\mathbf{y}, \qquad \mathbf{y} \in R^n, \tag{10.3}$$

אפשר לאפיין את תכונות היציבות בעזרת הערכים העצמיים של המטריצה A. נתחיל בהערכה לקצב הגידול של פתרונות בעזרת הערכים העצמיים.

משפט 10.5 יהי $\mu > \max_i \mathrm{Re}\{\lambda_i(A)\}$. אז קיים קבוע K כך ש־$||\exp(tA)|| \le Ke^{\mu t}$ וכל פתרון של $\mathbf{y}\,' = A\mathbf{y}$ מקיים $||\mathbf{y}(t)|| \le \tilde{K}||\mathbf{y}(0)||e^{\mu t}$.

הוכחה. תהי $J = T^{-1}AT$ צורת ז'ורדן של A. אז $\exp(tA) = T\exp(tJ)T^{-1}$. אם λ_i ערך עצמי של A ובצורת ז'ורדן J מתאים לו בלוק בגודל $r \times r$ אז מתאימים לו r פתרונות בלתי תלויים לינארית של המערכת כך שכל אלמנט בוקטור פתרון הוא מהצורה $p(t)e^{\lambda_i t}$ ו־$p(t)$ הוא פולינום ממעלה $r-1$ לכל היותר. לכן קיים קבוע $c_1 > 0$ כך שכל רכיבי פתרונות אלה קטנים מ־$c_1\exp(\mu t)$. מכאן נובעת ההערכה $||\exp(tJ)|| \le c_2\exp(\mu t)$ וכמסקנה, $||\exp(tA)|| \le Ke^{\mu t}$.

כל פתרון של $\mathbf{y}\,' = A\mathbf{y}$ מיוצג בעזרת המטריצה היסודית כ־$\mathbf{y}(t) = \exp(tA)\mathbf{y}(0)$ ומכאן המסקנה $||\mathbf{y}(t)|| \le \tilde{K}||\mathbf{y}(0)||e^{\mu t}$. □

משפט 10.6 א. המערכת (10.3) עם מקדמים קבועים יציבה אם ורק אם כל הערכים העצמיים של A מקיימים $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} \le 0$ ואם, לאלה כך ש־$\mathrm{Re}\{\lambda_i\} = 0$ (אם יש כאלה), הבלוקים המתאימים הם בגודל 1×1 (דהיינו הכפילות האלגברית והגיאומטרית של λ שווה).
ב. המערכת יציבה באופן אסימפטוטי אם ורק אם לכל ערך עצמי $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$.

הוכחה. לפי משפט 10.3 עלינו לקבוע מתי כל הפתרונות חסומים או מתי הם שואפים לאפס, בהתאמה. אם לכל הערכים העצמיים $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$, נקח $\max_i \mathrm{Re}\{\lambda_i\} < \mu < 0$. לפי משפט 10.5 עם $\mu < 0$ כל הפתרונות שואפים ל־0 והמערכת יציבה אסימפטוטית.
אם $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} = 0$ אז לפי הוכחת משפט 10.5 פתרון מתאים יהיה חסום בתנאי שלא יופיע בו אף פולינום של t. זה קורה כש־$r = 1$ ובלוקי ז'ורדן המתאימים הם 1×1. □

משפט 10.6 קובע את יציבות תמונות הפאזה של מערכות לינאריות דו־ממדיות שנדונו בפרק 9, סעיף 9.3. התוצאה מסוכמת בטבלה 10.1.

$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$	צומת	יציב אסימפטוטית
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, ריבוי גיאו' 1	צומת מנוון	יציב אסימפטוטית
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, ריבוי גיאו' 2	כוכב	יציב אסימפטוטית
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	אוכף	בלתי יציב
$\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\alpha < 0$	ספירל	יציב אסימפטוטית
$\lambda_1 = +i\beta,\ \lambda_2 = -i\beta$	מרכז	יציב

טבלה 10.1: יציבות מערכות לינאריות ממעלה שניה

המשפט הבא יאפשר לנו לטפל גם בהפרעה קטנה של (10.3).

משפט 10.7 תהי נתונה המערכת

$$\mathbf{y}\,' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(t, \mathbf{y}), \tag{10.4}$$

בה A מטריצה קבועה וכל ערך עצמי שלה מקיים $\mathcal{R}e\{\lambda_i\} < 0$. אם $\mathbf{g}(t, \mathbf{y}) = o(||\mathbf{y}||)$ במשותף לכל t כאשר $||\mathbf{y}|| \to 0$, אז הפתרון $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$ של (10.4) יציב באופן אסימפטוטי.

הוכחה. נעיר כי מההנחות נובע ש־$\mathbf{g}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ לכל t. לפי נוסחת וריאצית הפרמטרים (6.34) ודוגמא 6.25, פתרון המערכת $\mathbf{y}(t)$ מקיים, כל עוד הוא קיים,

$$\mathbf{y}(t) = \exp(tA)\,\mathbf{y}(0) + \int_0^t \exp\big((t-s)A\big)\,\mathbf{g}(s, \mathbf{y}(s))\,ds.$$

לפי הוכחת משפט 10.5, לכל $\max_i \mathrm{Re}\{\lambda_i\} < -\mu < 0$ קיים קבוע K כך ש־

$$||\exp(tA)|| = ||T\exp(tJ)T^{-1}|| \le ||T||\,||\exp(tJ)||\,||T^{-1}|| \le Ke^{-\mu t}, \quad t \ge 0.$$

לכן

$$||\mathbf{y}(t)|| \le Ke^{-\mu t}||\mathbf{y}(0)|| + \int_0^t Ke^{-\mu(t-s)}||\mathbf{g}(s, \mathbf{y}(s))||\,ds$$

הודות להנחה $\mathbf{g}(t,\mathbf{y}) = o(||\mathbf{y}||)$, לכל $\varepsilon > 0$ קיים δ כך ש־$||\mathbf{g}(t,\mathbf{y})||/||\mathbf{y}|| \le \varepsilon/K$ לכל $||\mathbf{y}|| \le \delta$. בהנחות אלה מתקבל אי השוויון

$$e^{\mu t}||\mathbf{y}(t)|| \le K||\mathbf{y}(0)|| + \varepsilon \int_0^t e^{\mu s}||\mathbf{y}(s)||\, ds \ .$$

לפי הלמה של גרונוול (למה 3.17) עבור הפונקציה $e^{\mu t}||\mathbf{y}(t)||$ נובע כי

$$e^{\mu t}||\mathbf{y}(t)|| \le K||\mathbf{y}(0)||e^{\varepsilon t}.$$

לסיכום

$$||\mathbf{y}(t)|| \le K||\mathbf{y}(0)||e^{-(\mu-\varepsilon)t} \tag{10.5}$$

לכל $t \ge 0$, וכל עוד $||\mathbf{y}|| \le \delta$. אם נבחר $||\mathbf{y}(0)|| \le \min\left\{\delta/K, \delta\right\}$ כל הנחותינו מתקיימות ו־$\mathbf{y}(t) \to \mathbf{0}$ כש־$t \to +\infty$. זה מאשר כי הפתרון $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$ של (10.4) יציב באופן אסימפטוטי. יתר על כן, אם נבחר ε די קטן אז (10.5) משמש כהערכה לקצב הדעיכה של הפתרונות. □

יציבות משוואה לינארית והומוגנית ממעלה n,

$$u^{(n)} + p_1(t)u^{(n-1)} + \ \cdots \ + p_{n-1}(t)u' + p_n(t)u = 0$$

קשורה באופן הדוק ליציבות מערכת לינארית מסדר ראשון. לפי דוגמא 6.1 המשוואה ממעלה n הופכת על ידי ההצבה $\mathbf{v} = (u,\, u',\, \ldots,\, u^{(n-1)})$ למערכת לינארית מהצורה $\mathbf{v}\,' = A(t)\mathbf{v}$. בפרט, משוואה לינארית עם מקדמים קבועים

$$u^{(n)} + a_1u^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}u' + a_nu = 0, \tag{10.6}$$

הופכת על ידי ההצבה $\mathbf{v} = (u,\, u',\, \ldots\, u^{(n-1)})$ למערכת $\mathbf{v}\,' = A\mathbf{v}$ עם

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & & -a_1 \end{pmatrix}.$$

התנאי $||\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0(t)|| < \varepsilon$ הופך עבור המשוואה (10.6) ל־$\max_i |u^{(i)}(t) - u_0^{(i)}(t)| < \varepsilon$ כלומר היציבות בודקת את התנהגות הפתרון ונגזרותיו.

תרגיל 10.3 הראה כי הפולינום האופייני של המטריצה A הוא גם הפולינום האופייני של המשוואה (10.6), דהיינו $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$.
הראה כי לכל ערך עצמי λ של A מתאים בדיוק וקטור עצמי יחיד $(1, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1})$ וכפולותיו. □

משפט 10.8 א. המשוואה (10.6) עם מקדמים קבועים יציבה אם ורק אם כל שרשי הפולינום האופייני מקיימים $\mathrm{Re}\{\lambda\} \le 0$ ואם השרשים המקיימים $\mathrm{Re}\{\lambda\} = 0$ (אם יש כאלה), הם מריבוי 1.
ב. המערכת יציבה באופן אסימפטוטי אם ורק אם כל שרשי הפולינום האופייני מקיימים $\mathrm{Re}\{\lambda\} < 0$.

הוכחה. עלינו רק לקבוע מתי כל הפתרונות חסומים או שואפים לאפס, בהתאמה. אם λ שורש מריבוי k של הפולינום האופייני, אז למשוואה (10.6) יש פתרונות מהצורה $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}$. פתרון $u(t) = t^\ell e^{\lambda t}$ ונגזרותיו $u' = \left(t^\ell + \ell t^{\ell-1}\right) e^{\lambda t}, \dots$ שואפים ל־0 כאשר $t \to +\infty$ אם ורק אם $\mathrm{Re}\{\lambda\} < 0$.
הפתרונות ונגזרותיהם חסומים אם ורק אם $\mathrm{Re}\{\lambda\} \le 0$ ולכל שורש עם $\mathrm{Re}\{\lambda\} = 0$ הפתרון אינו מכיל אף חזקה של t, כלומר השרש מריבוי $k = 1$.

דרך אחרת להוכחת הטענה היא בעזרת תרגיל 9.3. □

את המשפט על יציבות מערכת עם מקדמים קבועים ניתן להכליל למערכת עם מקדמים מחזוריים.

משפט 10.9 תהי $P(t)$ פונקציה מטריצית מחזורית עם מחזור ω. המערכת

$$\mathbf{y}\,' = P(t)\mathbf{y}, \tag{10.7}$$

יציבה באופן אסימפטוטי אם כל המעריכים העצמיים *(characteristic exponents)* שלה בעלי חלק ממשי שלילי.

הוכחה. לפי משפט Floquet (משפט 6.19), מטריצה יסודית $Y(t)$ המתאימה למערכת זו ניתן להציג בצורה

$$Y(t) = K(t)\exp(tR)$$

בה $K(t)$ מטריצה מחזורית עם מחזור ω ו־R מטריצה קבועה. נזכיר כי המעריכים העצמיים של מערכת המשוואות הם הערכים העצמיים של המטריצה R. לפי תרגיל 6.23 ההצבה

$$\mathbf{y}(t) = K(t)\mathbf{w}(t)$$

הופכת את המערכת המחזורית (10.7) למערכת עם מקדמים קבועים $\mathbf{w}\,' = R\mathbf{w}$. מערכת זו יציבה באופן אסימפטוטי כאשר $\mathrm{Re}\{\lambda_i(R)\} < 0$, וערכים עצמיים אלה הם המעריכים העצמיים. מיציבות המערכת עם המקדמים הקבועים נובעת המסקנה למערכת המחזורית (10.7).

באופן שקול אפשר לומר כי הכופלים האופייניים (הערכים העצמיים של מטריצת המונודרומיה $\exp(\omega R)$) קטנים בערכם המוחלט מ־1. □

10.3 השיטה הישירה של Lyapunov - מערכות אוטונומיות

נסתכל כדוגמא במערכת האוטונומית הבלתי לינארית

$$\begin{aligned} x'(t) &= \ y - x^3 \\ y'(t) &= -\ x - y^3. \end{aligned}$$

כדי להבין את התנהגות הפתרונות בקרבת הנקודה הקריטית $(0,0)$ נעקוב אחרי השתנות המרחק מ־$(x(t),y(t))$ אל $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(x^2(t)+y^2(t)\Big) &= 2xx' + 2yy' = 2x(y-x^3) + 2y(-x-y^3) \\ &= -2(x^4+y^4) < 0, \end{aligned}$$

כלומר מסלול של כל פתרון המגיע אל המעגל $x^2+y^2=R^2$ נכנס לפנים המעגל ומתקרב לראשית. אנו מצפים לפיכך כי הפתרון $(x(t),y(t)) \equiv (0,0)$ יהיה יציב באופן אסימפטוטי. רעיון זה מהווה את היסוד לשיטה הישירה)השיטה שניה(של ליאפונוב. לשם בהירות הדיון נדון בסעיף זה במערכות אוטונומיות בלבד. במערכות בלתי אוטונומיות נדון בסעיף 10.5.

תהי נתונה המערכת האוטונימית

$$\mathbf{y}\,'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \tag{10.8}$$

כאשר $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(y_1,\ldots,y_n)$, $\mathbf{f}: D \subset R^n \to R^n$ רציפה ומבטיחה יחידות פתרון לבעיות התחלה. כמו כן יהי $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ כלומר $\mathbf{0} \in D$ נקודה קריטית של המערכת ו־$\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$ הוא פתרון של המערכת.

ננסה להכליל את פוקצית המרחק x^2+y^2 ולהחליף אותה בפונקציה סקלרית, דיפרנציאבילית וחיובית $V(\mathbf{y})$ המתאפסת בנקודה הקריטית $\mathbf{0}$. **הנגזרת של** $V(\mathbf{y})$ **לאורך פתרון** $\mathbf{y}(t)$ של המערכת (10.8) (orbital derivative), מוגדרת כ־

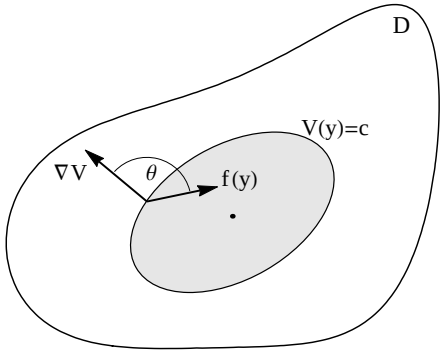
$$\frac{d}{dt}\,V(\mathbf{y}(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt}\Big|_{\mathbf{y}(t)=\mathbf{y}} = \nabla V(\mathbf{y})\cdot\mathbf{f}(\mathbf{y})$$

אגף ימין תלוי ב־$\mathbf{y}$ בלבד ואפשר לחשבו באופן ישיר מהמערכת הדיפרנציאלית מבלי להכיר את פתרונותיה. נסמן אותו ב־

$$\dot{V}(\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \nabla V(\mathbf{y})\cdot\mathbf{f}(\mathbf{y})$$

ונסביר את משמעותו הגיאומטרית. מכיון ש־$V(\mathbf{y})$ מתאפס בנקודה הקריטית $\mathbf{y}=\mathbf{0}$ וחיובי בסביבתו, עבור $c>0$ די קטן הקבוצה $\{\mathbf{y}\big|V(\mathbf{y})<c\}$ (או רכיב שלה) מכילה את הנקודה $\mathbf{y}=\mathbf{0}$. ∇V הוא הנורמל החיצוני למשטח הגובה $V(\mathbf{y})=c$ ו־$\dot{V}(y) = ||\nabla V||\cdot||\mathbf{f}||\cos\theta$, כש־$\theta$ היא הזוית בין הנורמל החיצוני לבין כיוון המסלול, $\mathbf{f}$. ההנחה $\dot{V}(y)<0$ מבטיחה

כי $\pi/2 < |\theta| < \pi$ ובנקודה של משטח הגובה כיוון המסלול מצביע אל פנים משטח הגובה, לתוך $\{V(\mathbf{y}) < c\}$. ראה איור 10.1.



איור 10.1: $\dot{V}(y) = \nabla V(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}) < 0$

נעבור להגדרה פורמלית:

הגדרה 10.10 פונקציה סקלרית $V(\mathbf{y})$, $V : D \subset R^n \to R$, $\mathbf{0} \in D$ נקראת **מוגדרת חיובית** *(positive definite)* אם $V(\mathbf{0}) = 0$ ו- $V(\mathbf{y}) > 0$ לכל $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ ב-D.
הפונקציה $V(\mathbf{y})$ נקראת **מוגדרת חיובית למחצה** *(positive semi-definite)* אם $V(\mathbf{y}) \geq 0$ ב-D.

משפט 10.11 (ליאפונוב) נתונה המערכת האוטונומית (10.8) בתחום $D \subset R^n$ בעלת נקודה קריטית ב-$D \in \mathbf{0}$. אם קיימת פונקציה דיפרנציאבלית סקלרית $V(\mathbf{y})$, $V : D \subset R^n \to R$, כך ש-
(i) $V(\mathbf{y})$ מוגדרת חיובית,
(ii) $\dot{V}(y)$ מוגדרת שלילית למחצה, דהיינו $\dot{V}(\mathbf{y}) = \nabla V(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}) \leq 0$,
אז הפתרון $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$ של המערכת (10.8) הוא יציב. פונקציה $V(\mathbf{y})$ המקיימת תנאים אלה נקראת **פונקציית ליאפונוב** *(Lyapunov function)*.

משפט 10.12 (ליאפונוב) אם למערכת (10.8) המתוארת במשפט 10.11 קיימת $V(\mathbf{y})$ כך ש-
(i) $V(\mathbf{y})$ מוגדרת חיובית,
(ii) $\dot{V}(\mathbf{y})$ מוגדרת שלילית, כלומר $\dot{V}(\mathbf{y}) < 0$ ל-$\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$,
אז הפתרון $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$ יציב באופן אסימפטוטי. פונקציה $V(\mathbf{y})$ כזו נקראת **פונקציית ליאפונוב במובן החריף** *(strict Lyapunov function)*.

הוכחת משפט 10.11. להוכחת היציבות של פתרון האפס $\mathbf{y} \equiv \mathbf{0}$ עלינו להראות כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים δ כך ש-$||\mathbf{y}(0)|| < \delta$ גורר $||\mathbf{y}(t)|| < \varepsilon$ לכל $t > 0$. נבחר $0 < r \leq \varepsilon$ כך

שהכדור $B_r = \{||\mathbf{y}|| \le r\}$ מוכל בתחום D שבו מוגדרת פונקציית ליאפונוב $V(\mathbf{y})$. $V(\mathbf{y})$ רציף ב־B_r לכן

$$m = \min_{||\mathbf{y}||=r} V(\mathbf{y}) > 0.$$

נקח $0 < c < m$ ונגדיר קבוצה $K_c = \left\{\mathbf{y} \;\middle|\; V(\mathbf{y}) \le c\right\} \cap B_r$. זו קבוצה סגורה וחסומה המכילה את הנקודה $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ כי $V(\mathbf{0}) = 0$. למעשה K_c מוכלת ממש בפנים של B_r. אלמלא כך, היתה ל־K_c נקודה $\mathbf{p}$ על שפת B_r ושם $V(\mathbf{p}) \ge m > c$, סתירה.

הקבוצה K_c אינווארינטית במובן שכל מסלול פתרון המתחיל בה, ממשיך להשאר בה בהמשך. כי אם $\mathbf{y}(0) \in K_c$, כלומר $V(\mathbf{y}(0)) \le c$, אז הודות ל־$\dot{V}(y) \le 0$, גם

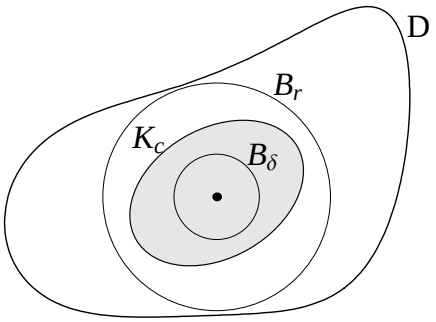
$$V(\mathbf{y}(t)) = V(\mathbf{y}(0)) + \int_0^t \dot{V}(\mathbf{y}(s))\, ds \le V(\mathbf{y}(0)) \le c$$

ו־$\mathbf{y}(t) \in K_c$ לכל $0 \le t < \infty$. מבחינה גיאומטרית K_c היא "מלכודת" שפתרון המתחיל בה נשאר בתוכה לעד.

$V(\mathbf{y})$ רציף ו־$V(\mathbf{0}) = 0$ לכן קיים δ כך שכאשר $||\mathbf{y}|| < \delta$ אז $V(\mathbf{y}) \le c$. במילים אחרות,

$$B_\delta \subset K_c \subset B_r \subset D\ .$$

ראה איור 10.2. בפרט כאשר $\mathbf{y}(0) \in B_\delta \subset K_c$ אז בהמשך גם $\mathbf{y}(t) \in K_c \subset B_r$. לסיכום, ל־$\varepsilon > 0$ הנתון מצאנו δ כך שאם $||\mathbf{y}(0)|| < \delta$ אז $||\mathbf{y}(t)|| < r \le \varepsilon$ לכל $t \ge 0$, כנדרש. □



איור 10.2: הוכחת יציבות לפי משפט ליאפונוב

הוכחת משפט 10.12. לפי המשפט הקודם כבר ידוע כי פתרון האפס $\mathbf{y} \equiv \mathbf{0}$ יציב. אך עתה נוסיף את ההנחה המחמירה כי $\dot{V}(\mathbf{y}) < 0$ לכל $\mathbf{y} \ne \mathbf{0}$.

כמו בהוכחת משפט 10.11 הדיון יתנהל בכדור B_r המוכל ב־D והמכיל קבוצה אינווארינטית K_c, $K_c \subset B_r \subset D$. נקח שוב פתרון $\mathbf{y}(t)$ עם $\mathbf{y}(0) \in K_c$ ונוכיח כי $\lim_{t\to\infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$.

בשלב הראשון נראה כי $\lim_{t\to\infty} V(\mathbf{y}(t)) = 0$. כפי שראינו למעלה, $\mathbf{y}(t)$ נשאר בקבוצה הקומפקטית K_c לכל $0 \le t < \infty$. הודות להנחה $\dot V(\mathbf{y}) < 0$, $V(\mathbf{y}(t))$ מונוטוני יורד ואי־שלילי, לכן קיים גבול $\lim_{t\to\infty} V(\mathbf{y}(t)) = \eta \ge 0$ ו־$V(\mathbf{y}(t)) \ge \eta$. נראה כי $\eta = 0$.

נניח להפך כי $\eta > 0$. $V(\mathbf{0}) = 0$ ו־$V(\mathbf{y})$ רציף, לכן יש כדור די קטן $B_\beta = \{||\mathbf{y}|| \le \beta\}$ שבו $V(\mathbf{y}) < \eta/2$, כלומר $B_\beta \subset K_{\eta/2}$. הפתרון $\mathbf{y}(t)$ אינו יכול להכנס לכדור B_β זה כי כזכור $V(\mathbf{y}(t)) \ge \eta$, לכן $\beta \le ||\mathbf{y}(t)|| \le r$ לכל $t \ge 0$. $\dot V(\mathbf{y})$ רציף ושלילי לכן בקליפה כדורית זו נסמן

$$\max_{\beta \le ||\mathbf{y}|| \le r} \dot V(\mathbf{y}) = -\mu < 0.$$

$$V(\mathbf{y}(t)) - V(\mathbf{y}(0)) = \int_0^t \dot V(\mathbf{y}(s))\, ds \le -\mu t, \qquad t \ge 0.$$

זה סותר את ההנחה כי $V(\mathbf{y})$ מוגדר חיובי. סתירה זו מחייבת $\eta = 0$ ו־$\lim_{t\to\infty} V(\mathbf{y}(t)) = 0$.

לבסוף נסיק כי $\lim_{t\to\infty} \mathbf{y}(t) = 0$. אחרת יש תת־סדרה $t_k \to \infty$ כך ש־$\mathbf{y}(t_k) \to \boldsymbol{\xi} \ne \mathbf{0}$ ו־$V(\mathbf{y}(t_k)) \to V(\boldsymbol{\xi}) > 0$ בסתירה ל־$V(\mathbf{y}(t)) \to 0$. זה מאמת כי $\mathbf{y}(t) \to 0$. □

הערות. א. בעזרת משפט ליאפונוב אפשר להוכיח יציבות מבלי לפתור את המערכת.
ב. חסרון השיטה הוא שאין דרך חד משמעית למצוא פונקציית ליאפונוב ולא כל פונקציית ליאפונוב יעילה באותה מידה. למשל למערכת

$$\begin{aligned} x'(t) &= y \\ y'(t) &= -x - y + y^2 \end{aligned}$$

והנקודה הקריטית $(0,0)$ ניתן לבחור $V_1(x,y) = x^2 + y^2$. הנגזרת המסלולית היא

$$\dot V_1 = 2x \cdot y + 2y(-x - y + y^2) = -2y^2(1 - y) \le 0$$

לכל $y \le 1$. מכאן נובע כי הנקודה הקריטית $(0,0)$ יציבה אולם לא ניתן להסיק מכאן כי היא יציבה באופן אסימפטוטי.

מצד שני ננסה לאותה מערכת את $V_2(x,y) = x^2 + xy + y^2$ כפונקציית ליאפונוב. בעזרת $|xy| \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, מקבלים $V_2(x,y) = x^2 + xy + y^2 \ge \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ המוגדר חיובי,

$$\begin{aligned} \dot V_2 &= (2x + y)y + (x + 2y)(-x - y + y^2) \\ &= -(x^2 + xy + y^2) + y^2(x + 2y) \le -(x^2 + y^2)\big(\frac{1}{2} - x - 2y\big) \end{aligned}$$

המוגדר שלילי ל־x, y קטנים. מכאן נובע כי הנקודה הקריטית יציבה גם באופן אסימפטוטי. למסקנה זו אפשר יהיה להגיע גם בעזרת משפט 10.7 בסעיף 10.2. □

דוגמא 10.4 נסתכל במשוואה אוטונמית, סקלרית $y'(t) = -f(y)$ בה $f(0) = 0$, $yf(y) > 0$ לכל $y \neq 0$. הודות להנחה זו הפונקציה $V(y) = \int_0^y f(s)\,ds$ מוגדרת חיובית ו־$\dot{V}(y)$ מוגדרת שלילית כי

$$\dot{V}(y) = \frac{d}{dt}\,V(t,\mathbf{y}) = \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt} = -f^2(y) < 0, \qquad y \neq 0.$$

לכן $y(t) \equiv 0$ פתרון יציב באופן אסימפטוטי. □

דוגמא 10.5 במשפט 10.3 מצאנו קריטריונים ליציבות מערכת לינארית עם מקדמים קבועים

$$\mathbf{y}\,' = A\mathbf{y} \tag{10.9}$$

בעזרת הערכים העצמיים של מטריצת המקדמים. מעניין לטפל בשאלה זו גם בעזרת פונקציית ליאפונוב, כי היא תוכל לשמש בסיס גם לחקירת פרטורבציות לא לינאריות. נחפש פונקציית ליאפונוב בצורת תבנית רבועית מוגדרת חיובית מהצורה

$$V(\mathbf{y}) = \sum k_{ij}y_iy_j = \mathbf{y}^TK\mathbf{y} > 0, \qquad \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \tag{10.10}$$

כש־K מטריצה סימטרית. (בהנחת הסימטריה אין מגבלה כי ניתן להחליף כל K ב־$(K + K^T)/2$). נעיר כי על פי קריטריון סילווסטר[2] תבנית רבועית מוגדרת חיובית אם ורק אם כל המינורים הראשיים של המטריצה חיוביים, כלומר $\det\left|\,k_{ij}\,\right|_{1\le i,j\le m} > 0$, $m = 1, 2, \ldots, n$.

משפט 10.13 אם המטריצה A בעלת ערכים עצמיים עם חלק ממשי שלילי אז למערכת (10.9) קיימת פונקציית ליאפונוב בסוגן החריף בצורה $V(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^TK\mathbf{y}$, K מטריצה סימטרית מוגדרת חיובית.

הוכחה. כדי שיתקיים

$$\dot{V}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}'^TK\mathbf{y} + \mathbf{y}^TK\mathbf{y}' = \mathbf{y}^T\left(A^TK + KA\right)\mathbf{y} < 0, \qquad \mathbf{y} \neq \mathbf{0},$$

המטריצה $A^TK + KA$ חייבת להיות סימטרית מוגדרת שלילית,

$$A^TK + KA = C, \qquad C \text{ מוגדר שלילי.} \tag{10.11}$$

זה מקרה פרטי של משוואת סילווסטר, $AX + XB = C$. נחוץ להוכיח כי ל־(10.11) יש פתרון K סימטרי ומוגדר חיובי. ננסח ונוכיח זאת כתוצאה נפרדת.

משפט 10.14 תהי A בעלת ערכים העצמיים עם חלק ממשי שלילי ו־C מטריצה סימטרית, מוגדרת חיובית, אז למשוואה המטריצית $A^TK + KA = -C$ קיים פתרון יחיד K והוא סימטרי ומוגדר חיובי וניתן על ידי

$$K = \int_0^\infty \exp(sA^T)\,C\exp(sA)\,ds.$$

[2] James Sylvester, 1814-1897

הוכחה. נכפול את (10.11) מימין ב־$\exp(tA)$ (שייכתב למען הנוחיות כ־e^{tA}) ומשמאל ב־$e^{tA^T} = \exp(tA^T)$:

$$A^T e^{tA^T} K e^{tA} + e^{tA^T} K e^{tA} A = -e^{tA^T} C e^{tA}.$$

(המטריצות A, e^{tA} מתחלפות). אגף שמאל הוא הנגזרת $\frac{d}{dt}\left(e^{tA^T} K e^{tA}\right)$ וכך

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA^T} K e^{tA}\right) = -e^{tA^T} C e^{tA}$$

על פי ההנחות ולפי משפט 10.5, קיים קבוע $\max_i \mathrm{Re}\{\lambda_i(A)\} < \mu < 0$, כך ש־ $||\exp(tA)||,\ ||\exp(tA^T)|| \le K e^{\mu t}$ מתקבל $0 \le t \le \infty$. על ידי אינטגרציה על

$$e^{tA^T} K e^{tA}\Big|_0^\infty = 0_{n\times n} - K = -\int_0^\infty e^{tA^T} C e^{tA}\, dt$$

והאינטגרל מתכנס. בדיקה ישירה מראה כי K שהוגדר הוא אכן סימטרי. □

נחזור להוכחת משפט 10.13. בתהליך שלמעלה בחירה מתאימה פשוטה של C היא $C = I$. בשיטה זו מתקבלת פונקציית ליאפונוב

$$V(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T K \mathbf{y} = \int_0^\infty \mathbf{y}^T e^{tA^T} e^{tA} \mathbf{y}\, dt = \int_0^\infty \left|\left|e^{tA}\mathbf{y}\right|\right|^2 dt$$

אשר באמת מוגדרת חיובית. על פי בחירת K, $\dot V(\mathbf{y}) < 0$ ל־$\mathbf{y} \ne \mathbf{0}$ וקבלנו פונקציית ליאפונוב רבועית כדרוש. □

במשפט 10.11 הראינו כי כאשר $||\mathbf{y}(0)||$ די קטן אז $\mathbf{y}(t) \to \mathbf{0}$. זו **יציבות אסימפטוטית לוקלית**. אוסף כל הנקודות שפתרון המתחיל מהן מתכנס אל $\mathbf{0}$ נקרא **אגן המשיכה** של $\mathbf{0}$ (region of attraction, basin). קשה לקבוע במדויק מהי קבוצה זו, אך לפחות K_c מוכל בה. נשאלת השאלה באיזה תנאים כל פתרון המתחיל בנקודה כלשהי של R^n מתכנס ל־$\mathbf{0}$? מצב זה נקרא **יציבות אסימפטוטית גלובלית**. השיקולים הבאים מתארים איזה הנחות נוספות נחוצות לכך.

כדי שפונקציית ליאפונוב תבטיח יציבות אסימפטוטית גלובלית, בוודאי שהיא חייבת להיות מוגדרת ב־$D = R^n$. על מנת להכליל את הוכחת משפט 10.11, כל נקודה $\mathbf{y} \in R^n$ צריכה להיות מוכלת באיזו קבוצה חסומה K_c. כדי ש־K_c יהיה חסום בכדור B_r חייב להיות

$$\inf_{||\mathbf{y}||>r} V(\mathbf{y}) > c$$

מסיבה זו נדרוש כי $V(\mathbf{y}) \to \infty$ כאשר $||\mathbf{y}|| \to \infty$.

משפט 10.15 נתונה המערכת (10.8) בכל הפרחב R^n ולה נקודה קריטית $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. אם בנוסף להנחות משפט 10.11, סעיף ב', פונקציית ליאפונוב $V(\mathbf{y})$ מקיימת גם $V(\mathbf{y}) \to \infty$ כאשר $||\mathbf{y}|| \to \infty$, אז הפתרון $\mathbf{y} \equiv \mathbf{0}$ יציב אסימפטוטית באופן גלובלי.

הוכחה. לכל נקודה $\mathbf{p} \in R^n$ נסמן $c = V(\mathbf{p})$. מכיוון ש־$V(\mathbf{y}) \to \infty$, אפשר להתאים r די גדול כך ש־ $V(\mathbf{y}) > c$ כאשר $||\mathbf{y}|| > r$. אי לכך $\mathbf{p} \in K_c \subset B_r$ ו־K_c חסום. מכאן מקבלים כמו במשפט 10.11, סעיף ב' כי אם $\mathbf{y}(0) = \mathbf{p} \in K_c$ אז $||\mathbf{y}(t)|| \to 0$. □

במקביל למשפט ליאפונוב (משפט 10.11) על יציבות, קיים גם קריטריון לאי־יציבות.

משפט 10.16 נתונה המערכת האוטונומית (10.8),

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$$

ולה נקודה קריטית $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, כלומר $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. נניח כי בכדור $B = \{||y|| \le R\}$ מוגדרת פונקציה $V(\mathbf{y})$, $V : B \subset R^n \to R$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות ב־B, $V(\mathbf{0}) = 0$, אשר מקיימת:

(i) בכל סביבה זי קטנה של הנקודה הקריטית $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ קיימת נקודה $\mathbf{y}_0$ בה $V(\mathbf{y}_0) > 0$.

(ii) $\dot{V}(\mathbf{y}) = \nabla V(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}) > 0$ לכל $0 < ||\mathbf{y}|| \le R$.

בהנחות אלה $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ בלתי יציבה.

הוכחה. ללא הגבלת כלליות נוכל להניח כי עבור δ די קטן כל פתרון של המערכת כך ש־$||\mathbf{y}(\mathbf{0})|| < \delta$ מוגדר לכל $0 \le t < \infty$. אחרת $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ אינו יציב על פי ההגדרה ואין מה להוכיח.

לפי ההנחה בכל סביבה $||\mathbf{y}|| < \delta$ ישנה נקודה $\boldsymbol{\xi}_\delta$ כך ש־$V(\boldsymbol{\xi}_\delta) > 0$. יהי $\mathbf{y}_\delta(t)$ הפתרון הנקבע על ידי תנאי ההתחלה $\mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\xi}_\delta$. כאמור למעלה, הוא מוגדר לכל $0 \le t < \infty$. הפונקציה $V(\mathbf{y}_\delta(t))$ מקבלת ב־$t = 0$ ערך חיובי $V(\mathbf{y}_\delta(0)) = V(\boldsymbol{\xi}_\delta) > 0$ ובהמשך היא עולה כי $\dot{V}(\mathbf{y}) > 0$. מצד שני נתון כי $V(\mathbf{0}) = 0$ לכן יש סביבה $||y|| \le r$ שאליה הפתרון $\mathbf{y}_\delta(t)$ לא נכנס לעולם. בתוך הטבעת $r \le ||\mathbf{y}|| \le R$ קיים $\min\limits_{r \le ||\mathbf{y}|| \le R} \dot{V}(\mathbf{y}_\delta) = m > 0$ ולפיכך $\dot{V}(\mathbf{y}_\delta(t)) \ge m > 0$ לכל $t \ge 0$ כל עוד $||\mathbf{y}_\delta(t)|| \le R$. כך מתקבלת ההערכה

$$V(\mathbf{y}_\delta(t)) = V(\mathbf{y}_\delta(0)) + \int_0^t \dot{V}(\mathbf{y}_\delta(s))\, ds \ge V(\boldsymbol{\xi}_\delta) + mt.$$

ו־$V(\mathbf{y}_\delta(t))$ בלתי חסום מלמעלה כש־$t \to \infty$. אבל $V(\mathbf{y})$ רציף וחסום ב־$||\mathbf{y}|| \le R$ לכן המסלול $\mathbf{y}_\delta(t)$ חייב לעזוב את הכדור $||\mathbf{y}|| \le R$. בזה הראינו כי בכל סביבה $||\mathbf{y}|| < \delta$ מתחיל פתרון העוזב לבסוף את הכדור $||\mathbf{y}|| \le R$. □

10.4 עקרון האינווריאנטיות של LaSalle

מטרת הדוגמא הבאה הוא להצביע על חולשה מסוימת של משפט ליאפונוב.

דוגמא 10.6 סעיף 3.12 דן במשוואות אוטונומיות מסדר שני מהצורה

$$y''(t) + f(y) = 0, \tag{10.12}$$

(שביניהן נמנית גם משוואת המטוטלת שבדוגמא 1.5). כל פתרון $y(t)$ של (10.12) מקיים את משוואת האנרגיה, $\frac{1}{2}y'^2 + \int_0^y f(s)\, ds \equiv \mathrm{C}$. נניח כי $f(0) = 0$ (כלומר $y(t) \equiv 0$ פתרון)

וכי $yf(y) > 0$ לכל $y \neq 0$, ונבדק את יציבות הפתרון $y(t) \equiv 0$. המשוואה (10.12) שקולה למערכת

$$\begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= -f(y). \end{aligned} \tag{10.13}$$

על פי משוואת האנרגיה נבחר להגדיר $V(y,z) = \frac{1}{2}z^2 + \int_0^y f(s)\,ds$. לפי הנחותינו $V(0,0) = 0$ ו־$V(y,z) > 0$ לכל $(y,z) \neq (0,0)$. לפי צורת בנייתו ברור ש־

$$\dot{V}(y,z) = V_y y' + V_z z' = f(y)z + z\big(-f(y)\big) \equiv 0.$$

לכן V היא פונקציית ליאפונוב והפתרון $(y,z) = (y,y') = (0,0)$ יציב.

נוסיף למשוואה (10.12) מחובר ky' המייצג כוח בולם (damping),

$$y''(t) + ky' + f(y) = 0, \qquad k > 0. \tag{10.14}$$

המשוואה שקולה למערכת

$$\begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= -kz - f(y). \end{aligned} \tag{10.15}$$

שוב נבחר $V(y,z) = \frac{1}{2}z^2 + \int_0^y f(s)\,ds$. כמקודם $V(0,0) = 0$ ו־$V(y,z) > 0$ לכל $(y,z) \neq (0,0)$ אך הפעם

$$\dot{V}(y,z) = V_y y' + V_z z' = f(y)z + z\big(-kz - f(y)\big) = -kz^2 \leq 0.$$

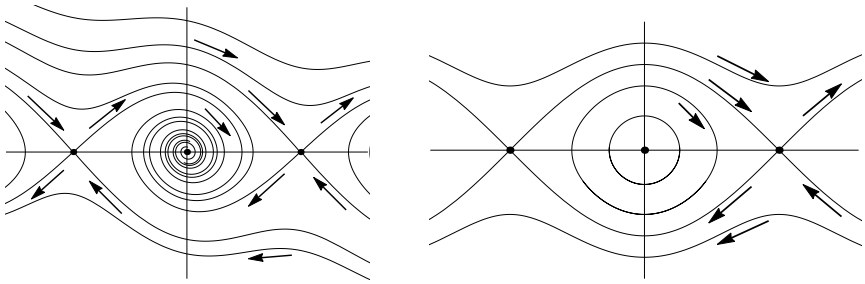
לכן V פונקציית ליאפונוב וגם הפעם $y(t) \equiv 0$ פתרון יציב של (10.14). לעומת זאת אין זו פונקציית ליאפונוב במובן החריף ואין בידינו להסיק דבר על יציבות אסימפטוטית.

מקרים קלסיים של המשוואות (10.12) ו־(10.14) הן משוואת המטוטלת $\theta'' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$ ומשוואת המטוטלת עם חכוך $\theta'' + k\theta' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$ וכמערכת,

$$\begin{aligned} \theta' &= \psi, \\ \psi' &= -k\psi - \frac{g}{L}\sin\theta. \end{aligned}$$

כמו למעלה אפשר להסיק בעזרת פונקציית ליאפונוב $V(\theta,\psi) = \frac{1}{2}\psi^2 + \frac{g}{L}(1-\cos\theta)$ כי הפתרון $\theta(t) \equiv 0$ יציב. אבל עבור המערכת עם חכוך $\dot{V}(\theta,\psi) = -k\psi^2 \leq 0$ המתאפס על כל הישר $\psi = 0$. לכן דרך זו לא מאפשרת להסיק דבר על יציבות אסימפטוטית.

אך האינטואיציה והנסיון היומיומי מורים כי תנודות מטוטלת עם חכוך דועכות. גם חישוב נומרי של תמונות הפאזה של מטוטלת ללא חכוך וזו עם חכוך מפנות אותנו לכיוון זה. ראה איורים 10.3, א' ו־ב'. כל זה רומז על קיום יציבות אסימפטוטית. □



איור 10.3: א. תמונת פאזה של מטוטלת ב. מטוטלת עם חכוך

המשפט הבא מנתח יציבות אסימפטוטית של מערכת בעזרת קבוצת ההתאפסות של $\dot{V}$,

$$N = \{\, \mathbf{y} \,|\, \dot{V}(\mathbf{y}) = 0\}.$$

משפט 10.17 *(LaSalle's Invariance Principle)*[3] נתונה המערכת האוטונומית (10.8) בתחום $D \subset R^n$, $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, ותהי $K \subset D$ קבוצה קומפקטית ואינווריינטית ביחס למערכת הדיפרנציאלית. תהי $V(\mathbf{y})$, $V : K \to R$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות שמקיימת $\dot{V}(\mathbf{y}) \le 0$ ב־K ו־N קבוצת ההתאפסות שלה, $N = \{\, \mathbf{y} \,|\, \dot{V}(\mathbf{y}) = 0\}$. ולבסוף תהי $\mathcal{I}$ הקבוצה האינווריינטית המקסימלית המוכלת ב־N. אז כל פתרון המתחיל ב־K שואף אל $\mathcal{I}$.

הוכחה. נקח פתרון $\mathbf{y}(t)$ המתחיל בנקודה $\mathbf{y}(0)$ של K. מכיון ש־$\dot{V}(\mathbf{y}) \le 0$ שם, $V(\mathbf{y}(t))$ פונקציה לא עולה. מאידך גיסא, הפונקציה $V(\mathbf{y})$ רציפה על קבוצה קומפקטית לכן חסומה מלמטה וקיים גבול $\lim_{t\to\infty} V(\mathbf{y}(t)) = c$.

נסמן את מסלולו של הפתרון $\mathbf{y}(t)$ עבור $t \ge 0$ ב־C^+ ואת קבוצת הגבול שאליו המסלול שואף ב־$L(C^+)$. (ראה הגדרה 9.12). מכיון ש־K קבוצה אינווריינטית, המסלול C^+ של הפתרון $\mathbf{y}(t)$ נשאר תמיד ב־K ומכיון ש־K קבוצה סגורה, גם $L(C^+)$ מוכל בו.

כל נקודה $\mathbf{p} \in L(C^+)$ היא נקודת גבול, לכן יש סדרה עולה $t_n \to \infty$ כך ש־$\mathbf{y}(t_n) \to \mathbf{p}$. הודות לרציפות V, $V(\mathbf{p}) = V(\lim \mathbf{y}(t_n)) = \lim V(\mathbf{y}(t_n)) = c$ דהיינו $V(\mathbf{y}) \equiv c$ על $L(C^+)$.

נסתכל בפתרון $\mathbf{z}(t)$ המתחיל בנקודה $\mathbf{p} \in L(C^+)$ של קבוצת הגבול. לפי משפט 9.13, הקבוצה $L(C^+)$ אינווריינטית, לכן כל המסלול של $\mathbf{z}(t)$ מוכל ב־$L(C^+)$ וכך $V(\mathbf{z}(t)) \equiv c$. מכאן נובע כי $\dot{V}(\mathbf{z}(t)) = 0$ ו־$\mathbf{p} \in L(C^+)$ מוכל ב־$\mathcal{N}$, קבוצת ההתאפסות של $\dot{V}$. בתור קבוצה אינווריינטית $L(C^+)$ מוכל בקבוצה האינווריינטית המקסימלית $\mathcal{I}$, $L(C^+) \subset \mathcal{I} \subset N$. לסיכום, הפתרון $\mathbf{y}(t)$ מתקרב אל $\mathcal{I}$, כטענת המשפט. □

[3] Joseph LaSalle, 1916-1983

הערה. בניגוד למשפט ליאפונוב אין כאן הנחה על סימן $V(\mathbf{y})$. גם טענת המשפט שונה מזו של משפט ליאפונוב. בעוד שמשפט ליאפונוב מוכיח כי נקודה קריטית מסוימת יציבה באופן אסימפטוטי, הרי משפט זה מאפיין את הקבוצה אליה יכולים הפתרונות לשאוף.

כשמעונינים להוכיח שפתרון $\mathbf{y}(t)$ שואף לנקודה הקריטית $\mathbf{0}$, מספיק להראות כי הקבוצה האינווריאנטית היחידה ב־N היא נקודת הראשית $\mathcal{I} = \{\mathbf{0}\}$. זאת אומרת, אף פתרון לא נשאר ב־$\mathcal{N}$ למעט פתרון האפס. נקבל זאת כמקרה פרטי של משפט 10.17.

משפט 10.18 נתונה המערכת האוטונומית (10.8) עם נקודה קריטית $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. תהי $V(\mathbf{y})$, $V : D \to R$ פונקציה מוגדרת חיובית ובעלת נגזרות חלקיות רציפות בתחום D המכיל את $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ שמקיימת $\dot{V}(\mathbf{y}) \le 0$ ב־D. ולבסוף תהי $N = \{\, \mathbf{y} \,|\, \dot{V}(\mathbf{y}) = 0\}$ קבוצת ההתאפסות. אם אף פתרון אינו נשאר באופן זהותי ב־N למעט הפתרון הזהותית $\mathbf{0}$ אז הראשית יציבה באופן אסימפטוטי.

הוכחה. מכיוון ש־$V(\mathbf{y})$ מוגדרת חיובית, הקבוצה $K_c = \{\ V(\mathbf{y}) \le c\}$ חסומה עבור c די קטן, מוכלת ב־D ואינווריאנטית, והנחות משפט 10.17 מתקיימות. בהנחותינו $\mathcal{I} = \{\mathbf{0}\}$ ופתרונות המתחילים די קרוב ל־$\mathbf{0}$ מתכנסים אליו.

משפט זה ידוע גם בשם משפט Barbashin-Krasovskii. □

ניישם את משפט 10.18 למערכת (10.15). כאן הקבוצה $N = \{\, \mathbf{y} \,|\dot{V}(\mathbf{y}) = 0\}$ היא הישר $z = 0$ והנקודה הקריטית $(0,0)$ מוכלת בה. אף מסלול אחר אינו מוכל ב־N, כי אם $z = 0$, $y \neq 0$ אז $z' = -f(y) \neq 0$. לכן $\mathcal{I} = \{(0,0)\}$. כך כל מסלול הנמצא בסביבת הנקודה הקריטית חייב לשאוף אליה והיא יציבה באופן אסימפטוטי. משוואת מטוטלת עם חכוך היא מקרה פרטי.

תרגיל 10.7 בסעיף 9.6 מצאנו תנאים מספיקים לקיום פתרון מחזורי למשוואת Liénard, $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$. נתרגם אותו למערכת האוטונומית

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -f(x)y - g(x). \end{aligned}$$

הראה בעזרת פונקציית ליאפונוב $V(x,y) = \dfrac{1}{2}y^2 + \displaystyle\int_0^x f(s)\,ds$ והעקרון של LaSalle כי אם $g(0) = 0$, $x\,g(x) > 0$ לכל $x \neq 0$ ו־$f(x) > 0$ לכל x אז הפתרון $x(t) \equiv 0$ יציב באופן אסימפטוטי.

10.5 השיטה הישירה של Lyapunov - מערכות לא אוטונומיות

משפט 10.11 ומשפט 10.15 דנים במערכות אוטונומיות בעזרת פונקציית ליאפונוב מהצורה $V(\mathbf{y})$. שני המשפטים הבאים הם המשפטים המקוריים של ליאפונוב עבור מערכות לא אוטונומיות.

משפט 10.19 תהי נתונה המערכת $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t,\mathbf{y})$ בתחום D המכיל את הנקודה $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, $\mathbf{f}(t,\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$. תהי $V(t,\mathbf{y})$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות ונגזרתה לאורך מסלול $y(t)$

$$\dot{V} = \frac{d}{dt}\,V(t,\mathbf{y}(t)) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla V(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(t,\mathbf{y}).$$

אם *(i)* קיימת פונקציה מוגדרת חיובית $W_1(\mathbf{y})$ כך ש־$W_1(\mathbf{y}) \le V(t,\mathbf{y})$,
(ii) הנגזרת לאורך המסלול מקיימת $\dot{V}(\mathbf{y}) \le 0$,
אז הפתרון $\mathbf{y} \equiv \mathbf{0}$ יציב.

הוכחה. ההוכחה עוקבת בקוים כללים אחרי זו של משפט 10.11, בתוספת חסם בלתי תלוי בזמן ל־$V(t,\mathbf{y})$.

יהי נתון $\varepsilon > 0$. נבחר $0 < r \le \varepsilon$ וכדור $B_r = \{||\mathbf{y}|| \le r\}$ סביב הראשית כך ש־$B_r \subset D$. נבחר c,

$$0 < c < \min_{||\mathbf{y}||=r} W_1(\mathbf{y}).$$

נגדיר קבוצות $K_{c,t} = \left\{\mathbf{y} \in B_r \,\middle|\, V(t,\mathbf{y}) \le c\right\}$, $K_1 = \left\{\mathbf{y} \,\middle|\, W_1(\mathbf{y}) \le c\right\}$ הראשונה תלויה ב־t והשניה בלתי תלויה. הודות ל־$W_1(\mathbf{y}) \le V(t,\mathbf{y})$, ברור ש־

$$K_{c,t} \subset K_1 \subset B_r \subset D$$

לכל t וכולן מכילות את נקודת הראשית. יתר על כך, K_1 מוכלת ממש בפנים של B_r.

נקח פתרון הנקבע על ידי תנאי התחלה $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \in K_{c,t_0}$. פתרון זה מוגדר כל עוד הוא מוכל ב־B_r. שם

$$V(t,\mathbf{y}(t)) - V(t_0,\mathbf{y}_0) = \int_{t_0}^{t} \dot{V}(s,\mathbf{y}(s))\,ds \le 0$$

לכן

$$V(t,\mathbf{y}(t)) \le V(t_0,\mathbf{y}_0) \le c,$$

כלומר פתרון המתחיל ב־$(t_0,\mathbf{y}_0)$ מוכל בזמן $t \ge t_0$ בקבוצה $K_{c,t}$ ו־$K_{c,t} \subset K_{c,t_0}$ לפיכך הפתרון מוגדר לכל $t \ge t_0$ וחסום ב־B_r. לבסוף נבחר $\delta > 0$ די קטן כך ש־$B_\delta \subset K_{c,t_0}$. אז כל פתרון כך ש־$||\mathbf{y}(t_0)|| < \delta$ מקיים $||\mathbf{y}(t)|| \le r < \varepsilon$ לכל $t_0 \le t$. בזה הוכח כי $\mathbf{0}$ נקודה קריטית יציבה.

עבור יציבות אסימפטוטית אנו זקוקים למושג נוסף.

הגדרה 10.20 אומרים כי הפונקציה $V(t,\mathbf{y})$ היא בעלת **חסם מלעיל אינפיניטיסימלי** *(infinitisimal upper bound)* אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $h > 0$ כך ש־$|V(t,\mathbf{y})| \le \varepsilon$ כאשר $||\mathbf{y}|| < h$ ולכל $t > t_0$.

משפט 10.21 תהי נתונה פונקציה $V(t,\mathbf{y})$ כך ש־

(i) V בעלת חסם מלעיל אינפיניטיסימלי,

(ii) V חסומה מלמטה על ידי פונקציה מוגדרת חיובית, $W_1(\mathbf{y}) \le V(t,\mathbf{y})$,

(iii) $\dot V$ חסומה מלמעלה על ידי פונקציה מוגדרת שלילית, $\dot V(t,\mathbf{y}) \le -W_3(\mathbf{y})$.

אז הפתרון $\mathbf{y} \equiv \mathbf{0}$ יציב באופן אסימפטוטי.

הוכחה. לפי המשפט הקודם כבר ידוע כי פתרון האפס $\mathbf{y} \equiv \mathbf{0}$ יציב. נקח פתרון $\mathbf{y}(t)$ עם $\mathbf{y}(t_0) \in K_{c,t_0}$ ונוכיח כי $\lim_{t\to\infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$.

בשלב הראשון יוכח כי $\lim_{t\to\infty} V(t,\mathbf{y}(t)) = 0$. כפי שראינו למעלה, $\mathbf{y}(t)$ נשאר בכדור B_r לכל $t_0 \le t < \infty$. הודות להנחה $\dot V(t,\mathbf{y}) < 0$, $V(t,\mathbf{y}(t))$ מונוטוני יורד ואי־שלילי, קיים גבול $\lim_{t\to\infty} V(t,\mathbf{y}(t)) = \eta \ge 0$ ו־ $W_2(\mathbf{y}(t)) \ge V(t,\mathbf{y}(t)) \ge \eta$. נראה כי $\eta = 0$.

נניח להפך כי $\eta > 0$. ל־$V(t,\mathbf{y}(t))$ יש חסם מלעיל איפיניטיסימלי כלומר יש $h > 0$ כך ש־$||\mathbf{y}(t)|| < h$ גורר $0 < V(t,\mathbf{y}(t)) < \eta/2$. הפתרון $\mathbf{y}(t)$ אינו יכול להכנס לכדור B_h זה כי כזכור $V(t,\mathbf{y}(t)) \ge \eta$. לכן $h \le ||\mathbf{y}(t)|| \le r$ לכל $t \ge t_0$. $W_3(\mathbf{y})$ רציף וחיובי בקליפה כדורית זו. עם הסימון $\mu = \max_{h\le||\mathbf{y}||\le r} W_3(\mathbf{y}) > 0$,

$$V(t,\mathbf{y}(t)) - V(t_0,\mathbf{y}(t_0)) = \int_{t_0}^{t} \dot V(s,\mathbf{y}(s))\,ds \le -\int_{t_0}^{t} W_3(\mathbf{y}(s))\,ds \le -\mu(t-t_0)$$

לכל $t \ge t_0$. זה סותר את ההנחה כי $V(t,\mathbf{y})$ מוגדר חיובי. סתירה זו מחייבת $\eta = 0$ ו־$\lim_{t\to\infty} V(t,\mathbf{y}(t)) = 0$.

לבסוף נסיק כי $\lim_{t\to\infty} \mathbf{y}(t) = 0$. אחרת יש תת־סדרה $t_k \to \infty$ כך ש־$\mathbf{y}(t_k) \to \boldsymbol{\xi} \ne \mathbf{0}$ ו־$V(t_k,\mathbf{y}(t_k)) \ge W_1(t_k) \to W_1(\boldsymbol{\xi}) > 0$. הסתירה ל־$V(t,\mathbf{y}(t)) \to 0$ מאמתת כי $\mathbf{y}(t) \to 0$ ולפיכך הפתרון $\mathbf{y} \equiv \mathbf{0}$ יציב באופן אסימפטוטי. □

מקרה פרטי פשוט של חסם אסימפטוטי מלמעלה קורה כאשר קיימת פונקציה מוגדרת חיובית $W_2(\mathbf{y})$ כך ש־$W_2(\mathbf{0}) = 0$. $V(t,\mathbf{y}(t)) \le W_2(\mathbf{y})$ ו־$W_2(\mathbf{y})$ רציף לכן קיים $h > 0$ כך ש־$|V(t,\mathbf{y})| \le W_2(\mathbf{y}) \le \varepsilon$ כאשר $||\mathbf{y}|| < h$ ולכל $t > t_0$. הנחות המשפט יכתבו כ־$W_1(\mathbf{y}) \le V(t,\mathbf{y}) \le W_2(\mathbf{y})$ ו־$\dot V(t,\mathbf{y}) \le -W_3(\mathbf{y})$.

בתחילת הפרק הגדרנו כי פתרון $\mathbf{y}(t)$ נקרא יציב אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta = \delta(\varepsilon,t_0) > 0$ כך ש־$||\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{y}_0(t_0)|| < \delta$ גורר $||\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)|| < \varepsilon$ לכל $t_0 \le t < \infty$. בהגדרה זו תלוי בנקודת ההתחלה t_0, לכן יש אפשרות כי הפתרון יהפוך לפחות ופחות יציב עם גידול t_0 כך שלבסוף $\delta(\varepsilon,t_0) \to 0$ כש־$t_0 \to \infty$. כדי למנוע זאת נגדיר סוגים נוספים של יציבות.

הגדרה 10.22 א. פתרון $\mathbf{y}_0(t)$ של מערכת המשוואות $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t,\mathbf{y})$ נקרא **יציב במידה שווה** *(uniformly stable)* אם לכל $\varepsilon > 0$ נתון קיים $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (התלוי ב־ε בלבד),

כך שכל פתרון $\mathbf{y}(t)$ המקיים

$$||\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{y}_0(t_0)|| < \delta$$

לאיזה שהוא $t_0 \geq 0$, מוגדר ומקיים

$$||\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)|| < \varepsilon$$

לכל $t \geq t_0$. נדגיש כי כאן אותו $\delta(\varepsilon)$ מתאים לכל בחירה של t_0.

ב. פתרון $\mathbf{y}_0(t)$ של מערכת המשוואות $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ נקרא **יציב במידה שווה באופן אסימפטוטי** *(uniformly asymptotically stable)* אם הוא יציב במידה שווה ובנוסף על כך, קיים קבוע $c > 0$ כך שאם

$$||\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{y}_0(t_0)|| < c$$

לאיזה שהוא $t_0 \geq 0$, אז $\lim_{t\to\infty} ||\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)|| = 0$ במידה שווה ב־t_0; ביתר פרוט, קיים $c > 0$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים קבוע $T = T(\varepsilon, c) > 0$ כך שאם $||\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{y}_0(t_0)|| < c$ אז לכל $t \geq t_0 + T$ מתקיים

$$||\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)|| < \varepsilon.$$

גם כאן נדגיש כי אותו c חייב להתאים לכל בחירה של t_0.

דוגמא 10.8 הדוגמא הבאה של J. Massera מראה כי יציבות ויציבות במידה שווה הם אכן מושגים שונים. למשוואה הלינארית ולא אוטונומית $y'(t) = (6t\sin t - 2t)y$ פתרון

$$y(t) = y(t_0)\exp\big(6\sin t - 6t\cos t - t^2 - 6\sin t_0 + 6t_0\cos t_0 + t_0^2\big).$$

$-t^2$ הוא המחובר הדומיננטי לכן האקספוננציאל חסום מלמעלה על $[t_0, \infty)$ על ידי קבוע מסוים $c(t_0) \geq 1$ ו־$|y(t)| \leq |y(t_0)|c(t_0)$. אם כך הפתרון $y \equiv 0$ יציב עם $\delta = \varepsilon/c(t_0)$. אך פתרון זה אינו יציב במידה שווה. כי אם $t_0 = 2n\pi$, ו־$t = t_0 + \pi$ אז

$$|y(t_0 + \pi)| = |y(t_0)|\exp\big((4n\pi + \pi)(6 - \pi)\big).$$

בחירה זו מדגימה כי ל־ε נתון לא קיים $\delta > 0$ כך ש־$|y(t_0)| < \delta$ יבטיח $|y(t_0 + \pi)| < \varepsilon$ לכל $t_0 = 2n\pi$.

תרגיל 10.9 הראה כי עבור משוואה אוטונומית $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ יציבות של פתרון קבוע $\mathbf{y} = \mathbf{c}$ שקולה ליציבות במידה שווה ויציבות אסימפטוטית שקולה ליציבות אסימפטוטית במידה שווה.

משפט 10.23 תהי נתונה המערכת $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t,\mathbf{y})$ בתחום D המכיל את הנקודה $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, $\mathbf{f}(t,\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ ופונקציה $V(t,\mathbf{y})$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות. אם קיימות פונקציות מוגדרות חיוביות $W_1(\mathbf{y}), W_2(\mathbf{y})$ כך ש-

$$W_1(\mathbf{y}) \le V(t,\mathbf{y}) \le W_2(\mathbf{y}),$$
$$\dot{V}(t,\mathbf{y}) \le 0, \qquad t \ge 0,\ \mathbf{y} \in D,$$

אז הפתרון $\mathbf{y} \equiv \mathbf{0}$ יציב במידה שווה.

הוכחת המשפט נעזרת בלמה הבאה:

למה 10.24 אם $W(\mathbf{y})$ פונקציה מוגדרת חיובית ורציפה בכדור $B_r \subset R^n$ אז קיימות פונקציות $\alpha_1, \alpha_2 : [0,r) \to R$ רציפות, מונוטוניות עולות בתוכן החריף ו-$\alpha_i(0) = 0$ כך ש-

$$\alpha_1(||\mathbf{y}||) \le W(\mathbf{y}) \le \alpha_2(||\mathbf{y}||).$$

אוסף הפונקציות מסוג זה נקרא בספרות בשם *class K*.

הוכחה. נגדיר $\psi_1(s) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{s \le ||\mathbf{y}|| < r} W(\mathbf{y})$, $0 \le s < r$. הפונקציה $\psi_1(s)$ רציפה ולא יורדת וכמובן ש-$\psi_1(||\mathbf{y}||) \le W(\mathbf{y})$. לבסוף הפונקציה $\alpha_1(s) = \psi_1(s)\dfrac{s}{s+1}$ מקיימת את כל דרישות הלמה.

עבור החסם העליון נגדיר את הפונקצה הבלתי יורדת $\psi_2(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0 \le ||\mathbf{y}|| \le s} W(\mathbf{y})$. אז הפונקציה $\alpha_2(s) = \psi_2(s)\left(\dfrac{s}{s+1} + 1\right)$ מקיימת את דרישותינו. □

הוכחת משפט 10.23. כדי להוכיח יציבות במידה שווה עלינו להשיג לפתרונות חסם בלתי תלוי בזמן ההתחלה. תחילת ההוכחה כמעט זהה לזו של משפט 10.19. בנוסף לקבוצות $K_{c,t}$, K_1 שכבר הוגדרו, נגדיר קבוצה $K_2 = \{\mathbf{y} \mid W_2(\mathbf{y}) \le c\}$. המקיימת $K_2 \subset K_{c,t} \subset K_1 \subset B_r \subset D$. פתרון המתחיל בנקודה $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}_0 \in K_2 \subset K_{c,t_0}$ נשאר בהמשך ב-$K_{c,t_0} \subset K_1 \subset B_r$. לפיכך הפתרון מוגדר לכל $t \ge t_0$, חסום ב-B_r ומקיים שם

$$V(t,\mathbf{y}(t)) \le V(t_0,\mathbf{y}_0) \le c, \qquad t \ge t_0$$

על פי למה 10.24 קיימות פונקציות סקלריות עולות α_1, α_2 כך ש-

$$\alpha_1(||\mathbf{y}||) \le W_1(\mathbf{y}) \le V(t,\mathbf{y}) \le W_2(\mathbf{y}) \le \alpha_2(||\mathbf{y}||),$$

וביחד,

$$\alpha_1(||\mathbf{y}(t)||) \le W_1(\mathbf{y}) \le V(t,\mathbf{y}) \le V(t_0,\mathbf{y}_0) \le W_2(\mathbf{y}_0) \le \alpha_2(||\mathbf{y}_0||).$$

הפונקציה ההפוכה α_1^{-1} וההרכבה $\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2$ מתאפסות אף הן ב-$s = 0$ ומונוטוניות עולות במובן החריף ו-

$$||\mathbf{y}(t)|| \le \alpha_1^{-1}\big(\alpha_2(||\mathbf{y}_0||)\big).$$

הערכה זו בלתי תלויה ב-t_0 ומוכיחה יציבות במידה שווה. □

משפט 10.25 תהיינה המערכת $\mathbf{y}'(t)=\mathbf{f}(t,\mathbf{y})$ והפונקציה $V(t,\mathbf{y})$ כמו במשפט 10.23. אם קיימות פונקציות מוגדרות חיוביות $W_1(\mathbf{y}),W_2(\mathbf{y}),W_3(\mathbf{y})$ כך ש־

$$\begin{aligned} W_1(\mathbf{y}) \le V(t,\mathbf{y}) \le W_2(\mathbf{y}),\\ \dot V(t,\mathbf{y}) \le -W_3(\mathbf{y}), \qquad t\ge 0,\ \mathbf{y}\in D, \end{aligned}$$

אז הפתרון $\mathbf{y}\equiv\mathbf{0}$ יציב אסימפטוטית במידה שווה.

הוכחה. על פי למה 10.24 וכמו בהוכחת משפט 10.23 נקח פונקציות עולות $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, $\alpha_i(0)=0$ כך ש־

$$\begin{aligned} \alpha_1(||\mathbf{y}||) \le V(t,\mathbf{y}) \le \alpha_2(||\mathbf{y}||),\\ \dot V(t,\mathbf{y}) \le -\alpha_3(||\mathbf{y}||). \end{aligned}$$

אז $||\mathbf{y}|| \le \alpha_2^{-1}(V(t,\mathbf{y}))$ והודות למונוטוניות α_3,

$$\dot V \le -\alpha_3(||\mathbf{y}||) \le -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V(t,\mathbf{y}))).$$

נסמן $\alpha \overset{\text{def}}{=} \alpha_3\circ\alpha_2^{-1}$, אף היא מוגדרת חיובית, מונוטונית עולה עם $\alpha(0)=0$ ובעזרתה

$$\dot V \le -\alpha(V). \tag{10.16}$$

ללא הגבלת כלליות אפשר להניח כי הפונקציה $\alpha(s)$ מקיימת תנאי ליפשיץ באופן לוקלי. נסתכל בבעיית ההתחלה האוטונומית

$$u' = -\alpha(u), \qquad u(t_0)=\eta, \tag{10.17}$$

ונרשום את פתרונה כתלות בתנאי ההתחלה בצורה $U(t-t_0,\eta)$ כאשר $U(t)$ הפתרון הנקבע על ידי $U(0)=\eta$. עבור $\eta>0$, הפתרון $U(t-t_0,\eta)$ יורד ובגלל היחידות אין הוא פוגש בפתרון $u(t)\equiv 0$. לכן $0<U(t-t_0,\eta)\le\eta$ ומוגדר לכל $t\ge t_0$. הודות למונוטוניות, הפתרון יורד לגבול $\lim_{t\to\infty}U(t-t_0,\eta)=\ell\ge 0$. אם היה $\ell>0$ אז $U(t-t_0,\eta)>\ell>0$ ו־$U'=-\alpha(U)<-\alpha(\ell)=\text{const}<0$, בסתירה לחסימות U מלמטה. אי לכך $U(t-t_0,\eta)\to 0$. בנוסף על כך זו פונקציה עולה של η. כי ל־$\eta_2>\eta_1>0$, הפתרונות אינם נפגשים וכך $U(t-t_0,\eta_2)>U(t-t_0,\eta_1)$. (אגב, אוסף הפונקציות $U(t,s)$ כך שעבור t קבוע מונוטוני עולה ב־s ו־$U(t,0)=0$ ועבור s קבוע יורד ב־t ושואף ל־0, נקרא בספרות בשם class KL).

על פי משפט 3.24 עבור (10.16) ו־(10.17), אם $\eta=V(t_0,\mathbf{y}(t_0))$ אז

$$V(t,\mathbf{y}(t)) \le U(t-t_0,V(t_0,\mathbf{y}(t_0))), \qquad t\ge t_0.$$

לפיכך

$$\begin{aligned} ||\mathbf{y}(t)|| &\le \alpha_1^{-1}\big(V(t,\mathbf{y}(t))\big) \le \alpha_1^{-1}\Big(U\big(t-t_0,V(t_0,\mathbf{y}(t_0))\big)\Big)\\ &\le \alpha_1^{-1}\Big(U\big(t-t_0,\alpha_2(||\mathbf{y}(t_0)||)\big)\Big). \end{aligned}$$

בזה הוכחנו כי לכל $||\mathbf{y}(t_0)||$ די קטן, $\mathbf{y}(t)$ שואף לאפס במידה שווה ב־t_0 והפתרון $y(t) \equiv 0$ יציב אסימפטוטית במידה שווה. □

יציבות אסימפטוטית או אסימפטוטית במידה שווה אינן מציינות באיזה מהירות הפתרונות מתקרבים זה לזה. הסוג הבא של יציבות דורש התקרבות בקצב מעריכי.

הגדרה 10.26 פתרון $\mathbf{y}_0(t)$ של מערכת המשוואות $\mathbf{y}\,'(t) = \mathbf{f}(t,\mathbf{y})$ נקרא **יציב באופן אקספוננציאלי** *(exponentially stable)* אם קיימים קבועים k, α, δ כך שלכל פתרון $\mathbf{y}(x)$ המקיים $||\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{y}_0(t_0)|| < \delta$ קיים

$$||\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)|| < k||\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{y}_0(t_0)||\, e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

משפט 10.27 תהי $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ נקודה קריטית של המערכת $\mathbf{y}\,'(t) = \mathbf{f}(t,\mathbf{y})$ בתחום $D \subset R^n$ ותהי $V(t,\mathbf{y})$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות כך ש־

$$k_1||\mathbf{y}||^p \le V(t,\mathbf{y}) \le k_2||\mathbf{y}||^p,$$
$$\dot{V}(t,\mathbf{y}) \le -k_3||\mathbf{y}||^p, \qquad t \ge 0,\ \mathbf{y} \in D,$$

עם $k_1, k_2, k_3, p > 0$. אז הפתרון $\mathbf{y} \equiv \mathbf{0}$ יציב באופן אקספוננציאלי.

הוכחה. על פי הוכחת משפט 10.19 פתרון המתחיל בקבוצה $K_2 = \{\mathbf{y} \mid k_2||\mathbf{y}||^p \le c\}$, c די קטן, מוגדר לכל $t \ge t_0$. לפי הנחותינו

$$\dot{V} \le -k_3||\mathbf{y}||^p \le -(k_3/k_1)\, V.$$

אינטגרציה על $[t_0, t]$ מובילה אל $V(t,\mathbf{y}(t)) \le V(t_0,\mathbf{y}(t_0))e^{-(k_3/k_1)(t-t_0)}$. לבסוף

$$||\mathbf{y}(t)|| \le \left(\frac{1}{k_1}\, V(t,\mathbf{y}(\mathbf{t}))\right)^{1/p} \le \left(\frac{V(t_0,\mathbf{y}(t_0))}{k_1}\, e^{-(k_3/k_1)(t-t_0)}\right)^{1/p}$$
$$\le \left(\frac{k_2||\mathbf{y}(t_0)||^p}{k_1}\, e^{-(k_3/k_1)(t-t_0)}\right)^{1/p} = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{1/p} ||\mathbf{y}(t_0)||\, e^{-(k_3/k_1 p)(t-t_0)}$$

ובזה הוכחה היציבות האקספוננציאלית. □

10.6 מערכת לינארית לא־אוטונומית

למערכת לינארית לא אוטונומיות (10.2),

$$\mathbf{y}\,' = A(t)\mathbf{y}$$

נבדוק יציבות במידה שווה ויציבות אסימפטוטית במידה שווה. במקביל למשפט 10.3 נאפיין מושגים אלה בעזרת מטריצה יסודית $Y(t)$ ומטריצת המעבר $\Phi(t,s) = Y(t)Y^{-1}(s)$.

משפט 10.28 תהי $Y(t)$ מטריצה יסודית של המערכת הלינארית (10.2). אז המערכת יציבה במידה שווה אם ורק אם קיים קבוע K כך ש־

$$||Y(t)Y^{-1}(s)|| \le K, \qquad t_0 < s < t < \infty.$$

הוכחה. א. נניח כי $||Y(t)Y^{-1}(s)|| \le K$ לכל $s < t < \infty$. פתרון שערכו ההתחלי בנקודה s הוא $\mathbf{y}(s)$ נתון על ידי $\mathbf{y}(t) = Y(t)Y^{-1}(s)\,\mathbf{y}(s)$ לכן

$$||\mathbf{y}(t)|| \le ||Y(t)Y^{-1}(s)||\,||\mathbf{y}(s)|| \le K||\mathbf{y}(s)|| < \varepsilon$$

לכל $||\mathbf{y}(s)|| < \varepsilon/K$. כך הבחירה $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon/K$ מתאימה להגדרת יציבות במידה שווה.

ולהפך, תהי (10.2) יציבה במידה שווה, כלומר $||\mathbf{y}(t)|| = ||Y(t)Y^{-1}(s)\mathbf{y}(s)|| < \varepsilon$ לכל $s < t < \infty$ ולכל $\mathbf{y}(s)$ די קטן. כמו בהוכחת משפט 10.3 מקבלים עבור בחירת תנאי ההתחלה $\mathbf{y}(s) = \big(\delta, \dots, \delta\big)^T$ כי

$$||Y(t)Y^{-1}(s)\big(\delta, \dots, \delta\big)^T|| = ||Y(t)Y^{-1}(s)||\delta < \varepsilon$$

ומתקבל כי $||Y(t)Y^{-1}(s)|| < \varepsilon/\delta$. □

משפט 10.29 אם $Y(t)$ מטריצה יסודית של המערכת הלינארית (10.2). אז המערכת יציבה באופן אסימפטוטי במידה שווה אם ורק אם קיימים $K, \alpha > 0$ כך ש־

$$||Y(t)Y^{-1}(s)|| \le Ke^{-\alpha(t-s)}, \qquad t_0 < s < t < \infty.$$

הוכחה. כש־$||Y(t)Y^{-1}(s)|| \le Ke^{-\alpha(t-s)}$ לכל $t_0 < s < t < \infty$ אז בוודאי שהמערכת יציבה במידה שווה. אם בנוסף, ל־$0 < \varepsilon$ די קטן נבחר $T = T(\varepsilon, c) = -\log(\varepsilon/Kc)/\alpha$, אז עבור $t - s > T$ ו־$||\mathbf{y}(s)|| < c$,

$$||\mathbf{y}(t)|| = ||Y(t)Y^{-1}(s)\mathbf{y}(s)|| \le Ke^{-\alpha(t-s)} \cdot c < \varepsilon.$$

לפיכך הפתרון $\mathbf{y} \equiv \mathbf{0}$ יציב במידה שווה באופן אסימפטוטי וכן כל המערכת (10.2).

בכיוון ההפוך, תהי המערכת יציבה במידה שווה באופן אסימפטוטי. אז לפי ההגדרה קיים $c > 0$ ולכל $0 < \varepsilon < c$ שנבחר קיים $T = T(\varepsilon, c) > 0$ כך שלכל $t \ge s + T$ ולכל פתרון $\mathbf{y}$ כך ש־$||\mathbf{y}(s)|| < c$, מתקיים

$$||\mathbf{y}(t)|| = ||Y(t)Y^{-1}(s)\mathbf{y}(s)|| < \varepsilon.$$

לכן $||Y(t)Y^{-1}(s)|| < \varepsilon/c$ כש־$t \ge s + T$. בפרט

$$||Y(s+T)Y^{-1}(s)|| \le \varepsilon/c < 1 \tag{10.18}$$

לכל $s > t_0$. נסמן $k = \varepsilon/c < 1$.

עבור t נתון יש שלם חיובי n כך ש־$s + nT \le t < s + (n+1)T$. נפרק את הקטע $[s,t]$ לתת־קטעים באורך T לכל היותר. בדומה ל־(10.18),

$$||Y(s+2T)Y^{-1}(s+T)|| \le k, \ \dots, \ ||Y(s+nT)Y^{-1}(s+(n-1)T)|| \le k.$$

ולבסוף עבור הקטע $[s+nT, t]$ שרכו קטן מ־T, מתקיים הודות ליציבות במידה שווה

$$||Y(t)Y^{-1}(s+nT)|| \le K.$$

מסדרת הערכות אלה נובע

$$\begin{aligned} ||Y(t)Y^{-1}(s)|| \le & ||Y(t)Y^{-1}(s+nT)|| \cdot ||Y(s+nT)Y^{-1}(s+(n-1)T)|| \dots \\ & \dots ||Y(s+T)Y^{-1}(s)|| \le Kk^n \end{aligned}$$

בסימון $\alpha = -\log\, k/T > 0$,

$$||Y(t)Y^{-1}(s)|| \le Ke^{-n\alpha T} = k^{-1}K\, e^{-(n+1)\alpha T} \le k^{-1}K\, e^{-\alpha T(t-s)},$$

כנדרש. □

שני המשפטים האחרונים אינם קלים ליישום כי על מנת לבדוק את הנחותיהם יש להכיר את כל פתרונות המערכת (10.2). זאת בניגוד למערכת לינארית אוטונומית שם מספיק להכיר את הערכים העצמיים המתאימים.

מסקנה 10.30 עבור משוואה לינארית אוטונומית $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ יציבות אסימפטוטית ויציבות אסימפטוטית במידה שווה הן זהות, כי עבור $\max_i \mathrm{Re}\{\lambda_i\} < -\mu < 0$ מתקיים

$$||Y(t)Y^{-1}(s)|| = ||\exp\big((t-s)A\big)|| \le Ke^{-\mu(t-s)}.$$

עבור משוואה לינארית $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ יציבות אסימפטוטית במידה שווה ויציבות אקספוננציאלית זהות.

משפט 10.31 תהי נתונה מערכת לינארית $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ בה המטריצה $A(t)$ חסומה לכל $t \ge t_0$. אם המערכת יציבה באופן אקספוננציאלי אז קיימת לה פונקציית ליאפונוב מהצורה $V(t,\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T P(t)\mathbf{y}$.

הוכחה. הבניה דומה לזו של פונקציית ליאפונוב $V(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T K\mathbf{y}$ המתאימה למערכת $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ (משפט 10.13 ומשפט 10.14). נקח מטריצה סימטרית, מוגדרת חיובית וחסומה $Q(t)$,

$$c_1||\mathbf{y}||^2 \le \mathbf{y}^T Q(t)\mathbf{y} \le c_2||\mathbf{y}||^2, \qquad 0 < c_1 \le c_2, \tag{10.19}$$

ונגדיר

$$P(t) = \int_t^\infty \Phi^T(t,s)Q(s)\Phi(t,s)\,ds, \qquad V(t,\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T P(t)\mathbf{y},$$

כאשר $\Phi(t,s) = Y(t)Y^{-1}(s)$ היא מטריצת המעבר של המערכת. (בחירה פשוטה אפשרית היא כמובן $Q(t) \equiv I$). בשלב הראשון נוכיח כי האינטגרל מתכנס והפונקציה הסקלרית $V(t,\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T P(t)\mathbf{y}$ מקיימת

$$c_3||\mathbf{y}||^2 \le \mathbf{y}^T P(t)\mathbf{y} \le c_4||\mathbf{y}||^2, \qquad 0 < c_3 \le c_4. \tag{10.20}$$

כמו כן, מהסמטריה של $Q(t)$ נובע כי גם המטריצה $P(t)$ סימטרית.

מהיציבות האקספוננציאלית של המערכת, כלומר $||\Phi(t,s)|| = ||Y(t)Y^{-1}(s)|| \le Ke^{-\alpha(t-s)}$, מתקבל חסם מלעיל

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^T P(t)\mathbf{y} &= \int_t^\infty \mathbf{y}^T\Phi^T(t,s)Q(s)\Phi(t,s)\,\mathbf{y}\,ds = \int_t^\infty \big(\Phi(t,s)\mathbf{y}\big)^T Q(s)\big(\Phi(t,s)\mathbf{y}\big)\,ds \\
&\le \int_t^\infty c_2||\Phi(t,s)\mathbf{y}||^2\,ds \;\le\; c_2K^2\int_t^\infty e^{-2\alpha(t-s)}||\mathbf{y}||^2\,ds \\
&\le \frac{c_2K^2}{2\alpha}\,||\mathbf{y}||^2.
\end{aligned}$$

עכשיו נמצא גם חסם תחתון ל־$\mathbf{y}^T P(t)\mathbf{y}$. לכל פתרון $\mathbf{y}(t)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,||\mathbf{y}(t)||^2 &= \frac{d}{dt}\Big(\mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t)\Big) = \mathbf{y}\,'^T(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}\,'(t) \\
&= \mathbf{y}^T(t)A^T(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{y}^T(t)A(t)\mathbf{y}(t)
\end{aligned}$$

ואם $||A(t)|| \le L$ אז $\left|\frac{d}{dt}\,||\mathbf{y}(t)||^2\right| \le 2L||\mathbf{y}(t)||^2$. אינטגרציה של שני אי השוויונות הדיפרנציאליים

$$-2L||\mathbf{y}(t)||^2 \le \frac{d}{dt}\,||\mathbf{y}(t)||^2 \le 2L||\mathbf{y}(t)||^2$$

על $[t_0,t]$ מובילה לחסמים

$$||\mathbf{y}(t_0)||e^{-L(t-t_0)} \le ||\mathbf{y}(t)|| \le ||\mathbf{y}(t_0)||e^{L(t-t_0)}.$$

בעזרת החסם התחתון של $c_1||\mathbf{z}||^2 \le \mathbf{z}^T Q(t)\mathbf{z}$, $Q(t)$, מקבלים

$$\mathbf{y}^T P(t)\mathbf{y} = \int_t^\infty \big(\Phi(t,s)\mathbf{y}\big)^T Q(s)\big(\Phi(t,s)\mathbf{y}\big)\,ds \ge \int_t^\infty c_1||\Phi(t,s)\mathbf{y}||^2\,ds$$

אולם $\Phi(t,s)\mathbf{y}$ הוא הפתרון של המערכת שלנו הנקבע על ידי תנאי ההתחלה $\mathbf{y}(s) = \mathbf{y}$, אי לכך $||\Phi(t,s)\mathbf{y}|| \ge ||\mathbf{y}||e^{-L(t-s)}$. נמשיך בהערכה

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^T P(t)\mathbf{y} &\ge \int_t^\infty c_1||\Phi(t,s)\mathbf{y}||^2\,ds \\
&\ge \int_t^\infty c_1||\mathbf{y}||^2 e^{-2L(t-s)}\,ds \ge \frac{c_1}{2L}\,||\mathbf{y}||^2.
\end{aligned}$$

בזה הוכחנו כי $V(t,\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T P(t)\mathbf{y}$ חסום בין שתי פונקציות מוגדרות חיוביות ואימתנו את (10.20).

בשלב השני נחשב את הנגזרת $P'(t)$ ובעזרתו את $\dot{V}(t,\mathbf{y})$.

$$\frac{d}{dt}P(t) =$$

$$\int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t}\Phi^T(s,t)Q(s)\Phi(s,t)\,ds + \int_t^\infty \Phi^T(s,t)Q(s)\frac{\partial}{\partial t}\Phi(s,t)\,ds - \Phi^T(t,t)Q(t)\Phi(t,t)$$

לפי תרגיל (6.4) $\frac{\partial}{\partial t}\Phi^T(s,t) = -A^T(t)\Phi^T(s,t),\ \frac{\partial}{\partial t}\Phi(s,t) = -\Phi(s,t)A(t)$ לכן

$$= -A^T(t)\int_t^\infty \Phi^T(s,t)Q(s)\Phi(s,t)\,ds - \int_t^\infty \Phi^T(s,t)Q(s)\Phi(s,t)\,ds\,A^T(t) - Q(t)$$
$$= -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) - Q(t)$$

לבסוף

$$\begin{aligned}\dot{V} = \frac{d}{dt}V(t,\mathbf{y}(t)) &= \frac{d}{dt}\left[\mathbf{y}(\mathbf{t})^T P(t)\mathbf{y}(t)\right]\\ &= \mathbf{y}'^T(t)P(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{y}^T(t)P'(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{y}^T(t)P(t)\mathbf{y}'(t)\\ &= \big(A(t)\mathbf{y}\big)^T P(t)\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\big(-P(t)A(t) - A^T(t)P(t) - Q(t)\big) + \mathbf{y}^T P(t)A(t)\mathbf{y}\\ &= -\mathbf{y}^T Q(t)\mathbf{y} \le -c_1||\mathbf{y}||^2.\end{aligned}$$

בזה השלמנו להוכיח כי $V(t,\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T P(t)\mathbf{y}$ מקיים את תנאי משפט 10.19 והוא פונקציית ליאפונוב עבור $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$. □

בפונקציית ליאפונוב זו נשתמש בהוכחת משפט 10.34.

10.7 השיטה העקיפה של Lyapunov - לינאריזציה

כדי לחקור יציבות של פתרון מסוים $\mathbf{y}_0(t)$ של מערכת לא לינארית

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t,\mathbf{y}) \tag{10.21}$$

נעזר בקרוב הלינארי של המערכת בקרבת הפתרון הנדון. ההצבה $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0(t)$ הופכת את המערכת ל-

$$\mathbf{z}' = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)' = \mathbf{f}\big(t,\mathbf{y}_0(t) + \mathbf{z}\big) - \mathbf{f}\big(t,\mathbf{y}_0(t)\big)$$

ומעבירה את הדיון לשאלת היציבות בסביבת $\mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{0}$. אם הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i,j = 1,\ldots,n$ רציפות אז כפי שראינו ב-(3.27),

$$\mathbf{z}' = \mathbf{f}\big(t,\mathbf{y}_0(t) + \mathbf{z}\big) - \mathbf{f}\big(t,\mathbf{y}_0(t)\big) = D_{\mathbf{y}}\,\mathbf{f}\big(t,\mathbf{y}_0(t)\big)\,\mathbf{z} + \mathbf{g}(t,\mathbf{z}).$$

כאשר $D_{\mathbf{y}}\mathbf{f} = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ והשארית היא $||\mathbf{g}(t,\mathbf{z})|| = o(||\mathbf{z}||)$ עבור $||\mathbf{z}(t)||$ קטן. נכתוב לפיכך את המערכת בצורת חלק לינארי בתוספת הפרעה קטנה,

$$\mathbf{z}\,' = A(t)\mathbf{z} + \mathbf{g}(t,\mathbf{z}), \qquad A(t) = D_{\mathbf{y}}\,\mathbf{f}\big(t,\mathbf{y}_0(t)\big). \tag{10.22}$$

לינאריזציה זו תאפשר לנו לקשור בין התנהגות פתרון של מערכת בלתי לינארית נתונה לבין זו של המערכת הלינארית המקרבת אותה.

אם $\mathbf{f}(t,\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, הלינאריזציה תתבצע בקרבת הפתרון הטריויאלי $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$ ונקבל

$$\mathbf{y}\,' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{g}(t,\mathbf{y}), \qquad A(t) = D_{\mathbf{y}}\,\mathbf{f}\big(t,\mathbf{0}\big). \tag{10.23}$$

למערכת אוטונומית $\mathbf{y}\,'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ עם $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, הלינאריזציה סביב $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$ היא

$$\mathbf{y}\,' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}),$$

כאשר $A = D_{\mathbf{y}}\,\mathbf{f}\big(\mathbf{0}\big)$ היא מטריצה קבועה ו־$||\mathbf{g}(\mathbf{y})|| = o(||\mathbf{y}||)$. מקרה זה כבר נדון במשפט 10.7.

משפט 10.32 נניח כי המערכת הלינארית $\mathbf{y}\,' = A(t)\mathbf{y}$ יציבה אסימפטוטית במידה שווה, $\mathbf{g}(t,\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ ו־$\mathbf{g}(t,\mathbf{y}) = o(||\mathbf{y}||)$ במשותף לכל t כאשר $||\mathbf{y}|| \to 0$. אז $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$ הוא פתרון יציב אסימפטוטית של המערכת הבלתי לינארית ובלתי אוטונומית (10.23).

הוכחה. כמו בהוכחת משפט 10.7, פתרון בעיית התחלה מקיים, כל עוד הוא קיים,

$$\mathbf{y}(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{y}(0) + \int_{t_0}^{t} Y(t)Y^{-1}(s)\,\mathbf{g}(s,\mathbf{y})\,ds. \tag{10.24}$$

כאשר $Y(t)$ מטריצה יסודית של $\mathbf{y}\,' = A(t)\mathbf{y}$. אם מערכת זו יציבה אסימפטוטית במידה שווה אז לפי משפט 10.29, קיים $||Y(t)Y^{-1}(s)|| \le Ke^{-\alpha(t-s)}$, עם קבועים חיוביים מסוימים K,α. הודות להנחה $\mathbf{g}(t,\mathbf{y}) = o(||\mathbf{y}||)$, לכל $\varepsilon > 0$ קיים δ כך ש־$||\mathbf{g}(t,\mathbf{y})||/||\mathbf{y}|| \le \varepsilon/K$ לכל $||\mathbf{y}|| \le \delta$. כך מתקבל אי השוויון

$$||\mathbf{y}(t)|| \le Ke^{-\alpha(t-t_0)}||\mathbf{y}(t_0)|| + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\varepsilon||\mathbf{y}(s)||\,ds$$

או

$$e^{\alpha t}||\mathbf{y}(t)|| \le Ke^{\alpha t_0}||\mathbf{y}(t_0)|| + \int_{t_0}^{t} \varepsilon e^{\alpha s}||\mathbf{y}(s)||\,ds\,.$$

לפי הלמה של גרונוול (למה 3.17) עבור הפונקציה $e^{\alpha t}||\mathbf{y}(t)||$ נובע כי

$$e^{\alpha t}||\mathbf{y}(t)|| \le Ke^{\alpha t_0}||\mathbf{y}(t_0)||\exp\left(\varepsilon(t-t_0)\right).$$

לסיכום,

$$||\mathbf{y}(t)|| \le K||\mathbf{y}(t_0)|| \exp\big((\varepsilon-\alpha)(t-t_0)\big) \tag{10.25}$$

כל עוד $||\mathbf{y}(t)|| \le \delta$. אם נבחר ε די קטן ו־$||\mathbf{y}(t_0)|| < \delta/K$ אז $||\mathbf{y}(t)|| \le \delta$ ו־(10.25) מתקיימים לכל $t \ge t_0$. בזה הוכח כי $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$ פתרון יציב אסימפטוטית של (10.23). □

משפט 10.33 אם המערכת הלינארית $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ יציבה במידה שווה ו־

$$||\mathbf{g}(t,\mathbf{y})|| \le c(t)||\mathbf{y}||, \qquad \int^{\infty} c(t)\,dt < \infty,$$

אז קיים קבוע M כך כל פתרון של המערכת הבלתי לינארית (10.23) מוגדר ב־$[t_0,\infty)$ ומקיים $||\mathbf{y}(t)|| \le M||\mathbf{y}(t_0)||$. בפרט, $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$ הוא פתרון יציב במידה שווה של המערכת הבלתי לינארית ובלתי אוטונומית (10.23).

הוכחה. כמו בהוכחת המשפט הקודם נתחיל מ־

$$\mathbf{y}(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{y}(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y(t)Y^{-1}(s)\,\mathbf{g}(s,\mathbf{y})\,ds. \tag{10.26}$$

אם המערכת הלינארית יציבה במידה שווה אז לפי משפט 10.28 קיים קבוע K כך ש־$||Y(t)Y^{-1}(s)|| \le K$ לכל $t_0 < s < t < \infty$. לכן

$$||\mathbf{y}(t)|| \le K||\mathbf{y}(t_0)|| + K\int_{t_0}^{t} c(s)||\mathbf{y}(s)||\,ds.$$

לפי הלמה של גרונוול)למה 3.17(עבור הפונקציה $||\mathbf{y}(t)||$ נובע כי

$$||\mathbf{y}(t)|| \le K||\mathbf{y}(t_0)|| \exp\left(K\int_{t_0}^{t} c(s)||\mathbf{y}(s)||\,ds\right) \le M||\mathbf{y}(t_0)||. \qquad \square$$

אפשר לחקור מערכת עם הפרעה קטנה מהצורה $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{g}(t,\mathbf{y})$ גם בעזרת פונקציית ליאפונוב של המערכת הלינארית $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$.

משפט 10.34 תהי $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ נקודה קריטית של המערכת $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{g}(t,\mathbf{y})$ בה מחובר השארית הוא $||\mathbf{g}(t,\mathbf{z})|| = o(||\mathbf{z}||)$ במידה שווה לכל t עבור $||\mathbf{z}||$ די קטן והמטריצה $A(t)$ חסומה לכל $t \ge t_0$.
אם המערכת הלינארית $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ יציבה באופן אקספוננציאלי אז $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ הוא פתרון יציב באופן אקספוננציאלי גם של ההפרעה הבלתי לינארית הנתונה.

הוכחה. לפי משפט 10.31 למערכת הלינארית $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ קיימת פונקציית ליאפונוב $V(t,\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T P(t)\mathbf{y}$ סימטרית ומקיימת $0 \le c_3||\mathbf{y}||^2 \le \mathbf{y}^T P(t)\mathbf{y} \le c_4||\mathbf{y}||^2$ לכל $\mathbf{y}$. מכאן נובע, בין היתר, כי $\lambda_{\max}(P(t)) \le c_4$, $c_3 \le \lambda_{\min}(P(t))$.

נראה כי פונקציית זו היא פונקציית ליאפונוב גם למערכת הבלתי לינארית המקורית. לשם כך נחשב את הנגזרת לאורך מסלול

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{d}{dt}\left[\mathbf{y(t)}^T P(t)\mathbf{y}(t)\right] \\
&= \mathbf{y}'^T(t)P(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{y}^T(t)P'(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{y}^T(t)P(t)\mathbf{y}'(t) \\
&= \big(A(t)\mathbf{y} + \mathbf{g}(t,\mathbf{y})\big)^T P(t)\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\big(-PA - A^T P - Q\big) + \mathbf{y}^T P\big(A\mathbf{y} + \mathbf{g}\big) \\
&= -\mathbf{y}^T Q(t)\mathbf{y} + \mathbf{y}^T P(t)\,\mathbf{g}(t,\mathbf{y}) + \mathbf{g}^T(t,\mathbf{y})P(t)\mathbf{y} \\
&= -\mathbf{y}^T Q(t)\mathbf{y} + 2\mathbf{y}^T P(t)\,\mathbf{g}(t,\mathbf{y}) \\
&\le -c_1||\mathbf{y}||^2 + 2||\mathbf{y}||_2\,||P(t)||_2\,||\mathbf{g}||_2
\end{aligned}$$

כי $P(t)$ סימטרי ו־ $||P||_2 = \max\limits_{\mathbf{u},\mathbf{v}\neq\mathbf{0}} \dfrac{|\mathbf{u}^T P\mathbf{v}|}{||\mathbf{u}||_2\,||\mathbf{v}||_2}$. אך גם

$$||P||_2 = \big(\lambda_{\max}(P^T P)\big)^{1/2} = \lambda_{\max}(P) \le c_4$$

הודות להנחה $\mathbf{g}(x,\mathbf{y}) = o(||\mathbf{y}||)$, לכל $\varepsilon > 0$ קיים δ כך ש־$||\mathbf{g}(x,\mathbf{y})||/||\mathbf{y}|| \le \varepsilon$ לכל $||\mathbf{y}|| \le \delta$. לפיכך בהנחות אלה מתקבל אי השוויון $\dot{V} \le (-c_1 + 2c_4\varepsilon)||\mathbf{y}||^2$. עבור ε די קטן נקבל כי הנחות משפט 10.27 עם $p = 2$ מתקיימות בסביבה קטנה של הראשית ו־$\mathbf{y} = \mathbf{0}$ הוא פתרון יציב באופן אקספוננציאלי של $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{g}(t,\mathbf{y})$. □

פרק 11

משפטי יחידות

11.1 משפטי יחידות של ליפשיץ

בסעיף 3.17, משוואה (3.20) הוכחנו בעזרת הלמה של Gronwall כי תנאי ליפשיץ מבטיח שלבעיית התחלה אין יותר מפתרון אחד. בשל מרכזיות הנושא ננסח שנית הוכחה קצרה לטענה. נפריד בין הטענה הדו־צדדית לבין זו החד־צדדית.

משפט 11.1 תהי נתונה בעיית ההתחלה

$$\mathbf{y}\,'(x) = \mathbf{f}(x,\mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}\,(x_0) = \mathbf{y_0}, \qquad \mathbf{f} : R^{n+1} \to R^n, \tag{11.1}$$

בה $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ רציפה ב־$B = \{\, |x - x_0| \le a, ||\mathbf{y} - \mathbf{y_0}|| \le b\}$ ומקיימת שם תנאי ליפשיץ

$$||\mathbf{f}(x,\mathbf{y}) - \mathbf{f}(x,\mathbf{z})|| \le L||\mathbf{y} - \mathbf{z}||.$$

אז לבעיית ההתחלה יש לכל היותר פתרון אחד בסביבת x_0.

הוכחה. נניח להפך כי לבעיית ההתחלה יש שני פתרונות $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$. נתרגם זאת למשוואות האינטגרליות

$$\mathbf{y}_1(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(s,\mathbf{y}_1(s))\,ds, \qquad \mathbf{y}_2(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(s,\mathbf{y}_2(s))\,ds,$$

ונחסירם זו מזו. מכיוון ש־x יכולה להמצא משני צדדי x_0,

$$\begin{aligned} ||\,\mathbf{y}_2(x) - \mathbf{y}_1(x)|| &\le \left| \int_{x_0}^{x} ||\mathbf{f}\,(s,\mathbf{y}_2(s)) - \mathbf{f}\,(s,\mathbf{y}_1(s))||\,ds \right| \\ &\le L \left| \int_{x_0}^{x} ||\,\mathbf{y}_2(s) - \mathbf{y}_1(s)||\,ds \right|. \end{aligned} \tag{11.2}$$

בשלב זה נציג גירסה פשוטה של הלמה של גרונוול בצורה הנוחה לשימושנו בהמשך.

למה 11.2 תהיינה $u(x), r(x)$ פונקציות רציפות, $r(x) \geq 0$.

א. אם $0 \leq u(x) \leq \int_{x_0}^{x} r(s)u(s)\,ds$ בקטע $[x_0, x_0 + a]$ אז $u(x) \equiv 0$ בקטע זה.

ב. אם $0 \leq u(x) \leq \int_{x}^{x_0} r(s)u(s)\,ds$ בקטע $[x_0 - a, x_0]$ אז $u(x) \equiv 0$ בקטע זה.

ג. אם $0 \leq u(x) \leq \left|\int_{x_0}^{x} r(s)u(s)\,ds\right|$ עבור $|x - x_0| \leq a$ אז $u(x) \equiv 0$ שם.

הוכחה. נסמן $w(x) = \int_{x_0}^{x} r(s)u(s)\,ds$. כמובן ש־ $w(x_0) = 0$.

א. בסביבה הימנית $[x_0, x_0 + a]$ מתקיים $w(x) \geq 0$, $w'(x) = r(x)u(x)$. אי השוויון הנתון הופך ל־$0 \leq u(x) \leq w(x)$ ועל כן $w'(x) = r(x)u(x) \leq r(x)w(x)$. נכפול את אי השוויון $w'(x) - r(x)w(x) \leq 0$ ב־ $\exp\left(-\int_{x_0}^{x} r(s)\,ds\right)$ ונקבל כי

$$\frac{d}{dx}\left(\exp\left(-\int_{x_0}^{x} r(s)\,ds\right) w(x)\right) \leq 0.$$

לפיכך הפונקציה $\exp\left(-\int_{x_0}^{x} r\right) w(x)$ אינה עולה ב־$[x_0, x_0 + a]$ וערכה ב־x_0 הוא $w(x_0) = 0$. מכאן נובע כי $w(x) \leq 0$ ו־$0 \leq u(x) \leq w(x)$, לכן $u(x) \equiv 0$ ב־$[x_0, x_0 + a]$.

ב. ב־$[x_0 - a, x_0]$ יהיה $w(x) \leq 0$, אי השוויון הנתון הוא $u(x) \leq -w(x)$ וכך $w'(x) = r(x)u(x) \leq -r(x)w(x)$. הפעם נסיק כי הפונקציה $\exp\left(+\int_{x_0}^{x} r\right) w(x)$ אינה עולה ב־$[x_0 - a, x_0]$ ומתאפסת ב־x_0, לפיכך $w(x) \geq 0$. אי השוויונות הנגדיים גוררים הפעם כי $u(x) \equiv w(x) \equiv 0$ בקטע $[x_0 - a, x_0]$. סעיף ג' הוא אחוד שני האפשרויות הקודמות. □

נחזור לאי השוויון (11.2), ונפעיל עליו את למה 11.2. מתקבל כי $\left|\left| \mathbf{y}_2(x) - \mathbf{y}_1(x) \right|\right| \equiv 0$ ב־$|x - x_0| \leq a$ ולבעיית ההתחלה אין שתי פתרונות שונים. □

תרגיל 11.1 תהיינה $u(x), r(x)$ פונקציות רציפות, $u(x), r(x) \geq 0$ ו־c קבוע אי־שלילי. אם

$$u(x) \leq c + \int_{x_0}^{x} r(s)u(s)\,ds, \qquad x_0 \leq x \leq x_0 + a,$$

אז

$$u(x) \leq c \exp\left(\int_{x_0}^{x} r(s)\,ds\right).$$

מסקנה זו נקראת אי־שוויון Gronwall-Bellman. □

בניסוח תנאי ליפשיץ החד־צדדי נפריד בין המשוואה החד־ממדית לבין בעיה רב־ממדית. נתחיל במקרה הסקלרי.

משפט 11.3 (יחידות חד צדדית) תהי נתונה בעיית ההתחלה החד־ממדית

$$y'(x) = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0, \qquad f : R^2 \to R, \tag{11.3}$$

כש־$f(x,y)$ רציפה עבור $|x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b$.
א. אם מתקיים תנאי ליפשיץ חד צדדי

$$f(x,y_2) - f(x,y_1) \le L(y_2 - y_1) \qquad \text{לכל} \qquad y_2 > y_1 \tag{11.4}$$

L קבוע אי שלילי, אז לבעיית ההתחלה (11.3) יש לכל היותר פתרון אחד בקטע $[x_0, x_0 + a]$.
ב. אם מתקיים $-L(y_2 - y_1) \le f(x,y_2) - f(x,y_1)$ לכל $y_2 > y_1$ אז לבעיית ההתחלה (11.3) יש לכל היותר פתרון אחד בקטע $[x_0 - a, x_0]$.

הוכחה. נניח להפך כי לבעיית ההתחלה יש שני פתרונות y_1, y_2 השונים זה מזה באיזו נקודה של $[x_0, x_0 + a]$. יהי $x_1 = \inf\{\, x \in [x_0, x_0 + a],\ y_1(x) \ne y_2(x)\}$. לפי הנחתנו $x_0 \le x_1$, $y_1(x) = y_2(x)$ עבור $x_0 \le x \le x_1$ ו־$y_1(x) \ne y_2(x)$ בקטע מסוים $x_1 < x < x_1 + \varepsilon$. נסמן את הפתרון הגדול יותר כ־y_2 כלומר $y_2(x) > y_1(x)$ עבור $x_1 < x < x_1 + \varepsilon$. בנסיבות אלה

$$0 < y_2(x) - y_1(x) = \int_{x_1}^{x} \big(f\,(s, y_2(s)) - f\,(s, y_1(s))\big)\, ds \le L \int_{x_1}^{x} \big(y_2(s) - y_1(s)\big)\, ds.$$

לפי למה 11.2, חלק א', $y_2(x) - y_1(x) \equiv 0$ ב־$[x_1, x_1 + \varepsilon]$. סתירה זו מאשרת כי לא יתכנו שני פתרונות שונים מימין לנקודת ההתחלה.

במקרה השני נקח $x_1 = \sup\{\, x \in [x_0 - a, x_0],\ y_1(x) \ne y_2(x)\}$ ויהי $y_2(x) > y_1(x)$ עבור $x_1 - \varepsilon < x < x_1$. אז

$$\begin{aligned} 0 < y_2(x) - y_1(x) &= \int_{x_1}^{x} \big(f\,(s, y_2(s)) - f\,(s, y_1(s))\big)\, ds \\ &= \int_{x}^{x_1} \big(f\,(s, y_1(s)) - f\,(s, y_2(s))\big)\, ds \le L \int_{x}^{x_1} \big(y_2(s) - y_1(s)\big)\, ds. \end{aligned}$$

ולפי למה 11.2, חלק ב', $y_2(x) - y_1(x) \equiv 0$ ב־$[x_1 - \varepsilon, x_1]$, סתירה. □

מסקנה 11.4 אם $f(x,y)$ אינו עולה כ־y לכל x קבוע, אז אז לבעיית ההתחלה (11.3) יש לכל היותר פתרון אחד בקטע $[x_0, x_0 + a]$.
אם $f(x,y)$ אינו יורד כ־y אז לבעיה יש לכל היותר פתרון אחד בקטע $[x_0 - a, x_0]$.

מסקנה זו מתקבלת מהמקרה הפרטי $L = 0$.

דוגמא 11.2 בדוגמא 3.2 טיפלנו בבעיית ההתחלה $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$. בדוגמא זו $f(x,y) = y^{1/3}$ רציף אך אינו מקיים תנאי ליפשיץ בשום סביבה של $y = 0$, ואכן

לבעיה יש פתרונות רבים היוצאים מ־$(0,0)$. כאן אנו יכולים לפרט מעט יותר. מכיון ש־$f(x,y)=y^{1/3}$ עולה ב־y, לבעיה פתרון יחיד משמאל לנקודת ההתחלה, והוא $y(x)\equiv 0$ ב־$(-\infty,0]$. לעומת זאת לבעיית ההתחלה $y'=-y^{1/3}$, $y(0)=0$ יש פתרון יחיד דווקא מימין ל־$x=0$. □

בבעיית התחלה וקטורית עלינו להכליל את תנאי ליפשיץ החד־צדדי הסקלרי (11.4).

משפט 11.5 (יחידות חד צדדית) תהי נתונה בעיית ההתחלה הוקטורית (11.1),

$$\mathbf{y}\,'(x)=\mathbf{f}(x,\mathbf{y}),\qquad \mathbf{y}\,(x_0)=\mathbf{y_0},$$

כש־$\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ רציפה עבור $|x-x_0|\le a,\ ||\mathbf{y}-\mathbf{y_0}||\le b$. אם לכל $\mathbf{y},\mathbf{z}$ מתקיים תנאי ליפשיץ חד צדדי

$$(\mathbf{f}(x,\mathbf{y_1})-\mathbf{f}(x,\mathbf{y_2}),\ \mathbf{y_1}-\mathbf{y_2})\le L||\mathbf{y_1}-\mathbf{y_2}\,||^2 \tag{11.5}$$

L קבוע אי שלילי, אז לבעיית ההתחלה (11.1) יש לכל היותר פתרון אחד בקטע $[x_0,x_0+a]$.

הוכחה. נסמן $v(x)=||\mathbf{y}_2(x)-\mathbf{y}_1(x)\,||^2=\sum_{i=1}^{n}\big(y_{2,i}(x)-y_{1,i}(x)\big)^2$. מהמערכת (11.1) מתקבל

$$\begin{aligned}v'(x)&=\sum_{i=1}^{n}2\big(y_{2,i}(x)-y_{1,i}(x)\,\big)\big(\,y'_{2,i}(x)-y'_{1,i}(x)\,\big)\\&=\sum_{i=1}^{n}2\big(y_{2,i}(x)-y_{1,i}(x)\,\big)\big(f_i(x,\mathbf{y_2})-f_i(x,\mathbf{y_1})\,\big)\\&\le 2L\,||\mathbf{y}_2(x)-\mathbf{y}_1(x)\,||^2\;=\;2Lv(x),\end{aligned}$$

וכמובן $v(x_0)=0$. הודות ללמה 11.2 נובע כי $v(x)\equiv 0$ ב־$[x_0,x_0+a]$. באופן דומה ההנחה

$$-L||\mathbf{y_1}-\mathbf{y_2}\,||^2\le(\mathbf{f}(x,\mathbf{y_1})-\mathbf{f}(x,\mathbf{y_2}),\ \mathbf{y_1}-\mathbf{y_2})$$

גוררת יחידות ב־ $[x_0-a,x_0]$. □

11.2 משפט היחידות של Osgood

נתחיל בהכללה בלתי לינארית של למה 11.2.

למה 11.6 תהי $g(z)$ פונקציה רציפה, לא יורדת, $g(0)=0$, $g(z)>0$ ל־$z>0$ ו־

$$\int_{0^+}\frac{dz}{g(z)}=\infty. \tag{11.6}$$

אם

$$0 \le u(x) \le \int_{x_0}^{x} g\big(u(t)\big)\,dt, \qquad x_0 \le x \le a,$$

אז $u(x) \equiv 0$ ב־$[x_0, a]$.

הוכחה. אם $u(x) \not\equiv 0$ ב־$[x_0, a]$, נניח ללא הגבלת כלליות כי $u(x) > 0$ בסביבה ימנית מסוימת של x_0. אחרת, נחליף את x_0 ב־$x_1 = \inf\{\, x \in [x_0, a], u(x) \neq 0 \,\}$.

בדומה להוכחת למה 11.2, נסמן $w(x) = \int_{x_0}^{x} g\big(u(t)\big)\,dt$. בסימון זה אי השוויון הנתון הופך ל־$0 \le u(x) \le w(x)$. כמובן ש־$w(x_0) = 0$, וב־$(x_0, a]$ הפונקציה $w(x)$ חיובית ולא יורדת כי $w'(x) = g\big(u(x)\big) \ge 0$. לפיכך

$$0 \le w'(x) = g(u(x)) \le g(w(x))\,.$$

לכל $0 < \delta < a - x_0$,

$$\int_{x_0+\delta}^{a} \frac{w'(x)}{g\big(w(x)\big)}\,dx \le a - (x_0 + \delta) < a - x_0\ . \tag{11.7}$$

מצד שני, עם $z = w(x)$,

$$\int_{x_0+\delta}^{a} \frac{w'(x)}{g\big(w(x)\big)}\,dx = \int_{w(x_0+\delta)}^{w(a)} \frac{dz}{g(z)} \ \longrightarrow \infty$$

כאשר $\delta \to 0$, כי הודות לרציפות $w(x)$, $\varepsilon = w(x_0 + \delta) \to 0$. סתירה זו מוכיחה כי $u(x) \equiv 0$. □

משפט 11.7 (משפט היחידות של *Osgood*[1]) תהי הפונקציה $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ רציפה ל־$|x - x_0| \le a$, $||\mathbf{y} - \mathbf{y_0}|| \le b$ ומקיימת שם

$$||\,\mathbf{f}(x, \mathbf{y_1}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y_2})\,|| \le g\left(||\mathbf{y_1} - \mathbf{y_2}||\right),$$

g כמו בלמה 11.6. אז לבעיית ההתחלה (11.1) יש לכל היותר פתרון אחד בסביבת x_0.

הוכחה. כמו בהוכחת משפט 11.1 נניח כי לבעיית ההתחלה (11.1) יש שני פתרונות $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$. אז עבור $x \ge x_0$,

$$\begin{aligned} \big|\big|\,\mathbf{y}_2(x) - \mathbf{y}_1(x)\big|\big| &\le \int_{x_0}^{x} \big|\big|\,\mathbf{f}\left(s, \mathbf{y}_2(s)\right) - \mathbf{f}\left(s, \mathbf{y}_1(s)\right)\big|\big|\,ds \\ &\le \int_{x_0}^{x} g\left(\big|\big|\,\mathbf{y}_2(s) - \mathbf{y}_1(s)\big|\big|\right)\,ds \end{aligned} \tag{11.8}$$

[1] W. F. Osgood, 1864-1943

ולפי למה 11.6, $\left|\left| \mathbf{y}_2(x) - \mathbf{y}_1(x) \right|\right| \equiv 0$. משמאל ל־$x_0$ ההוכחה אנלוגית. □

תרגיל 11.3 קל להרחיב את תנאי משפט 11.7 ל־

$$|| \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z}) || \leq h(x) g \left(||\mathbf{y} - \mathbf{z}|| \right),$$

כאשר $h(x) \geq 0$ רציף ב־$a \leq |x - x_0|$. בהוכחת טענה זו (11.7) יהפוך ל־

$$\int_{x_0+\delta}^{a} \frac{w'(x)}{g\big(w(x)\big)}\, dx \leq \int_{x_0+\delta}^{a} h(x)\, dx < \infty \ . \qquad \square$$

דוגמא 11.4 בחירת פונקציית ההשוואה $g(z) = Lz$ מחזירה אותנו למשפט היחידות של ליפשיץ. כדוגמא נוספת נסתכל במשוואה

$$y' = f(x,y) = \begin{cases} y \log(y) & 0 < y, \\ 0 & y \leq 0, \end{cases}$$

ובתנאי ההתחלה $y(x_0) = 0$. הפונקציה $f(x,y)$ רציפה אך אינה מקיימת תנאי ליפשיץ בסביבת $y = 0$ כי נגזרתה בלתי חסומה שם. לכן ננסה להפעיל את קריטריון Osgood ל־

$$f(x,y) - f(x,z) = y \log(y) - z \log(z).$$

הפונקציה $y \log(y)$ קמורה (כי $(y \log(y))'' = 1/y > 0$), על כן לכל $0 < z < y$, שיפוע המיתר על הקטע $[z, y]$ גדול משיפוע המיתר על הקטע המוזז שמאלה, $[0, y - z]$:

$$\frac{y \log(y) - z \log(z)}{y - z} \geq \frac{(y-z)\log(y-z) - 0}{(y-z) - 0} \ .$$

בקטע $0 < y \leq 1/e$ הפונקציה $y \log(y)$ יורדת, לכן

$$0 > y \log(y) - z \log(z) \geq (y - z) \log(y - z), \qquad 0 < z < y \leq 1/e.$$

לפיכך

$$|y \log(y) - z \log(z)| \leq (y - z) |\log(y - z)| \equiv g(y - z)$$

עם $g(y) = y |\log y|$. נותר רק לאמת כי g זה מקיים את תנאי Osgood, (11.6). ובאמת,

$$\int_{\varepsilon} \frac{dy}{g(y)} = \int_{\varepsilon} \frac{dy}{y |\log y|} = \log(|\log(\varepsilon)|) \to +\infty, \qquad \varepsilon \to 0^+,$$

ולפי משפט 11.7 לתנאי ההתחלה $y(x_0) = 0$ יש פתרון יחיד. □

11.3 משפט היחידות של Nagumo

משפט 11.8 (משפט היחידות של *Nagumo*)[2] תהי הפונקציה $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ רציפה ב־$|x-x_0| \le a$, $||\mathbf{y}-\mathbf{y_0}|| \le b$ ומקיימת שם

$$|| \mathbf{f}(x,\mathbf{y_1}) - \mathbf{f}(x,\mathbf{y_2}) || \le \frac{1}{|x-x_0|} || \mathbf{y_1} - \mathbf{y_2} ||. \tag{11.9}$$

אז לבעיית ההתחלה (11.1) יש לכל היותר פתרון אחד בסביבת x_0.

הוכחה. תחילה נוכיח את הטענה מימין לנקודה x_0, ב־$[x_0, x_0+a]$. נניח כי לבעיית ההתחלה (11.1) יש שני פתרונות $\mathbf{y}_1(x)$, $\mathbf{y}_2(x)$ אשר מקיימים $\mathbf{y}_1(x_0) = \mathbf{y}_2(x_0) = \mathbf{y}_0$. אז עבור $x \ge x_0$,

$$\begin{aligned} \big|\big| \mathbf{y}_2(x) - \mathbf{y}_1(x) \big|\big| &\le \int_{x_0}^{x} \big|\big| \mathbf{f}\left(s, \mathbf{y}_2(s)\right) - \mathbf{f}\left(s, \mathbf{y}_1(s)\right) \big|\big| \, ds \\ &\le \int_{x_0}^{x} \frac{\big|\big| \mathbf{y}_2(s) - \mathbf{y}_1(s) \big|\big|}{s - x_0} \, ds. \end{aligned} \tag{11.10}$$

נסמן $w(x) = \dfrac{\big|\big| \mathbf{y}_2(x) - \mathbf{y}_1(x) \big|\big|}{x - x_0}$. כאשר $x \to x_0$,

$$w(x) = \left|\left| \frac{\mathbf{y}_2(x) - \mathbf{y}_0}{x - x_0} - \frac{\mathbf{y}_1(x) - \mathbf{y}_0}{x - x_0} \right|\right| \longrightarrow \big|\big| \mathbf{y}_2{}'(x_0) - \mathbf{y}_1{}'(x_0) \big|\big|$$
$$= \big|\big| \mathbf{f}\left(x_0, \mathbf{y}_0\right) - \mathbf{f}\left(x_0, \mathbf{y}_0\right) \big|\big| = 0$$

ובחירת $w(x_0) = 0$ מבטיחה כי $w(x)$ תהי רציפה ב־$[x_0, x_0+a]$.

בסימון החדש אי השוויון האינטגרלי (11.10) נכתב כ־

$$0 \le w(x) \le \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} w(s)\, ds, \qquad x \ge x_0,$$

כלומר $w(x)$ קטן או שווה בכל נקודה של $[x_0, x_0+a]$ מהממוצע שלו. זה אפשרי לפונקציה רציפה $w(x)$ אך ורק אם $w(x)$ קבוע, דהיינו $w(x) \equiv w(x_0) = 0$. בזה הוכח כי $\mathbf{y}_2(x) \equiv \mathbf{y}_1(x)$ מימין ל־x_0.

משמאל ל־x_0 ההוכחה דומה עם החלפות הסימנים המתאימות. □

דוגמא 11.5 תוצאת משפט היחידות של Nagumo חריפה, במובן שאת הקבוע 1 באגף ימין של (11.9) אי אפשר להחליף באף קבוע גדול יותר. הדוגמא הבאה של Perron[3] מציגה לכל $\varepsilon > 0$ משוואה דיפרנציאלית סקלרית המקיימת

$$|f(x,y) - f(x,z)| \le \frac{1+\varepsilon}{x} |y - z|, \tag{11.11}$$

[2] Mitio Nagumo, 1905-1995
[3] Oskar Perron, 1880-1975

ולה אינסוף פתרונות העוברים דרך הנקודה $(0,0)$. עבור $\varepsilon > 0$ כלשהו נקח

$$f(x,y) = \begin{cases} (1+\varepsilon)x^{\varepsilon}, & x^{1+\varepsilon} \le y, \\ (1+\varepsilon)\dfrac{y}{x}, & 0 < y < x^{1+\varepsilon}, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

פונקציה זו רציפה ל־$x \ge 0$ ולכל y. היא אף מקיימת את אי השוויון (11.11). למשל, במקרה ש־$0 < z < x^{1+\varepsilon} < y$, אז

$$|f(x,y) - f(x,z)| = \left|(1+\varepsilon)x^{\varepsilon} - (1+\varepsilon)\frac{z}{x}\right| = \frac{1+\varepsilon}{x}\left(x^{1+\varepsilon} - z\right) \le \frac{1+\varepsilon}{x}|y-z|$$

וכך גם באפשרויות האחרות. למרות זאת יש לבעיית ההתחלה אינסוף פתרונות מהצורה $y = cx^{1+\varepsilon}$, $0 < c < 1$. □

11.4 משפט היחידות של Kamke

משפטי היחידות שראינו בסעיפים הקודמים התבססו על חסמים ספציפיים עבור ההפרש $||\mathbf{f}(x,\mathbf{y}) - \mathbf{f}(x,\mathbf{z})||$. לעומת זאת, המשפט של Kamke[4] משווה את המשוואה הנחקרת למשוואת מבחן. נביא כאן את אחד הגירסאות של המשפט.

משפט 11.9 (משפט היחידות של *Kamke*) תהי הפונקציה $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ רציפה עבור המלבן $x_0 \le x \le x_0 + a$, $||\mathbf{y} - \mathbf{y_0}|| \le b$. כמו כן תהי הפונקציה הסקלרית $g(x,z)$ רציפה וחיובית במלבן הפתוח למחצה $x_0 < x \le x_0 + a$, $0 \le z \le 2b$ ולא יורדת במשתנה z. נניח כי הפונקציה $z(x) \equiv 0$ היא הפונקציה היחידה המקיימת את המשוואה

$$z' = g(x,z), \tag{11.12}$$

ואת התנאים

$$z(x_0) = 0, \qquad z'_+(x_0) = 0 \tag{11.13}$$

($z'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} (z(x) - z(x_0))/(x - x_0)$ היא הנגזרת מימין). אם

$$||\,\mathbf{f}(x,\mathbf{y_1}) - \mathbf{f}(x,\mathbf{y_2})\,|| \le g(x, ||\mathbf{y_1} - \mathbf{y_2}||) \tag{11.14}$$

אז לבעיית ההתחלה (11.1) יש לכל היותר פתרון אחד בסביבה ימנית של x_0.

[4] Erich Kamke, 1890-1961

הוכחה. **שלב א.** נטפל בקטע $x_0 \le x \le x_0 + a$. נניח כי לבעיית ההתחלה (11.1) יש שני פתרונות שונים $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ ונסמן $y(x) = ||\mathbf{y}_1(x) - \mathbf{y}_2(x)||$. על פי תנאי ההתחלה,

$$y(x_0) = ||\mathbf{y}_1(x_0) - \mathbf{y}_2(x_0)|| = 0,$$

$$y'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{||\mathbf{y}_1(x) - \mathbf{y}_2(x)|| - 0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \left|\left| \frac{\mathbf{y}_1(x) - \mathbf{0}}{x - x_0} - \frac{\mathbf{y}_2(x) - \mathbf{0}}{x - x_0} \right|\right| \tag{11.15}$$

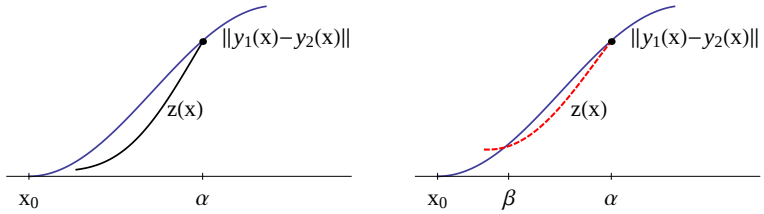
$$= ||\mathbf{y}_1{}'(x_0) - \mathbf{y}_2{}'(x_0)|| = ||\,\mathbf{f}(x_0, \mathbf{y_0}) - \mathbf{f}(x_0, \mathbf{y_0})\,|| = 0.$$

שלב ב. לפי הנחתנו קיימת נקודה $x_0 < \alpha \le x_0 + a$ כך ש־$y(\alpha) > 0$. מכיון ש־g רציפה, לפי משפט (3.6) אפשר להעביר דרך הנקודה $(\alpha, y(\alpha))$ פתרון $z(x)$ של המשוואה $z' = g(x, z)$. פתרון זה אינו בהכרח יחיד. הפתרון מוגדר (לפחות) בסביבה מסוימת משמאל ל־$x = \alpha$. נוכיח כי

$$z(x) \le y(x) = ||\mathbf{y}_1(x) - \mathbf{y}_2(x)|| \tag{11.16}$$

לכל $x_0 < x \le \alpha$, כל עוד $z(x)$ קיים.

אם (11.16) אינו נכון, יש נקודה β, $x_0 < \beta \le \alpha$, בה $z(\beta) = y(\beta)$ ומשמאלה לה $z(x) > y(x)$ בקטע $\beta - h < x < \beta$ עבור h די קטן. ראה איור 11.1, א.



איור 11.1: א. המקרה $z(x) > y(x)$ ב. המקרה $z(x) \le y(x)$

$\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ פתרונות (11.1),

$$y(\beta) = ||\mathbf{y}_1(\beta) - \mathbf{y}_2(\beta)|| = \left|\left| \int_{x_0}^{\beta} \Big(\mathbf{f}\,(s, \mathbf{y}_2(s)) - \mathbf{f}\,(s, \mathbf{y}_1(s))\Big) ds \right|\right|$$

וכן

$$y(\beta - h) = \left|\left| \int_{x_0}^{\beta - h} \Big(\mathbf{f}\,(s, \mathbf{y}_2(s)) - \mathbf{f}\,(s, \mathbf{y}_1(s))\Big) ds \right|\right|.$$

נחסיר שני שוויונות אלה זה מזה והודות לאי שוויון המשולש $||\mathbf{v}-\mathbf{u}|| \leq ||\mathbf{u}|| - ||\mathbf{v}||$,

$$\begin{aligned} y(\beta) - y(\beta-h) &\leq \left|\left| \int_{\beta-h}^{\beta} \Big(\mathbf{f}\left(s, \mathbf{y}_2(s)\right) - \mathbf{f}\left(s, \mathbf{y}_1(s)\right) \Big) ds \right|\right| \\ &\leq \int_{\beta-h}^{\beta} \left|\left| \mathbf{f}\left(s, \mathbf{y}_2(s)\right) - \mathbf{f}\left(s, \mathbf{y}_1(s)\right) \right|\right| ds \\ &\leq \int_{\beta-h}^{\beta} g(s, y(s))\, ds. \end{aligned}$$

באופן דומה מקבלים מהמשוואה (11.12) כי

$$z(\beta) - z(\beta-h) = \int_{\beta-h}^{\beta} g(s, z(s))\, ds.$$

בקטע $\beta - h \leq x \leq \beta$ קיים $z(x) \geq y(x)$ והודות למונוטוניות $g(x,z)$, גם

$$g(x, y(x)) \leq g(x, z(x)).$$

בנוסף על כך $z(\beta) = y(\beta)$. מכאן נובע בעזרת שני האינטגרלים שלמעלה כי $z(\beta - h) \leq y(\beta - h)$, דבר הסותר את הגדרת β. בזה אימתנו כי $z(x) \leq y(x)$, כפי שנטען ב־(11.16). ראה איור 11.1, ב.

שלב ג. מצד שני נוכיח כי $z(x) > 0$ לכל $x_0 < x \leq \alpha$, כל עוד $z(x)$ קיים. כי אם $z(x)$ מתאפס באיזו נקודה $x = \gamma$, $x_0 < \gamma < \alpha$, אז נביט בפונקציה

$$\tilde{z}(x) = \begin{cases} 0, & x_0 \leq x \leq \gamma, \\ z(x), & \gamma \leq x \leq \alpha. \end{cases}$$

זו פונקציה שאינה זהותית 0 ומקיימת את תנאי (11.13), בסתירה להנחות המשפט. מכיון שכך,

$$0 < z(x) \leq y(x) \tag{11.17}$$

משמאל ל־α, כל עוד $z(x)$ קיים. אולם פתרון ניתן להמשכה עד לשפת התחום בו בו תנאי משפט קיום בתוקף. במקרה שלנו ניתן להמשיך את $z(x)$ לכל אורך הקטע $x_0 < x \leq \beta$ והודות לחסם (11.17), $\lim_{x \to x_0^+} z(x) = 0$. נגדיר $z(x_0) = 0$.

לבסוף נחשב את הנגזרת מימין, $z'_+(x_0)$. מ־(11.17) נובע $\dfrac{z(x)}{x - x_0} \leq \dfrac{y(x)}{x - x_0}$ ובעזרת (11.15),

$$0 \leq z'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{z(x) - 0}{x - x_0} \leq \lim_{x \to x_0^+} \frac{y(x) - 0}{x - x_0} = y'_+(x_0) = 0.$$

אי לכך $z'_+(x_0) = 0$. מצאנו אם כן פתרון לא זהותית 0 של (11.12) המקיים גם את התנאים (11.13), בסתירה להנחותינו. בזה הוכח כי לבעיית ההתחלה (11.1) לא ייתכנו שני פתרונות שונים. □

למשפט היחידות של Kamke קיימת גם גירסה שאינה מניחה מונוטוניות של $g(x,z)$ אך הוכחתה דורשת מושגים נוספים.

משפט היחידות של Kamke מכיל כמקרים פרטיים את שלושת משפטי היחידות שלפניו. $z' = g(x,z) = Lz$ משחזר את תנאי ליפשיץ)משפט 11.1(. בעזרת בחירת $z' = g(x,z)$ כ־$z' = g(z)$, עם $\int_{0^+} dz/g(z) = \infty$, נקבל את משפט היחידות של Osgood.

לבסוף נתבונן ב־$z' = g(x,z) = z/x$. פתרונותיה הם $z(x) = cx$ וביניהם רק $z(x) \equiv 0$ מקיים את התנאים $z(0) = z'_+(0) = 0$. אלה הם תנאי משפט Kamke ומהם מסיקים את משפט היחידות של Nagumo. לעומת זאת המשוואה $z' = (1+\varepsilon)z/x$, $\varepsilon > 0$, אינה מתאימה למשפט Kamke כי אינסוף פתרונותיה $z(x) = cx^{(1+\varepsilon)}$ מקיימים את (11.13).

11.5 פתרון מקסימלי ופתרון מינימלי

לאחר שהצגנו תנאים מספיקים אחדים ליחידות פתרון בעיות התחלה, נתאר את התנהגות הפתרונות במקרה של חוסר יחידות. נסתפק כאן בתאור המצב במשוואה סקלרית במישור $(x,y) \in R^2$. נראה כי במקרה זה כל הפתרונות היוצאים מנקודת התחלה אחת "נעולים" בין שני פתרונות מיוחדים, הפתרון המקסימלי והפתרון המינימלי.

הגדרה 11.10 תהי $f(x,y)$ רציפה בתחום מישורי. $\tilde{y}(x)$ נקרא פתרון מקסימלי לבעיית ההתחלה

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0, \tag{11.18}$$

אם לכל פתרון אחר $y(x)$ של אותה בעיה מתקיים $y(x) \le \tilde{y}(x)$ בתחום ההגדרה המשותף לשניהם. באופן אנלוגי מוגדר פתרון מינימלי $\underset{\sim}{y}(x)$.

מהגדרת המושג ברור כי אם פתרון מקסימלי קיים, אז הוא יחיד.

דוגמא 11.6 לבעיית ההתחלה $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$ (ראה דוגמא 3.2) יש פתרון מקסימלי $\tilde{y}(x) = \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}$ ופתרון מינימלי $\underset{\sim}{y}(x) = -\left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}$ עבור $x \ge 0$. □

משפט 11.11 אם $f(x,y)$ רציפה בתחום D, $(x_0,y_0) \in D$, אז לבעיית ההתחלה (11.18) יש פתרון מקסימלי ופתרון מינימלי.

הוכחה. נזכיר את משפט הקיום של Cauchy-Peano (משפט 3.6): אם הפונקציה $f(x,y)$ רציפה במלבן $B = \{|x-x_0| \le a,\ |y-y_0| \le b\} \subset D$, $M = \max_B |f(x,y)|$, $h = \min\{a, b/M\}$, אז לבעיית ההתחלה (11.18) קיים פתרון המוגדר עבור $|x-x_0| \le h$. רציפות $f(x,y)$ לבדה אינה מבטיחה את יחידות הפתרון.

על מנת להוכיח קיום פתרון מקסימלי ב־$x_0 \le x \le x_0 + h$, נסתכל בבעיית ההתחלה

$$y' = f(x,y) + \frac{1}{n}, \qquad y(x_0) = y_0. \tag{11.19}$$

כאן $\max_B \left| f(x,y) + \frac{1}{n} \right| \le M + \frac{1}{n}$, ובשל זאת לכל $0 < h' < h$ יש n די גדול כך שלבעיה (11.19) יש פתרון $y_n(x)$ המוגדר לפחות על הקטע $x_0 \le x \le x_0 + h'$. נוכיח כי לכל פתרון $y(x)$ של (11.18) ולכל פתרון $y_n(x)$ של (11.19) מתקיים

$$y(x) \le y_n(x), \qquad x_0 \le x \le x_0 + h'. \tag{11.20}$$

אם אין זה כך, אז יש $x_1 \in (x_0, x_0 + h']$, כך ש־$y(x_1) > y_n(x_1)$. נסמן ב־x_2 את אינפימום הערכים ב־$(x_0, x_0 + h']$ כך ש־$y(x) > y_n(x)$. אז $y(x_2) = y_n(x_2)$, ומימינו $y(x) > y_n(x)$. אך זה עומד בניגוד ל־

$$y_n'(x_2) = f(x_2, y_n(x_2)) + \frac{1}{n} > f(x_2, y(x_2)) = y'(x_2).$$

הסתירה מוכיחה את (11.20).

סדרת הפונקציות $y_n(x)$ חסומה במשותף ורציפה במשותף כי $|y_n(x) - y_0| \le b$, ו־$|y_n'(x)| = \left| f(x,y) + \frac{1}{n} \right| \le M + 1$. על פי משפט Ascoli-Arzela (משפט 3.5) יש לה תת סדרה המתכנסת במידה שווה על $x_0 \le x \le x_0 + h'$,

$$\widetilde{y}(x) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}(x).$$

הבעיה (11.19) שקולה למשוואה האינטגרלית

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \left[f(s, y_n(s)) + \frac{1}{n} \right] ds.$$

כאשר $n = n_k \to \infty$, נקבל כי פונקציית הגבול $\widetilde{y}(x)$ מקיימת

$$\widetilde{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \widetilde{y}(s))\, ds$$

והיא פתרון של בעיית ההתחלה (11.18) על $[x_0, x_0 + h']$. אך זה נכון לכל $0 < h' < h$. לכן נובע מ־(11.20) כי

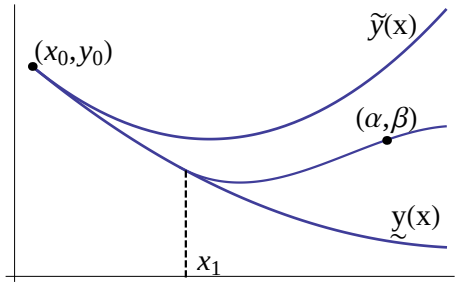
$$y(x) \le \widetilde{y}(x), \qquad x_0 \le x \le x_0 + h,$$

ו־$\widetilde{y}(x)$ הוא פתרון מקסימלי.

באופן אנלוגי מוכיחים קיום פתרון מינימלי $\underset{\sim}{y}(x)$. □

מסקנה 11.12 דרך כל נקודה (α,β) המוגחת בין הפתרון המקסימלי והפתרון המינימלי, $x_0<\alpha\le x_0+h$, $\underset{\sim}{y}(\alpha)<\beta<\widetilde{y}(\alpha)$, עובר פתרון של בעיית ההתחלה (11.18).

הוכחה. נעביר פתרון דרך הנקודה (α,β) ונמשיך אותו שמאלה. אם הוא פוגש באחד מהפתרונות הקיצוניים, נאמר $\underset{\sim}{y}(x)$ בנקודה $(x_1,\underset{\sim}{y}(x_1))$, אז בנקודה זו שיפועו שווה לשיפוע הפתרון הקיצוני שם, $f(x_1,\underset{\sim}{y}(x_1))$, לכן ניתן להמשיך אותו באופן חלק שמאלה עד (x_0,y_0). ראה איור 11.2. □



איור 11.2: פתרון מקסימלי ופתרון מינימלי

11.6 אי שוויונות

משפט 3.24 ומסקנה 3.25 עוסקים, בהנחת קיום ויחידות, בהשוואת שתי משוואות דיפרנציאלית: אם $y(x)$ פתרון של $y'=f(x,y)$, $z(x)$ פתרון של $z'=g(x,z)$, $g(x,y)\le f(x,y)$ ו־ $z(x_0)\le y(x_0)$ אז $z(x)\le y(x)$ בכל קטע הגדרה משותף מימין ל־x_0.

ננסח טענות דומות בעזרת המושג "פתרון מקסימלי", שאינו דורש יחידות פתרון בעיית התחלה.

משפט 11.13 יהי $y(x)$ פתרון מקסימלי של $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$, $v(x)$ פונקציה C^1 המקיימת $z'\le f(x,z)$ ו־$z(x_0)\le y(x_0)$. אז $z(x)\le y(x)$ בכל קטע הגדרה משותף מימין ל־x_0.

הוכחה. כמו בהוכחת משפט 11.11 יהי $y_n(x)$ פתרון בעיית ההתחלה $y'=f(x,y)+\dfrac{1}{n}$, $y(x_0)=y_0$. נוכיח כי $z(x)\le y_n(x)$ מימין ל־x_0. אחרת נסמן ב־x_2 את אינפימום הערכים ב־$(x_0,x_0+h']$ כך ש־$z(x)>y_n(x)$. כאן $x_2\ge x_0$, בנקודה זו $z(x_2)=y_n(x_2)$, ומימינו $z(x)>y_n(x)$. אך זה עומד בניגוד ל־

$$z'(x_2)\le f(x_2,z(x_2))<f(x_2,y_n(x_2))+\frac{1}{n}=y_n'(x_2).$$

הסתירה מוכיחה כי $z(x) \le y_n(x)$ מימין ל־x_0. כמו בהוכחת 11.11 תת סדרה $y_{n_k}(x)$ מתכנסת לפתרון המקסימלי $y(x)$ ומכאן נובעת הטענה. □

משפט 11.14 אם $y(x)$ פתרון מקסימלי של המשוואה $y' = f(x,y)$, $z(x)$ הוא פתרון של $z' = g(x,z)$, וקיים $g(x,z) \le f(x,z)$ ו־$z(x_0) \le y(x_0)$, אז $z(x) \le y(x)$ בכל קטע הגדרה משותף מימין ל־x_0.

הוכחה. כאן $z'(x) = g(x,z(x)) \le f(x,z(x))$, $z(x_0) \le y(x_0)$, ולכן הטענה נובעת מהמשפט הקודם. זו הכללה של משפט 3.24. □

משפטי היחידות של ליפשיץ, אוסגוד ונגומו מבוססים על אי שוויונות אינטגרליים הדומים ללמה של Gronwall (למה 3.17 ותרגיל 11.1). טענה זו ניתן לנסח גם כך:
נתון $r(x) \ge 0$. אם $z(x)$ מקיים את אי־השוויון

$$z(x) \le z_0 + \int_a^x r(s)z(s)\,ds, \qquad a \le x \le b,$$

$y(x)$ פתרון בעיית ההתחלה $y'(x) = r(x)y(x)$, $y(a) = y_0$ ו־$z_0 \le y_0$ אז $z(x) \le y(x)$ מימין ל־a.

טענה זו ניתנת להכללה לאי־שוויונות לא לינאריים בתנאי שנוסיף הנחת מונוטוניות:

משפט 11.15 נניח כי $z(x)$ מקיים

$$z(x) \le z_0 + \int_a^x f(s,z(s))\,ds, \qquad a \le x \le b,$$

$y(x)$ פתרון מקסימלי של הבעיה

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

אם $f(x,y)$ פונקציה לא יורדת ב־y ו־$z_0 \le y_0$, אז $z(x) \le y(x)$ בקטע ההגדרה המשותף מימין ל־a.

הוכחה. נסמן $w(x) = z_0 + \int_a^x f(s,z(s))\,ds$. בסימון זה אי השוויון הנתון הופך ל־$0 \le z(x) \le w(x)$. הודות למונוטוניות f הפונקציה $w(x)$ מקיימת

$$w'(x) = f(x,z(x)) \le f(x,w(x))$$

וכמובן ש־$w(a) = z_0$. על פי משפט 11.13 נובע כי $z(x) \le w(x) \le y(x)$. □

פרק 12

פתרונות אסימפטוטיים

12.1 קרוב פתרונות משוואה מסדר שני – LG או WKB

כפי שראינו זה מכבר, את מרבית המשוואות הדיפרנציאליות אין אנו יודעים לפתור בצורה סגורה, דהינו לבטא אותם על ידי מספר סופי של פונקציות מוכרות היטב. על כן עלינו להסתפק בפתרונות מקורבים וחסמים טובים ככל האפשר על גודל הטעות שעלולה לקרות.

כדוגמא נתחיל בחקירת משואה דיפרנציאלית מסדר שני,

$$y'' + p(x)y = 0, \qquad 0 \le x < \infty. \tag{12.1}$$

אין בכך מגבלה קשה מדי, כי כפי שראינו בדוגמא 5.8 ניתן להביא כל משואה לינארית מסדר שני לצורה זו על ידי כפל הנעלם בפונקציה מתאימה. כצעד ראשון נחליף את המשתנה החפשי x ואת הנעלם u ב־(12.1) על ידי הצבה כללית

$$y = a(x)v, \qquad t = t(x).$$

השומרת על לינאריות המשואה, ונסמן את הנגזרות לפי המשתנים t, x בסימונים $\frac{d}{dx} = (\ )'$, $\frac{d}{dt} = (\dot{\ })$, בהתאמה. מהצבת $y = av$ מקבלים $(a"v + 2a'v' + av'') + pav = 0$. במעבר מ־$x$ ל־t נשתמש ב־$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{dx} = \dot{v}\,t'(x)$ וכן $v'' = \frac{d^2v}{dx^2} = \ddot{v}\,(t')^2 + \dot{v}\,t''$. ונקבל

$$a''v + 2a'(\dot{v}\,t'(x)) + a(\ddot{v}\,(t'(x))^2 + \dot{v}\,t''(x)) + pav = 0.$$

כמשואה דיפרנציאלית ב־$v(t)$, זו

$$a(t'(x))^2\,\ddot{v} + \big(at''v + 2a't'(x)\big)\dot{v} + (pa + a'')v = 0. \tag{12.2}$$

מכאן והלאה נניח כי $p > 0$ או $p < 0$. כדי שהמשואה (12.2) תהיה פשוטה ככל האפשר נדרוש שתי דרישות,

$$(i) \quad (t'(x))^2 = |p| \qquad , (ii) \quad at''(x) + 2a't'(x) = 0$$

שתהפוכנה את המשוואה (12.2) לאחר חלוקה ב־$a|p| \neq 0$, ל־

$$\ddot{v} + \Big(\sigma + \frac{a''}{a|p|}\Big)v(t) = 0, \qquad \sigma = p/|p| = \operatorname{sgn}\{p\}. \tag{12.3}$$

דרישה *(i)* מחייבת כי $t(x) = \int^x |p(t)|^{1/2}\,dt$ ומדרישה *(ii)* מתקבל $\dfrac{a'}{a} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{t''}{t'}$, כלומר $a(x) = (t')^{-1/2} = |p|^{-1/4}$. המחובר האחרון ב־(12.3) הוא

$$\frac{a''}{a|p|} = |p|^{-3/4}\big(|p|^{-1/4}\big)''$$

והגענו למשוואה הדיפרנציאלית

$$\ddot{v}(t) + \Big(\sigma + |p|^{-3/4}\frac{d^2}{dx^2}\big(|p|^{-1/4}\big)\Big)v(t) = 0, \qquad \sigma = \operatorname{sgn}\{p\}. \tag{12.4}$$

נעיר כי $p^{-3/4}\big(p^{-1/4}\big)'' = \dfrac{5}{16}\dfrac{p'^2}{p^3} - \dfrac{1}{4}\dfrac{p''}{p^2}$. נסכם זאת כלמה:

למה 12.1 החלפות המשתנים

$$t(x) = \int^x |p(s)|^{1/2}\,ds, \qquad y = |p|^{-1/4}(x)v,$$

הופכת את המשוואה $y'' + p(x)y = 0$ בה p בעל סימן קבוע, חיובי או שלילי, למשוואה

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \Big(\sigma + R(t)\Big)v = 0, \qquad \sigma = \operatorname{sgn}\{p\} \tag{12.5}$$

כאשר $R(t) = |p|^{-3/4}\dfrac{d^2}{dx^2}\Big(|p|^{-1/4}\Big)$. החלפת המשתנים שלמעלה נקראת טרנספורמציית ליוביל־גרין *(Liouville-Green (LG) transform)*.

הקו המנחה של הדיון שלנו היא הציפיה כי אם $R(x)$ "די קטן" כאשר $x \to \infty$, אז ניתן לקרב את פתרונות המשוואה (12.5) על ידי פתרונות $v'' \pm v = 0$. עבור $p < 0$ אלה הן $v_{1,2}(\xi) = e^{\xi}, e^{-\xi}$ ובמונחי המשתנים המקוריים,

$$y_{1,2}(x) = |p|^{-1/4}(x)\exp\left(\pm\int |p(x)|^{1/2}\,dx\right) \tag{12.6}$$

הנקראות פונקציות LG. כש־$p > 0$ מקבלים פתרונות מרוכבים, צמודים

$$y_{1,2}(x) = p^{-1/4}(x)\exp\left(\pm i\int p^{1/2}(x)\,dx\right). \tag{12.7}$$

נותר לצקת תוכן מתמטי למושגים הציוריים "די קטן" ו־"פתרונות מקורבים". זה יעשה בהמשך, במשפט 12.8.

החלפות משתנים דומות מועילות גם בנושאים אחרים. למשל,

תרגיל 12.1 הראה כי עבור $x>0$, הטרנספורמציה $y=x^{1/2}v$, $t=\frac{2}{3}x^{3/2}$, הופכת את משוואת Airy, $y''-xy=0$, למשוואה $t^2\ddot{v}+t\dot{v}-\big(t^2+\frac{1}{9}\big)v=0$.

עבור $x<0$, ההצבה $y=(-x)^{1/2}$, $t=\frac{2}{3}(-x)^{3/2}$ הופכת את משוואת Airy למשוואת בסל מסדר $1/3$,

$$t^2\ddot{v}+t\dot{v}+\big(t^2-\frac{1}{9}\big)v=0. \qquad \square$$

פיזיקאים נגשים לבעית קרוב פתרונות מנקודת מבט שונה אך מגיעים, כמובן, לתוצאות שקולות. הגישה נקראת שיטת WKB (או $WKBJ$) על שמות מגליה.[1] כמוטיווציה נסתכל במשוואת שרודינגר בעלת מימד מרחבי אחד ובלתי תלויה בזמן,

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+(E-V(x))\psi=0,$$

בה $\hbar$ - קבוע פלנק המצומצם, הוא מספר קטן מאד. לכן אנו מעונינים למצוא פתרונות מקורבים למשוואה

$$\varepsilon^2 y''+p(x)y=0 \tag{12.8}$$

כאשר $\varepsilon\to 0$. למשוואה עם מקדמים קבועים $\varepsilon^2y''+py=0$ יש פתרונות $\exp\left(\pm\frac{\sqrt{-p}}{\varepsilon}\,x\right)$

לכן ל-(12.8) מחפשים פתרון מהצורה $y(x)=\exp\Big(\frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n S_n(x)\Big)$. עם פונקציות $S_n(x)$ שיקבעו אחר כך. נגזור

$$y'=\exp(...)\Big(\frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n S_n'\Big),\quad y''=\exp(...)\Big[\,\Big(\frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n S_n'\Big)^2+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n S_n'',\,\Big]$$

ונציב ל-(12.8):

$$\varepsilon^2\Big[\,\Big(\frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n S_n'\Big)^2+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n S_n''\,\Big]+p(x)=0.$$

מהשוואת חזקות ε,

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^0: && {S_0}'^2+p(x)=0,\\
&\varepsilon^1: && 2S_0'S_1'+S_0''=0,\\
&... &&\\
&\varepsilon^n: && 2S_0'S_n'+\sum_{j=1}^{n-1}S_j'S_{n-j}'+S_{n-1}''=0, \qquad n\ge 2.
\end{aligned}$$

[1] Wentzel, Kramers, Brillouin; Jeffreys

עבור $p<0$, $S_0(x)=\pm\int^x |p|^{1/2}(t)\,dt$. בהמשך $S_1'(x)=-\frac{1}{2}\frac{S_0''}{S_0'}$ ולכן

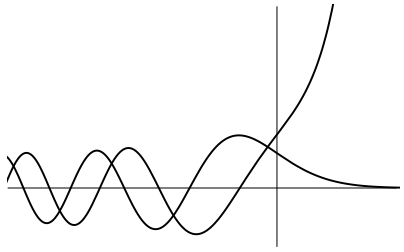
$$S_1(x)=-\frac{1}{2}\log|S_0'(x)|=\log|p|^{-1/4}(x).$$

בהזנחת חזקות חיוביות של ε מתקבלים קרובי WKB

$$\exp\left(\pm\frac{1}{\varepsilon}\int^x |p|^{1/2}\,dt+\log|p|^{-1/4}\right)=|p|^{-1/4}\exp\left(\pm\frac{1}{\varepsilon}\int^x |p|^{1/2}\,dt\right). \quad (12.9)$$

הקרובים (12.6), (12.7) ו־(12.9) התקבלו באופן אינטואיטיבי. במשפט 12.8 נראה כי בתנאים מתאימים הם באמת מקרבים את הפתרונות המדויקים.

השיטות המוזכרות בסעיף זה תקפות רק כאשר $p(x)\neq 0$. נקודה בה $p(x)$ מחליף סימן נקראת נקודת מפנה *(turning point)* ובסביבתה הפתרונות משנים את אופיים ואין סיכוי לקרבם על ידי נוסחה אחידה. שינוי אופי זה מודגם על ידי שני פתרונות של משוואת Airy, $y''-yu=0$ אשר מתנהגים בצורות שונות עבור $x<0$ ו־$x>0$. ראה איור 12.1.



איור 12.1: שני פתרונות של משוואת Airy

12.2 משפט הקרוב האסימפטוטי של Levinson

הטענות בסעיף זה מנוסחות עבור מערכות של משוואות לינאריות ומהן נסיק מסקנות על משוואות נוספות, למשל עבור המשוואה מסדר שני (12.1). נתחיל ממערכת משוואות

$$\mathbf{y}'(x)=A(x)\mathbf{y}(x) \quad (12.10)$$

שאותה איננו יודעים לפתור במפורש אך היא "קרובה" עבור ערכי x גדולים למערכת פשוטה

$$\mathbf{y}'(x)=A_0(x)\mathbf{y}(x) \quad (12.11)$$

שפתרונותיה ידועים לנו באופן מפורש. השאלה היא באיזה תנאים והנחות פתרונות (12.10) קרובים לפתרונות (12.11) כאשר $x\to\infty$.

פגשנו בשני סוגי מערכות שפתרונותיהם ידועים במפורש. הראשונה היא מערכת עם מקדמים קבועים

$$\mathbf{y}\,'(x) = C\mathbf{y}(x), \tag{12.12}$$

בה $A_0(x) = C$ היא מטריצה של קבועים. במשפט 6.12 ראינו כי אם למטריצה C יש n וקטורים עצמיים בלתי תלויים $\mathbf{v}_1, \ \dots \ , \mathbf{v}_n$ המתאימים ל־n ערכים עצמיים $\lambda_1, \ \dots \ , \lambda_n$ אז למערכת דיפרנציאלית (12.12) יש בסיס של n פתרונות מהצורה

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 x}, \ \dots \ , \ \mathbf{y}_n = \mathbf{v}_n e^{\lambda_n x}. \tag{12.13}$$

מערכת שניה שפתרונותיה ידועם במפורש היא מערכת אלכסונית

$$\mathbf{y}\,'(x) = \Lambda(x)\mathbf{y}(x) \tag{12.14}$$

בה $\Lambda(x)$ היא מטריצה אלכסונית $\Lambda(x) = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ \dots \ , \ \lambda_n\}$. בכתיב של רכיבים המערכת נכתבת כ־

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

אשר מתפרקת ל־n משוואות סקלריות

$$y_j\,'(x) = \lambda_y(x) y_j(x), \qquad j = 1, \dots, n$$

שפתרונותיהם

$$y_j(x) = c_j \exp\left(\int_a^x \lambda_j(t)\,dt\right).$$

הפתרון הכללי הוא

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \exp\left(\int_a^x \lambda_j(t)\,dt\right) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp\left(\int_a^x \lambda_n(t)\,dt\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \exp\left(\int_a^x \lambda_j(t)\,dt\right)\mathbf{e}_j\end{aligned}$$

בו $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ הם וקטורי הבסיס הסטנדרטי כך של־$\mathbf{e}_j$ הקואורדינטה ה־j־ית היא 1 וכל האחרות הן 0. לכן ל־(12.14) יש בסיס פתרונות

$$\mathbf{y}_k(x) = \exp\left(\int_a^x \lambda_k(t)\,dt\right)\mathbf{e}_k, \qquad k = 1, \dots, n. \tag{12.15}$$

במקרה זה המטריצה

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Big(\mathbf{y}_1(x) \vdots \mathbf{y}_2(x) \vdots \ \cdots \ \vdots \mathbf{y}_n(x)\Big) \\ &= \operatorname{diag}\left\{\exp\left(\int_a^x \lambda_1(t)\,dt\right),\ \ldots\ ,\ \exp\left(\int_a^x \lambda_n(t)\,dt\right)\right\}\end{aligned}$$

היא המטריצה היסודית של המערכת (12.14) המקיימת $\Phi(a) = I$.

על סמך שתי המערכות הפשוטות (12.14), (12.12) נתבונן במערכות

$$\mathbf{y}\,'(x) = \big(C + R(x)\,\big)\,\mathbf{y}(x), \tag{12.16}$$

$$\mathbf{y}\,'(x) = \big(\Lambda(x) + R(x)\,\big)\,\mathbf{y}(x) \tag{12.17}$$

בהן $R(x)$ היא "קטנה" עבור ערכי x גדולים. מערכות אלה נקראות "מערכת קבועה באופן אסימפטוטי" ו־"מערכת אלכסונית באופן אסימפטוטי" בהתאמה.

נוכיח נוסחה שתעזור בהמשך לפתור את המערכת (12.17) בעזרת maוואה אינטגרלית. בסעיף 6.9 טיפלנו במערכות משוואות לינאריות, לא הומוגניות

$$\mathbf{z}\,' = P(x)\mathbf{z} + \mathbf{q}(x)$$

בשיטת וריאצית הפרמטרים. אם $\Psi(x)$ מטריצה יסודית של המערכת ההומוגנית המתאימה $\mathbf{y}\,' = P(x)\mathbf{y}$, נציב למערכת הבלתי הומוגנית $\mathbf{z} = \Psi(x)\mathbf{u}$ ונקבל

$$\Psi'(x)\mathbf{u}(x) + \Psi(x)\mathbf{u}\,'(x) = P(x)\big(\Psi(x)\,\mathbf{u}(x)\big) + \mathbf{q}(x).$$

הודות ל־$\Psi'(x) = P(x)\Psi(x)$ נשאר $\Psi(x)\mathbf{u}\,'(x) = \mathbf{q}(x)$, כלומר $\mathbf{u}\,'(x) = \Psi^{-1}(x)\,\mathbf{q}(x)$. בזה סילקנו את המטריצה $P(x)$ מהחישובים. לאחר אינטגרציה מתקבל

$$\mathbf{u}(x) = \int_a^x \Psi^{-1}(s)\,\mathbf{q}(s)\,ds + \mathbf{c},$$

שבו $\mathbf{c}$ מסמן קבוע אינטגרציה וקטורי. כך קיבלנו למערכת הבלתי הומוגנית פתרון כללי

$$\mathbf{z}(x) = \Psi(x)\,\mathbf{u}(x) = \Psi(x)\mathbf{c} + \Psi(x)\int_a^x \Psi^{-1}(s)\,\mathbf{q}(s)\,ds.$$

בפרט, עבור מערכת מהצורה

$$\mathbf{z}\,' = \big(P(x) + R(x)\big)\mathbf{z} \tag{12.18}$$

נבחר $\mathbf{q}(x) = R(x)\mathbf{z}(x)$ ונקבל כי המערכת (12.18) שקולה למשוואה האינטגרלית

$$\mathbf{z}(x) = \Psi(x)\mathbf{c} + \Psi(x)\int_a^x \Psi^{-1}(s)\,R(s)\mathbf{z}(s)\,ds. \tag{12.19}$$

נפצל את המטריצה היסודית $\Psi(x)$ לסכום של שני מטריצות $\Psi(x) = \Psi_1(x) + \Psi_2(x)$ כך שהעמודות בכל אחת מ־$\Psi_1(x), \Psi_2(x)$ הן פתרונות של $\mathbf{y}' = P(x)\mathbf{y}$. אז המשוואה האינטגרלית (12.19) תכתב בצורה

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}(x) &= \Psi(x)\mathbf{c} + \big(\Psi_1(x) + \Psi_2(x)\big) \int_a^x \Psi^{-1}(s)\, R(s)\mathbf{z}(s)\, ds \\
&= \Psi(x)\mathbf{c} + \Psi_1(x) \int_a^x \Psi^{-1}(s)\, R(s)\mathbf{z}(s)\, ds \\
&\qquad + \Psi_2(x) \left(\int_a^b \Psi^{-1}(s)\, R(s)\mathbf{z}(s)\, ds - \int_x^b \Psi^{-1}(s)\, R(s)\mathbf{z}(s)\, ds \right) \\
&= \left(\Psi(x)\mathbf{c} + \Psi_2(x) \int_a^b \Psi^{-1}(s) R(s)\mathbf{z}(s)\, ds \right) \\
&\qquad + \Psi_1(x) \int_a^x \Psi^{-1}(s)\, R(s)\mathbf{z}(s)\, ds - \Psi_2(x) \int_x^b \Psi^{-1}(s)\, R(s)\mathbf{z}(s)\, ds
\end{aligned}$$

שני המחוברים הראשונים הם קומבינציות לינאריות של פתרונות בלתי תלויים של המערכת ההומוגנית ולכן אפשר לייצג את סכומם כ־$\Psi(x)\mathbf{k}$ עם וקטור $\mathbf{k}$ מתאים. מכאן מתקבלת לפתרונות (12.18) המשוואה האינטגרלית

$$\mathbf{z}(x) = \Psi(x)\mathbf{k} + \Psi_1(x) \int_a^x \Psi^{-1}(s) R(s)\mathbf{z}(s) ds - \Psi_2(x) \int_x^b \Psi^{-1}(s) R(s)\mathbf{z}(s) ds. \quad (12.20)$$

נוסחה זו מתאימה במיוחד לקטע $[a, b]$ ובה יש לנקודה $x = b$ תפקיד דומה לזו של $x = a$.

את משפט Levinson[2] עבור המערכת (12.17) נרשום על פי הניסוח של Eastham[3] ולא על פי הניסוח המקורי של לוינסון.

משפט 12.2 (Levinson) תהי

$$\Lambda(x) = \operatorname{diag}\{\lambda_1,\ \ldots\ ,\ \lambda_n\}$$

מטריצה אלכסונית המקיימת את התנאי הבא:
לכל שני מספרים שלמים $1 \le i, j \le n$ ולכל $a \le t \le x < \infty$ מתקיים לפחות אחד מאי השוויונות

$$(i) \qquad \int_t^x \operatorname{Re}\{\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\}\, ds \le K_1$$

או

$$(ii) \qquad \int_t^x \operatorname{Re}\{\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\}\, ds \ge K_2,$$

[2] Norman Levinson, 1912-1975

[3] M. S. P. Eastham, The asymptotic solution of linear differential systems, Clarendon Press, 1989

K_1, K_2 שני קבועים. הנחה זו נקראת תנאי (L).
אם המטריצה $R(x)$ מקיימת

$$\int_a^\infty ||R(x)||\,dx < \infty \tag{12.21}$$

אז למערכת (12.17) יש פתרונות מהצורה

$$\mathbf{y}_k(x) = \big(\mathbf{e}_k + o(1)\big)\exp\left(\int_a^x \lambda_k(t)\,dt\right), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{12.22}$$

כאשר $x \to \infty$. נזכיר כי $o(1)$ מציין גודל השואף ל־0 כש־$x \to \infty$.

הוכחה. שלב 1. לפני שניגש להוכחת המשפט, נדון במשמעות ההנחות (i) ו־(ii). (i) מחייב כי המנה $||\mathbf{y}_i(x)||/||\mathbf{y}_j(x)||$ חסומה מלמעלה ו־(ii) גורר כי אותה מנה חסומה מלמטה על ידי מספר חיובי. ביחד, נשללת האפשרות כי עבור זוג i, j,

$$\limsup ||\mathbf{y}_i(x)||/||\mathbf{y}_j(x)|| = \infty \qquad \text{וגם} \qquad \liminf ||\mathbf{y}_i(x)||/||\mathbf{y}_j(x)|| = 0$$

שתי ההנחות (i), (ii), אינן שוללות זו את זו ושתיהן יכולות להתקיים יחדיו. כדי להמנע ממצב כזה ננסח אותם בצורה שונה. נסמן $I_{ij}(x) = \int_a^x \mathrm{Re}\{\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\}\,ds$ ונרשום את (i) בצורה

$$I_{ij}(x) - I_{ij}(t) \le K_1, \qquad a \le t \le x < \infty. \tag{12.23}$$

מ־(12.23) נובע כי או ש־$I_{ij}(x) \to -\infty$ כאשר $x \to \infty$ או ש־$I_{ij}(x)$ חסום מלמטה לכל $x \ge a$. אחרת היו שתי סדרות של נקודות השואפות לאינסוף כך ש־$I_{ij}(p_m) \to -\infty$ ו־$I_{ij}(q_m) > \text{const}$ ובחירת $x = q_{m_1} > t = p_{m_2}$ היתה סותרת את (12.23). לפיכך נפצל את קבוצת הזוגות ב־(i) לשתיים: הזוגות כך ש־$\int_t^x \mathrm{Re}\{\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\}\,ds \le K_1$ לכל $t \le x$ וגם $I_{ij}(x) = \int_a^x \mathrm{Re}\{\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\}\,ds \to -\infty$ והזוגות האחרים עבורם $I_{ij}(x)$ חסום מלמטה ושאותם נצרף אל (ii). על פי חלוקה זו יוחלף בתנאי (L):
לכל זוג מספרים שלמים $1 \le i, j \le n$ ולכל $a \le t \le x < \infty$ מתקיים בדיוק אחד משתי ההנחות

$$(i') \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_t^x \mathrm{Re}\{\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\}\,ds \le K_1 \\ \displaystyle\int_a^x \mathrm{Re}\{\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\}\,ds \to -\infty \qquad \text{וגם} \end{cases} \tag{12.24}$$

או

$$(ii') \qquad \int_t^x \mathrm{Re}\{\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\}\,ds \ge K_2 \tag{12.25}$$

עבור j נתון התנאי (L') שלמעלה מפצל את השלמים i לשתי קבוצות זרות על פי (i') ו־(ii') כך שעבורם

$$||\mathbf{y}_i(x)||/||\mathbf{y}_j(x)|| \to 0 \qquad \text{או} \qquad ||\mathbf{y}_i(x)||/||\mathbf{y}_j(x)|| \geq \text{const} > 0$$

בהתאמה. הודות לפיצול זה התנאי (L') נקרא "תנאי הדיכוטומיה".

שלב 2. נבחר שלם מסויים k ובשבילו נוכיח את (12.22). כצעד ראשון נבצע במערכת האלכסונית באופן אסימפטוטי (12.17) החלפת משתנה

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{z}(x) \exp\left(\int_a^x \lambda_k(t)\,dt\right).$$

בעקבות הצבה זו נקבל מערכת

$$\mathbf{z}\,'(x) = \big(\Lambda(x) + R(x)\big)\,\mathbf{z}(x) - \lambda_k(t)\mathbf{z}(x)$$

או במילים אחרות

$$\mathbf{z}\,'(x) = \big(\Lambda_1(x) + R(x)\big)\,\mathbf{z}(x) \tag{12.26}$$

בה

$$\Lambda_1(x) = \text{diag}\{\lambda_1 - \lambda_k,\ \ldots\ , \lambda_{k-1} - \lambda_k,\ 0,\ \ldots\ , \lambda_n - \lambda_k\}.$$

כדי להוכיח קיום פתרון מהצורה (12.22) למערכת (12.17) מספיק להוכיח כי למשוואה (12.26) יש פתרון מהצורה

$$\mathbf{z}_k(x) = \mathbf{e}_k + o(1), \qquad x \to \infty. \tag{12.27}$$

נעזר במערכת ללא הפרטורבציה $R(x)$, $\mathbf{z}\,'(x) = \Lambda_1(x)\,\mathbf{z}(x)$, ובמטריצה יסודית שלה,

$$\Phi(x) = \text{diag}\left\{\exp\Big(\int_a^x (\lambda_1 - \lambda_k)dt\Big),\ \ldots\ ,\ \exp\Big(\int_a^x (\lambda_n - \lambda_k)dt\Big)\right\}.$$

נמספר ונסדר מחדש את רכיבי האלכסון על פי התנאי (L') כך שהזוגות i, k המקיימים את (i') יתאימו ל־$i = 1, 2, \ldots, p-1$ ואלה המתאימים ל־(ii') יתאימו ל־$i = p, p+1, \ldots, n$. עבור $i = k$ איבר האלכסון הוא

$$\exp\Big(\int_a^x (\lambda_k(t) - \lambda_k(t))dt\Big) \equiv 1.$$

זוג זה בוודאי שייך ל־(ii') ועל ידי סדור מחדש נוכל להניח כי $k = p$. לפיכך בסידור זה

$$\begin{cases} \exp\Big(\int_t^x \text{Re}\{\lambda_i(s) - \lambda_p(s)\}\,ds\Big) \leq K_1, \quad a \leq t \leq x < \infty, \\ \exp\Big(\int_a^x \text{Re}\{\lambda_i(s) - \lambda_p(s)\}\,ds\Big) \to 0 \qquad \text{וגם} \end{cases} \tag{12.28}$$

עבור $1 \le i \le p-1$ ואילו עבור $p \le i \le n$ ו־$a \le x \le t < \infty$,

$$\exp\Big(\int_t^x \mathrm{Re}\{\lambda_i(s) - \lambda_p(s)\}\, ds \Big) \le K_2. \tag{12.29}$$

בהתאם נפצל את המטריצה היסודית $\Phi(x)$ כ־$\Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x)$ כאשר

$$\Phi_1(x) = \mathrm{diag}\left\{ \exp\Big(\int_a^x \lambda_1 - \lambda_p\Big), \dots, \exp\Big(\int_a^x \lambda_{p-1} - \lambda_p\Big),\ 0,\ \dots\ ,\ 0 \right\}.$$

$$\Phi_2(x) = \mathrm{diag}\left\{ 0,\ \dots\ ,\ 0,\ \exp\Big(\int_a^x \lambda_p - \lambda_p\Big), \dots, \exp\Big(\int_a^x \lambda_n - \lambda_p\Big) \right\}.$$

לפי (12.28), כל אלמנט של מכפלת המטריצות

$$\Phi_1(x)\Phi^{-1}(t) = \mathrm{diag}\left\{ \exp\Big(\int_t^x \lambda_1 - \lambda_p\Big), \dots, \exp\Big(\int_t^x \lambda_{p-1} - \lambda_p\Big), 0, \dots, 0 \right\} \tag{12.30}$$

חסום מלמעלה עבור $a \le t \le x < \infty$ ואף שואף ל־0 כאשר $x \to \infty$. וכן על פי (12.29), כל אלמנט של

$$\Phi_2(x)\Phi^{-1}(t) = \mathrm{diag}\left\{ 0, \dots, 0, \exp\Big(\int_t^x \lambda_p - \lambda_p\Big), \dots, \exp\Big(\int_t^x \lambda_n - \lambda_p\Big) \right\} \tag{12.31}$$

חסום מלמעלה עבור $a \le x \le t < \infty$. לכן גם המטריצות $\Psi_1(x)\Psi^{-1}(t), \Psi_2(x)\Psi^{-1}(t)$ חסומות בנורמה בקטעי האינטגרציה המתאימים,

$$\begin{aligned} &||\Psi_1(x)\Psi^{-1}(t)|| \le c_1, \qquad a \le t \le x < \infty, \\ &||\Psi_2(x)\Psi^{-1}(t)|| \le c_2, \qquad a \le x \le t < \infty. \end{aligned} \tag{12.32}$$

שלב 3. בחלק העיקרי של ההוכחה מטרתנו היא להראות כי למשוואה האינטגרלית

$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{e}_p + \int_a^x \Psi_1(x)\Psi^{-1}(t)R(t)\mathbf{z}(t)dt - \int_x^\infty \Psi_2(x)\Psi^{-1}(t)R(t)\mathbf{z}(t)dt \tag{12.33}$$

קיים פתרון והוא מקיים $\mathbf{z}(x) = \mathbf{e}_p + o(1)$ כאשר $x \to \infty$. המשוואה (12.33) דומה ל־(12.20) ונבדלת ממנה בגבול העליון ∞, דבר המחייב דיון בהתכנסות האינטגרל. לאחר שקיום פתרון יוכח, ברור על ידי גזירה ישירה כי הוא גם פתרון של המערכת (12.26).

נוכיח קיום פתרון ל־(12.33) בשיטת הקרובים העוקבים. נגדיר $\mathbf{z}_1(x) = \mathbf{e}_p$,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{m+1}(x) = \mathbf{e}_p &+ \int_a^x \Psi_1(x)\Psi^{-1}(t)R(t)\mathbf{z}_m(t)dt \\ &- \int_x^\infty \Psi_2(x)\Psi^{-1}(t)R(t)\mathbf{z}_m(t)dt, \qquad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{12.34}$$

ראשית נוכיח באינדוקציה כי כל $\mathbf{z}_m(x)$ חסום ב־$[a,\infty)$. זה ברור עבור $m=1$. נניח כי $||\mathbf{z}_m(x)|| \le C_m$. הודות ל־(12.32)

$$\begin{aligned} ||\mathbf{z}_{m+1}(x)|| &\le 1 + c_1 \int_a^x ||R(t)|| \cdot ||\mathbf{z}_m(t)||\, dt + c_2 \int_x^\infty ||R(t)|| \cdot ||\mathbf{z}_m(t)||\, dt \\ &\le 1 + (c_1+c_2)\, C_m \int_a^\infty ||R(t)||\, dt \end{aligned} \tag{12.35}$$

על פי (12.21) הקבוע באגף ימין הוא החסם C_{m+1} ל־$\mathbf{z}_{m+1}(x)$ וטענת החסימות הוכחה.

שלב 3. הוכחת ההתכנסות של סדרת הקרובים העוקבים $\{\mathbf{z}_m(t)\}$ דומה לשלב 3 בהוכחת משפט הקיום והיחידות של Picard-Lindelöf (משפט 3.9). בדומה להערכות למעלה

$$||\mathbf{z}_{m+1}(x) - \mathbf{z}_m(x)|| \le (c_1+c_2) \int_a^\infty ||R(t)|| \cdot ||\mathbf{z}_m(x) - \mathbf{z}_{m-1}(x)||\, dt.$$

עבור $m=1$,

$$||\mathbf{z}_2(x) - \mathbf{z}_1(x)|| \le (c_1+c_2) \int_a^\infty ||R(t)|| dt,$$

ל־$m=2$,

$$\begin{aligned} ||\mathbf{z}_3(x) - \mathbf{z}_2(x)|| &\le (c_1+c_2) \int_a^\infty ||R(t)|| \left((c_1+c_2) \int_a^\infty ||R(t)|| dt \right) dt \\ &= \left((c_1+c_2) \int_a^\infty ||R(t)|| dt \right)^2 \end{aligned}$$

ובאופן כללי

$$||\mathbf{z}_{m+1}(x) - \mathbf{z}_m(x)|| \le \left((c_1+c_2) \int_a^\infty ||R(t)|| dt \right)^m.$$

נבחר a כך ש־

$$q \stackrel{\text{def}}{=} (c_1+c_2) \int_a^\infty ||R(t)|| dt < 1.$$

על ידי השוואה לטור גיאומטרי $\sum q^n$ מתברר כי הטור הטלסקופי $\sum \big(\mathbf{z}_{m+1}(x) - \mathbf{z}_m(x)\big)$ מתכנס במידה שווה בקטע $[a,\infty)$ וכך גם הסדרה

$$\mathbf{z}_m(x) = \mathbf{z}_1(x) + \sum_{i=1}^{m-1} \big(\mathbf{z}_{i+1}(x) - \mathbf{z}_i(x)\big).$$

נסמן את פונקצית הגבול ב־$\mathbf{z}(x) = \lim_{m\to\infty} \mathbf{z}_m(x) = \mathbf{z}_1(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \big(\mathbf{z}_{i+1}(x) - \mathbf{z}_i(x)\big)$.
פונקציה זו חסומה על ידי הקבוע $1 + \sum_{i=1}^{\infty} q^i = 1/(1-q)$ $||\mathbf{z}(x)|| \le$.

כאשר $m \to \infty$ בהגדרת האיטרציות ב־(12.34), נקבל כי פונקצית הגבול $\mathbf{z}(x)$ מקיימת את המשואה האינטגרלית (12.33).

כדי להראות כי $\mathbf{z}(x) \to \mathbf{e}_p$ כש־$x \to \infty$ נכתוב את המשוואה האינטגרלית (12.33) בצורה

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(x) &= \mathbf{e}_p + \int_a^x \Psi_1(x)\Psi^{-1}(t)R(t)\mathbf{z}(t)\,dt - \int_x^\infty \Psi_2(x)\Psi^{-1}(t)R(t)\mathbf{z}(t)\,dt \\ &= \mathbf{e}_p + \int_a^T \Psi_1(x)\Psi^{-1}(t)R(t)\mathbf{z}(t)\,dt + \mathbf{r}(x)\end{aligned} \tag{12.36}$$

כאשר T הוא מספר קבוע שייבחר בהמשך ו־

$$\mathbf{r}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_T^x \Psi_1(x)\Psi^{-1}(t)R(t)\mathbf{z}(t)\,dt - \int_x^\infty \Psi_2(x)\Psi^{-1}(t)R(t)\mathbf{z}(t)\,dt.$$

נעריך את המחוברים ב־(12.36). עבור $x > T$ מתקיים בדומה ל־(12.35) כי

$$\begin{aligned}||\mathbf{r}(x)|| &\le c_1 \int_T^x ||R(t)||\cdot||\mathbf{z}(t)||\,dt + c_2 \int_x^\infty ||R(t)||\cdot||\mathbf{z}(t)||\,dt \\ &\le (c_1+c_2)\,(1-q)^{-1} \int_T^\infty ||R(t)||\,dt.\end{aligned} \tag{12.37}$$

לכל ε נתון אנו בוחרים T כך ש־$||\mathbf{r}(x)|| \le \varepsilon$ לכל $T < x < \infty$. בנוסף על כך, במחובר $\Psi_1(x)\int_a^T \Psi^{-1}(t)R(t)\mathbf{z}(t)\,dt$ של (12.36), מתקיים על פי (12.30), (12.24) כי $\Psi_1(x) \to \infty$ והאינטגרל הוא מספר קבוע שנקבע עם בחירת T. לכן גם מחובר זה קטן מ־ε עבור x די גדול. מכאן נובע כי $||\mathbf{z}(x) - \mathbf{e}_p|| \le 2\varepsilon$ כש־x די גדול, כפי שצריך להוכיח. □

נעבור למערכת קבועה באופן אסימפטוטי,

$$\mathbf{y}\,'(x) = \big(C + R(x)\,\big)\,\mathbf{y}(x), \tag{12.38}$$

בה $R(x)$ "קטנה" עבור ערכי x גדולים.

אפשר לטפל במערכת זו בעזרת משפט 12.2 כאשר המטריצה C ניתנת לליכסון. כפי שהזכרנו במשפט 6.13, מטריצה C, $n \times n$, ניתנת לליכסון אם ורק אם היא בעלת n וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית. במקרה זה המטריצה המלכסנת T בנויה מ־n הוקטורים העצמיים רשומים זה לצד זה כעמודות,

$$T^{-1}CT = \operatorname{diag}\{\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n\} = \Lambda, \qquad T = \Big(\mathbf{u}_1 \vdots\ \mathbf{u}_2 \vdots\ \ldots \vdots\ \mathbf{u}_n\Big).$$

ראה דוגמא (6.17). המקרה הפרטי הפשוט ביותר בה כל הוקטורים העצמיים בלתי תלויים הוא כאשר כל הערכים העצמיים שונים זה מזה.

משפט 12.3 תהי C מטריצה $n\times n$ בעלת n וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית והמטריצה $R(x)$ מקיימת

$$\int_a^\infty ||R(x)||\,dx < \infty.$$

אז כאשר $x\to\infty$, למערכת $\mathbf{y}\,'(x) = \big(C + R(x)\big)\,\mathbf{y}(x)$ יש פתרונות מהצורה

$$\mathbf{y}_k(x) = \big(\mathbf{u}_k + o(1)\big)\exp(\lambda_k x), \quad k = 1,\dots,n. \tag{12.39}$$

הוכחה. כצעד ראשון נבצע החלפת משתנים $\mathbf{y}(x) = T\mathbf{z}(x)$ כאשר T המטריצה המלכסנת שלמעלה. אז $T\mathbf{z}\,'(x) = \big(C + R(x)\big)\,T\mathbf{z}(x)$ כלומר

$$\mathbf{z}\,'(x) = \big(\Lambda + T^{-1}R(x)T\big)\,\mathbf{z}(x). \tag{12.40}$$

מכיוון ש־T מטריצה קבועה,

$$\int_a^\infty T^{-1}R(x)T\,dx \;\le\; ||T^{-1}||\,\Big(\int_a^\infty ||R(x)||\,dx\Big)\,||T|| < \infty,$$

כנדרש במשפט לוינסון. תנאי הדיכוטומיה $(i'),(i'')$ מתקיימים באופן אוטומטי כי הערכים העצמיים λ_i קבועים. לכן לפי משפט 12.2 למערכת (12.40) פתרונות

$$\mathbf{z}_k(x) = \big(\mathbf{e}_k + o(1)\big)\exp(\lambda_k x)$$

ו־$\mathbf{y}_k(x) = T\mathbf{z}_k(x)$ מקיימים את (12.39). □

משפט 12.3 עבור מערכת קבועה באופן אסימפטוטי ניתן ליישום גם עבור משוואה ממעלה n שמקדמיה "כמעט" קבועים. לפי דוגמא 6.1, משוואה לינארית מסדר n הופכת על ידי הצבה $\mathbf{y} = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$ למערכת (6.3). נפעיל זאת על המשוואה הלינארית שמקדמיה קבועים באופן אסימפטוטי,

$$y^{(n)} + (c_1 + r_1(x))y^{(n-1)} + \;\cdots\; + (c_n + r_n(x))y = 0. \tag{12.41}$$

ונקבל מערכת $\mathbf{y}\,'(x) = \big(C + R(x)\big)\,\mathbf{y}(x)$ עם

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -c_n & -c_{n-1} & \cdots & & -c_1 \end{pmatrix}.$$

הפולינום האופייני של מטריצה זו הוא $P(\lambda) = |C - \lambda I| = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \;\cdots\; + c_n$ (ראה תרגיל 6.6) ולערך עצמי λ_k מתאים וקטור עצמי מהצורה $(1, \lambda_k, \lambda_k^2, \dots, \lambda_k^{n-1})^T$.

כשמיישמים את משפט 12.3 למשוואה הלינארית ממעלה n (12.41) מתקבל

משפט 12.4 יהיו הקבועים $c_1,\ \ldots,\ c_n$ כך שלפולינום $\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ \cdots\ + c_n$ יש n שרשים שונים זה מזה $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. אם הפונקציות $r_i(x)$ מקיימות

$$\int_a^\infty |r_i(x)|\,dx < \infty.$$

אז כאשר $x \to \infty$, למשוואה (12.41) יש פתרונות $y_k(x)$ כך שהם ונגזרותיהם הם

$$y_k{}^{(i)}(x) = \big(\lambda_k^i + o(1)\big)\exp(\lambda_k x), \qquad i = 0, \ldots, n-1. \tag{12.42}$$

דוגמא 12.2 דוגמא פשוטה למשוואה עליה ניתן ליישם את משפט 12.4 היא המשוואה

$$y'' + (c + r(x))y = 0, \qquad c \neq 0. \tag{12.43}$$

אם $\int_a^\infty |r(x)|\,dx < \infty$, יש לו שני פתרונות

$$y(x) = e^{\pm\sqrt{c}x}\big(1 + o(1)\big), \qquad y'(x) = \pm\sqrt{c}e^{\pm\sqrt{c}x}\big(1 + o(1)\big).$$

כאן $c \neq 0$ יכול להיות מספר מרוכב. במקרה הפרטי שבו $c = -1$, הפתרונות הם $y_{1,2}(x) = e^{\pm ix}\big(1 + o(1)\big)$. נעיר כי מכיוון ש־$|e^{\pm ix}| = 1$, למשוואה יש פתרונות ממשיים $\cos(x)\big(1 + o(1)\big),\ \sin(x)\big(1 + o(1)\big)$ ולא $\cos(x) + o(1),\ \sin(x) + o(1)$.

בהמשך נעסוק במשוואה

$$y^{(n)} + r_1(x)y^{(n-1)} + \ \cdots\ + r_{n-1}(x)y' + r_n(x)y = 0. \tag{12.44}$$

שהיא הפרעה קטנה למשוואה $y^{(n)} = 0$ אשר הפולינום האופיני שלה הוא $r^n = 0$ ושרשיו $r_1 = \cdots = r_n = 0$. זה המצב ההפוך למשפט 12.4. כדי לטפל במצב זה, עלינו להעזר במערכת הכתובה בצורת ז'ורדן. נזכיר כי בסעיף 6.6 סימננו את צורת ז'ורדן כ־

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N. \tag{12.45}$$

משפט 12.5 תהי נתונה המטריצה בצורת ז'ורדן $J(x) = \lambda(x)I + N$ והמערכת

$$\mathbf{y}\,' = \big(J(x) + R(x)\big)\mathbf{y}. \tag{12.46}$$

נניח כי המטריצה $R(x) = (r_{ij}(x))$ מקיימת

$$\int_a^\infty |r_{ij}(x)|x^{i-j}\,dx < \infty. \tag{12.47}$$

אז למערכת (12.46) פתרונות

$$\mathbf{y}_k(x) = \begin{pmatrix} x^{k-1}/(k-1)! + o(x^{k-1}) \\ x^{k-2}/(k-2)! + o(x^{k-2}) \\ \vdots \\ 1 + o(1) \\ o\left(x^{-1}\right) \\ \vdots \\ o\left(x^{-(n-k)}\right) \end{pmatrix} \exp\left(\int_a^x \lambda(t)\,dt\right), \tag{12.48}$$

$k = 1, \ldots, n$, כאשר $x \to \infty$

הוכחה. בסעיף 6.6 ראינו כי מטריצה יסודית של המערכת $\mathbf{y}' = \big(\lambda I + N\big)\mathbf{y}$ מסדר n היא

$$\exp\big(x(\lambda I + N)\big) = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2! & \cdots & x^{n-1}/(n-1)! \\ & 1 & x & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{12.49}$$

עבור $\lambda = 0$ המטריצה היסודית של $\mathbf{y}' = N\mathbf{y}$ יכולה להכתב כמכפלה

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & & \cdots & 0 \\ & x^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x^{-(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1/(n-1)! \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \cdots & 0 \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x^{n-1} \end{pmatrix}$$

נסמן מכפלה זו כ־$\Phi(x) = D^{-1}(x)BD(x)$ כאשר $D(x) = \operatorname{diag}\left\{1, x, \ldots, x^{n-1}\right\}$ ו־B היא המטריצה הקבועה האמצעית, $B = \exp(N)$.

במערכת (12.46) נחליף משתנה $\mathbf{y} = \Phi(x)\mathbf{z}$ ונקבל

$$\Phi'(x)\mathbf{z} + \Phi(x)\mathbf{z}' = \big(\lambda(x)I + N + R(x)\big)\Phi(x)\mathbf{z}.$$

מכיוון ש־$\Phi'(x) = N\Phi(x)$ אנו נשארים עם המערכת

$$\mathbf{z}' = \big(\lambda(x)I + \Phi^{-1}(x)R(x)\Phi(x)\big)\mathbf{z}$$

ובזה סילקנו מהמערכת את המטריצה N.

החלפת משתנה נוספת תהיה $\mathbf{z} = D^{-1}\mathbf{w}$. מכיוון ש־$\big(D^{-1}\big)' = -D^{-1}D'D^{-1}$, נקבל

$$\left(-D^{-1}D'D^{-1}\right)\mathbf{w} + D^{-1}\mathbf{w}' = \big(\lambda(x)I + \Phi^{-1}R\,\Phi\big)D^{-1}\mathbf{w}$$

ולאחר סידור מחדש

$$\mathbf{w}' = \big(\lambda I + D'D^{-1} + D\Phi^{-1}R\,\Phi D^{-1}\big)\mathbf{w}.$$

$D'D^{-1}$ היא המטריצה האלכסונית $D'D^{-1} = x^{-1}\mathrm{diag}\big\{0,1,2,\ldots,n-1\big\}$, לכן נסמן

$$\Lambda(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lambda(x)I + D'D^{-1} = \mathrm{diag}\big\{\lambda(x), \lambda(x)+1/x, \ldots, \lambda(x)+(n-1)/x\big\}.$$

בנוסף, $D\Phi^{-1}R\,\Phi D^{-1} = D\big(D^{-1}BD\big)^{-1}R\big(D^{-1}BD\big)D^{-1} = B^{-1}\big(DRD^{-1}\big)B$ והמערכת שלנו הופכת ל־

$$\mathbf{w}' = \Big(\Lambda(x) + B^{-1}\big(DRD^{-1}\big)B\Big)\mathbf{w}. \tag{12.50}$$

נפעיל את משפט לוינסון על

מערכת (12.50). עבור תנאי הדיכוטומיה (12.24), (12.25) עלינו להתבונן באינטגרלים

$$\int_t^x \mathrm{Re}\big\{\big(\lambda(s)+i/s\big) - \big(\lambda(s)-j/s\big)\big\}\,ds = (i-j)\log(x/t)$$

וגדלים אלה חסומים מלמטה או מלמעלה עבור $x \geq t$ בהתאם אם $i > j$ או $i < j$. תנאי האינטגרביליות (12.21) הוא במקרה שלנו

$$\int_a^\infty ||B^{-1}\big(DRD^{-1}\big)B||\,ds < \infty,$$

ומכיוון ש־B מטריצה קבועה, מספיק לדרוש כי

$$\int_a^\infty ||DRD^{-1}||\,ds < \infty,$$

וזה בדיוק התנאי (12.47).

כשהנחות אלה מתקיימות, פתרונות (12.50) הם

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_k(x) &= \big(\mathbf{e}_k + o(1)\big)\exp\left(\int_a^x \big(\lambda(t) + (k-1)/t\big)\,dt\right)\\ &= \big(\mathbf{e}_k + o(1)\big)x^{k-1}\exp\left(\int_a^x \lambda(t)\,dt\right),\end{aligned} \tag{12.51}$$

ופתרונות (12.46) הם

$$\mathbf{y}_k = \Phi\mathbf{z}_k = \Phi D^{-1}\mathbf{w}_k = \big(D^{-1}BD\big)D^{-1}\mathbf{w}_k = D^{-1}B\mathbf{w}_k.$$

אך

$$D^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x^{-1} & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & & x^{-(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/1! & \cdots & 1/(n-1)! \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1/1! \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2! & \cdots & 1/(n-1)! \\ 0 & x^{-1} & x^{-1}/1! & & x^{-1}/(n-2)! \\ 0 & 0 & x^{-2} & \ddots & x^{-2}/(n-3)! \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & x^{n-2} \end{pmatrix}.$$

לכן

$$\mathbf{y}_k = D^{-1}B\mathbf{w}_k = D^{-1}B\big(\mathbf{e}_k + o(1)\big)\, x^{k-1} \exp\left(\int_a^x \lambda(t)\,dt\right)$$
$$= \begin{pmatrix} 1/(k-1)! + o(1) \\ x^{-1}/(k-2)! + o(x^{-1}) \\ \vdots \\ x^{-(k-1)} + o\big(x^{-(k-1)}\big) \\ o\big(x^{-k}\big) \\ \vdots \\ o\big(x^{-(n-k)}\big) \end{pmatrix} x^{k-1} \exp\left(\int_a^x \lambda(t)\,dt\right)$$

וזו התוצאה הנטענת ב־(12.48). □

נחזור למשוואה (12.44),

$$y^{(n)} + r_1(x)y^{(n-1)} + \ \cdots\ + r_{n-1}(x)y' + r_n(x)y = 0$$

ונדון בה כהפרעה קטנה למשוואה $y^{(n)} = 0$. למשוואה זו פולינום אופיני $\lambda^n = 0$ ושרשיו הם $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, מצב שבאופן ברור לא מכוסה על ידי משפט 12.4 .

משפט 12.6 אם

$$\int_a^\infty x^{i-1}|r_i(x)|\,dx < \infty, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

אז כאשר $x \to \infty$, למשוואה (12.44) יש פתרונות $y_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, כך ש־

$$y_k{}^{(i)}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{k-i-1}}{(k-i-1)!} + o\left(x^{k-i-1}\right), & i = 0, \ldots, k-1, \\ o\left(x^{k-i-1}\right) & i = k, \ldots, n-1. \end{cases} \tag{12.52}$$

הוכחה. המשוואה (12.44) הופכת על ידי ההצבה $\mathbf{y} = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$ למערכת $\mathbf{y}' = \big(N + R(x)\big)\mathbf{y}$ עם

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad R(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -r_n & -r_{n-1} & \cdots & & -r_1 \end{pmatrix}. \tag{12.53}$$

זה מתאים לתנאי משפט (12.5) עם $\lambda(x) \equiv 0$ ולכן

$$\mathbf{y}_k(x) = \begin{pmatrix} y_k \\ y_k' \\ \vdots \\ y_k^{(k-1)} \\ y_k^{(k)} \\ \vdots \\ y_k^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{k-1}/(k-1)! + o\big(x^{k-1}\big) \\ x^{k-2}/(k-2)! + o\big(x^{k-2}\big) \\ \vdots \\ 1 + o(1) \\ o\left(x^{-1}\right) \\ \vdots \\ o\left(x^{-(n-k)}\right) \end{pmatrix},$$

כנדרש. □

12.3 משוואות מסדר שניים

בסעיף (12.1) תארנו גישות אינטואיטיביות לקרוב פתרונות משוואות מהצורה $y'' + p(x)y = 0$ ו־$(r(x)y')' + p(x)y = 0$. עכשיו ניתן ביסוס פורמלי לשיטות אלה.

למה 12.7 נתונה המשוואה הצמודה לעצמה

$$(r(x)y')' + p(x)y = 0, \qquad a \le x < \infty \tag{12.54}$$

בה $r(x) > 0$ ו־$p(x)$ בעל סימן קבוע, חיובי או שלילי. אז החלפות המשתנים

$$t(x) = \int_a^x |p(s)/r(s)|^{1/2}\, ds, \qquad v(t) = |p(x)r(x)|^{1/4}(x)y(x), \tag{12.55}$$

הופכת את המשוואה (12.54) למשוואה

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \big(\sigma + R(t)\big)v = 0, \qquad \sigma = \operatorname{sgn}\{p\} = \pm 1, \tag{12.56}$$

כאשר $R(t) = r(x)^{1/4}|p|^{-3/4}\dfrac{d}{dx}\Big(r(x)\dfrac{d}{dx}\big(\,|p(x)r(x)|^{-1/4}\big)\Big)$.

הוכחת הלמה דומה לזו של למה 12.1. השווה לתרגיל 5.15.

משפט 12.8 יהיו $r(x) > 0$ ו־$p(x) \neq 0$, ממשי ב־$[a, \infty)$ ונניח כי

$$\int^{\infty} \left|p(x)r(x)\right|^{1/2} dx = \infty, \tag{12.57}$$

$$\int^{\infty} \left|p\ r\right|^{-1/4} \Big| \frac{d}{dx}\Big(r\frac{d}{dx}\left|p\ r\right|^{-1/4}\Big)\Big| \, dx < \infty \tag{12.58}$$

אז למשוואה (12.54) יש שני פתרונות $y_1(x), y_2(x)$ כך ש־

$$y_{1,2}(x) \sim |p(x)r(x)|^{-1/4}(x) \exp\left(\pm \int^{x} \big(p(s)/r(s)\big)^{1/2} ds\right), \tag{12.59}$$

$$ry_{1,2}^{'}(x) \sim |p(x)r(x)|^{1/4}(x) \exp\left(\pm \int^{x} \big(p(s)/r(s)\big)^{1/2} ds\right). \tag{12.60}$$

הוכחה. נפעיל על המשוואה (12.54) את החלפת המשתנים (12.55) שבלמה 12.7 ונעבור כך למשוואה (12.56),

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \big(\pm 1 + R(t)\big)v = 0 \qquad \sigma = \mathrm{sgn}\{p\} = \pm 1, .$$

ההנחה (12.57) מבטיחה כי $a \leq x < \infty$ מועתק אל $0 \leq t < \infty$. הודות להנחה (12.57) ו־$dt = |p(x)/r(x)|^{1/2}\, dx$

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} |R(t)|\, dt &= \int_0^{\infty} r(x)^{1/4}|p(x)|^{-3/4} \Big| \frac{d}{dx}\Big(r(x)\frac{d}{dx}\big(\,|p(x)r(x)|^{-1/4}\big)\Big)\Big|\, dt \\ &= \int_a^{\infty} |r(x)p(x)|^{-1/4} \Big| \frac{d}{dx}\Big(r(x)\frac{d}{dx}\big(\,|p(x)r(x)|^{-1/4}\big)\Big)\Big|\, dx < \infty\end{aligned}$$

לכן לפי דוגמא 12.2 למשוואה (12.56) שני פתרונות $v_1(t), v_2(t)$ (הנבדלים בסימן $\pm$),

$$v_{1,2}(t) = e^{\pm\sqrt{\sigma}t}\big(1 + o(1)\big), \qquad v_{1,2}'(t) = \pm\sqrt{\sigma}e^{\pm\sqrt{\sigma}t}\big(1 + o(1)\big).$$

בעזרת ההצבה (12.55) נחזור מהמשתנה $v(t)$ למשתנה המקורי $y(x)$ ונקח בחשבון כי $r > 0$ ו־$\sigma = \mathrm{sgn}\{p\}$. אז

$$\sqrt{\sigma}t = \sqrt{\sigma}\int_a^x |p(s)/r(s)|^{1/2}\, ds = \int_a^x \big(p(s)/r(s)\big)^{1/2}\, ds.$$

עבור הפתרונות $y_1(x), y_2(x)$ מתקבל כי

$$|p\, r|^{1/4}(x)y(x) = v(t) = \exp\Big(\pm \int_a^x \big(p(s)/r(s)\big)^{1/2}\, ds\Big)\big(1 + o(1)\big)$$

כפי שנטען ב־(12.59) וכן

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big(|p\,r|^{1/4}(x)y(x)\Big) &= \frac{dv(t)}{dt}\frac{dt}{dx}\\ &= \big(p(x)/r(x)\big)^{1/2}\exp\Big(\pm\int_a^x\big(p(s)/r(s)\big)^{1/2}\,ds\Big)\big(1+o(1)\big).\end{aligned}$$

נותר להוכיח כי מכאן נובע (12.60). נכתוב את אגף שמאל בצורה

$$\begin{aligned}\Big(|p\,r|^{1/4}(x)y(x)\Big)' &= |p\,r|^{1/4}(x)y'(x)+\Big(|p\,r|^{1/4}\Big)'y\\ &= |p\,r|^{1/4}y'+\frac{1}{4}|p\,r|'|p\,r|^{-3/4}y.\end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned}|p\,r|^{1/4}y' &= \Big(|p\,r|^{1/4}y\Big)'-\frac{1}{4}|p\,r|'/|p\,r|y\\ &= \Big(\frac{p}{r}\Big)^{1/2}\exp\Big(\pm\int_a^x\Big(\frac{p}{r}\Big)^{1/2}ds\Big)\big(1+o(1)\big)\\ &\quad-\frac{1}{4}|p\,r|'|p\,r|^{-3/4}\cdot|p\,r|^{-1/4}\exp\Big(\pm\int_a^x\Big(\frac{p}{r}\Big)^{1/2}ds\Big)\big(1+o(1)\big)\\ &= \left[\Big(\frac{p}{r}\Big)^{1/2}-\frac{1}{4}\frac{(p\,r)'}{p\,r}\right]\exp\Big(\pm\int_a^x\Big(\frac{p}{r}\Big)^{1/2}ds\Big)\big(1+o(1)\big).\end{aligned}\tag{12.61}$$

עלינו להעריך את הגודל $(p\,r)'/(p\,r)$ יחסית ל־$\big(p/r\big)^{1/2}$. לשם זה נעזר בלמה הבאה.

למה 12.9 יהיו r,μ ממשיים ושונים מ־0 ומתקיימות שתי ההנחות

(i) האינטגרל $\int^\infty \mu(r\mu')'\,dx$ מתכנס,

(ii) $\int^\infty (r\mu^2)^{-1}\,dx=\infty$,

אז $\int^\infty r\mu'^2\,dx<\infty$ ו־$r\mu\mu'\to 0$.

הוכחה. תחלה נעיר כי עבור הבחירה $\mu=(r\,p)^{-1/4}$, ההנחות (i), (ii) הן בדיוק (12.58), (12.57).

ללא הגבלת כלליות אפשר להניח כי r,μ חיוביים. בדרך השלילה נניח כי טענת הלמה אינה מתקיימת ו־$\int^\infty r\mu'^2\,dx=+\infty$. מהנחה זו והנחה (i) נובע כי

$$r\mu\mu'\Big|_a^x=\int_a^x\big(r\mu\mu'\big)'\,dx=\int_a^x\mu\big(r\mu'\big)'\,dx+\int_a^x r\mu'^2\,dx\to+\infty.$$

ו־$r\mu\mu'\to\infty$ כאשר $x\to\infty$. לפיכך גם μ' חיובי לבסוף ו־μ פונקציה מונוטונית עולה ומתכנסת לגבול חיובי, סופי או אינסופי. $1/\mu$ חיובי, מונוטוני יורד, לכן בעזרת (i) גם

$$r\mu'(x)\Big|_a^x=\int_a^x\big(r\mu'\big)'\,dx=\int_a^x\mu^{-1}\Big(\mu\big(r\mu'\big)'\Big)\,dx$$

מתכנס כש־$x \to \infty$. על כן

$$r\mu'(x) = r\mu'(\infty) - \int_x^\infty \mu^{-1}\Big(\mu(r\mu')'\Big)\,dx = \ell + o\big(\mu^{-1}\big).$$

אילו היה $\ell = 0$ אז $r\mu' = o\big(\mu^{-1}\big)$ ו־$r\mu\mu' = o(1)$, בסתירה למה שהוכחנו למעלה. לפיכך $\ell \neq 0$. לבסוף, מתוך

$$\big(\mu^{-1}\big)' = -\mu^{-2}\mu' = -\big(r\mu^2\big)^{-1}\big(r\mu'\big) = -\Big(\ell + o\big(\mu^{-1}\big)\Big)\big(r\mu^2\big)^{-1}$$

נובע $\mu^{-1}(x) \sim \int^\infty (r\mu^2)^{-1}\,dx$. אבל זה בלתי אפשרי כי חסום בעוד אגף ימין אינסופי על פי הנחה (i). סתירה זו מוכיחה כי מתקיים $\int^\infty r\mu'^2\,dx < \infty$, כפי שנטען.

כמו בתחילת ההוכחה,

$$r\mu\mu'\Big|_a^x = \int_a^x \big(r\mu\mu'\big)'\,dx = \int_a^x \mu\big(r\mu'\big)'\,dx + \int_a^x r\mu'^2\,dx$$

אך עכשיו כבר ידוע לנו ששני האינטגרלים בצד ימין מתכנסים, לפיכך $\lim_{x\to\infty}(r\mu\mu') = k$, כש־$k$ מספר סופי. מכאן

$$r\mu'^2 = \big(r\mu\mu'\big)^2/\big(r\mu^2\big) = \big(k + o(1)\big)^2\big(r\mu^2\big)^{-1}.$$

אך הוכחנו כי $\int^\infty r\mu'^2\,dx < \infty$ בעוד שלפי הנחה (ii), $\int^\infty (r\mu^2)^{-1}\,dx = \infty$, על כן $k = 0$. בזה השלמנו להוכיח את הטענה כי $r\mu\mu' \to 0$. □

נחזור להוכחת משפט 12.8.

כפי שכבר הערנו בתחילת הוכחת למה 12.9, עבור הבחירה $\mu = (r\,p)^{-1/4}$, הנחות משפט 12.8 הן בדיוק הנחות הלמה ולכן

$$r\mu\mu' = r\cdot(r\,p)^{-1/4}\cdot\frac{1}{4}(r\,p)^{-5/4}(r\,p)' = \frac{1}{4}\frac{(p\,r)'}{p\,r}\Big/\Big(\frac{p}{r}\Big)^{1/2} \to 0.$$

הודות ליחס זה, (12.61) הופך ל־

$$|p\,r|^{1/4}y' = \Big(\frac{p}{r}\Big)^{1/2}\exp\Big(\pm\int_a^x\Big(\frac{p}{r}\Big)^{1/2}ds\Big)\big(1+o(1)\big)$$

ולאחר כפל ב־$r^{3/4}p^{-1/4}$ מתקבל (12.60). בזה הושלמה הוכחת משפט 12.8 □

זו הוכחה פורמלית לקרובים האסימפטוטיים (12.6), (12.7), (12.9) של LG ו־WKB.

מפתח

אבל, נילס הנריק, 86
אופרטור צמוד, 200
אופרטור צמוד לעצמו, 205
אורתוגונליות, 126
איזוקלינה, 8, 62
אי־יציבות, 307
אינדקס, 280
אי שוויון ליאפונוב, 113
אסטרואיד, 27

בעיית שפה צמודה לעצמה, 221

גורם אינטגרציה, 13, 21
גידול אוכלוסיה, 2
גרונוול, הלמה של, 53
גרעין Cauchy, 102

דטרמיננט ונדרמונדה, 92

הזזת אינדקסים, 174
הפרדת משתנים, 9, 60
התפרקות רדיואקטיבית, 3

וורונסקיאן, 40, 136
וריאציה ראשונה, 59
וקטור עצמי, 145
וריאציה של פרמטרים, 14, 98, 166

ז'ורדן, קמיל, 155

חסם מלעיל אינפיניטיסימלי, 311

טורף־נטרף, 3, 249
טרנספורמצית Prüfer , 118
טרנספורמצית ליוביל־גרין, 339

יחידות, 44
יציב, 294
יציב באופן אסמפטוטי, 295
יציבות אסמפטוטית במידה שווה, 313
יציבות אקספוננציאלית, 316
יציבות במידה שווה, 312

כופלים אופייניים, 164, 287

לינאריזציה, 59, 257, 321

מודל SIR, 250
מטוטלת, 4, 76, 308
מטריצה ניתנת ללכסון, 149
מטריצת מעבר, 144
מיפוי פואנקרה, 283, 284
מישור פאזה, 247
מסלול, 245
מסלול הטרוקליני, 273
מסלול הומוקליני, 273
מערכת אוטונומית, 69, 244
מערכת אלכסונית, 342
מעטפת, 25
מערכת מחזורית, 300
מערכת משוואות לינארית הומוגנית, 135
מערכת משוואות עם מקדמים קבועים, 145
מרחב לינארי, 135
מרחב מטרי, 50
משפט ההפרדה של שטורם, 110
משפט Floquet, 162

משפט Levinson, 344
משפט פואנקרה־בנדיקסון, 269
משפט קיום ויחידות, 78
משפך, 64
משוואה אוטונומית, 10, 69, 72
משוואה אינדיציאלית, 182
משוואה דיפרנציאלית מטריצית, 142
משוואה היפרגיאומטרית, 180
משוואה לוגיסטית, 10, 60
משוואה מנורמלת, 1, 6, 13, 77, 176
משוואה מטיפוס הומוגני, 14
משוואה ניתנת להפרדה, 9
משוואה עם מקדמים קבועים, 91
משוואות לינאריות לא הומוגניות, 97
משוואת Liénard, 275
משוואת אוילר, 95, 181
משוואת בסל, 116, 188
משוואת הרמיט, 177
משוואת לז'נדר, 175
משוואת צ'ביצ'ף, 177, 180

נגזרת לאורך מסלול, 301
נוסחת Putzer, 153
נוסחת אבל, 86, 140
נורמה מטריצית, 150
נקודה קריטית, 69, 246
  אוכף, 254, 263
  כוכב, 255, 260
  לינארית, 252
  מרכז, 256
  ספירל, 256, 259
  צומת, 253
  צומת מנוון, 254
  קשר, 261
נקודת שווי משקל, 69, 246

סדרת Cauchy, 50

עקבה של מטריצה, 140, 146
עקומים אורתוגונליים, 28
עקרון האינווארינטיות, 309
ערך עצמי, 145
ערך עצמי ־ ריבוי אלגברי, 149
ערך עצמי ־ ריבוי גיאומטרי, 149

פולינום אופייני, 92
פונקציה אנליטית, 168
פונקציה יוצרת, 194
פונקציית בסל, 189
פונקציית מרחק, 50
פרדהולם, 226
פתרון יסודי, 143
פתרון לוקלי, 35

צורת ז'ורדן, 155
צרוף לינארי, 135

קבוצה אינווארינטית, 303
קו מפריד, 266
קומבינציה לינארית, 135
קרובים עוקבים, 43

שדה כיוונים, 6, 62, 246
שדה משמר, 18

תחום הגדרה של פתרון, 35
תלות לינארית, 135
תמונת פאזה, 245
תנאי ליפשיץ, 39